

## Алгоритмы автоматизации определения аэродинамических показателей поверхностей отрицательной гауссовой кривизны

С. С. Шилов

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
Нижний Новгород, Россия

**Аннотация.** В статье описываются процессы цифровой поддержки поверхностной с отрицательной гауссовой кривизной и сопутствующие процессы, касающиеся геометрического и математического моделирования, а также параметризации форм. Приведено геометрическое описание тороидной и глобoidной поверхностей наложением необходимых ограничений для создания конечной конфигурации. Представлены результаты компьютерного моделирования ветровых потоков при их взаимодействии с исследуемыми поверхностями. При систематизации полученных результатов разработаны алгоритмы автоматизации определения аэродинамических характеристик, которые вошли в основу инженерных расчетов, позволяющих получать необходимые данные без проведения дополнительных вычислительных операций.

**Ключевые слова:** поверхность с отрицательной гауссовой кривизной, цифровая поддержка проектирования, аэродинамические воздействия

## Geometric methods and algorithms for automating the modeling of aerodynamics of surfaces with negative Gaussian curvature

S. S. Shilov

Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering,  
Nizhny Novgorod, Russia

**Abstract.** The article describes the processes of digital support for a surface with negative Gaussian curvature and related processes related to geometric and mathematical modeling, as well as shape parameterization. A geometric description of the toroidal and globoid surfaces is given by imposing the necessary constraints to create the final configuration. The results of computer simulation of wind flows in their interaction with the studied surfaces are presented. When systematizing the results obtained, algorithms for automating the determination of aerodynamic characteristics have been developed, which form the basis of engineering methods that allow obtaining the necessary data without additional computational operations.

**Keywords:** negative Gaussian curvature surface, digital design support, aerodynamic effects.

### Введение

Геометрические формы играют ключевую роль в инженерном деле, определяя функциональность, надежность и эффективность применяемых элементов различных технических систем [1, 2]. Разнообразие форм способствует возникновению определенных сложностей у инженеров и проектировщиков при решении поставленных перед ними задач. Принцип наличия согласованности между применяемой формой и требуемым функционалом позволяет оптимизировать как отдельные конструктивные элементы, так и объекты проектирования в целом.

Поверхности с отрицательной гауссовой кривизной характеризуются наличием седловидных форм, в которых одна главная кривизна положительна, а другая – отрицательна. Такие поверхности обладают уникальными свойствами, такими как гибкость, устойчивость к деформациям и способность адаптироваться к различным нагрузкам. Геометрические описания таких поверхностей рассмотрены в работах [3, 4].

Воздушные потоки играют важную роль в различных областях науки и техники, включая аэродинамику, климатологию и инженерию. Понимание взаимодействия воздушных потоков с различными геометрическими формами помогает оптимизировать конструкции самолетов, зданий и других объектов, обеспечивая эффективность и безопасность эксплуатации. Вопрос взаимодействия потоков воздуха с различными геометрическими формами рассматривался многими учеными в научных работах [5].

Взаимодействие криволинейных поверхностей с потоками воздушных масс, процесс оптимизации и автоматизации моделирования аэродинамических процессов легли в основу настоящего исследования.

### Постановка задачи

Целью исследования является разработка алгоритмов автоматизации моделирования аэродинамики поверхностей отрицательной гауссовой кривизны. Для достижения поставленной цели решался ряд задач:

- геометрическое описание рассматриваемых тороидных и глобоидных поверхностей;
- систематизация результатов компьютерного моделирования;
- разработка алгоритмов автоматизированного расчета аэродинамических параметров на поверхности с отрицательной гауссовой кривизной.

### Теория

Объектом исследования являются поверхности отрицательной гауссовой кривизны. Одна поверхность является результатом вырезания внутренней части тороидной поверхности из цилиндрического объема (рис. 1). Вторая поверхность в начертательной геометрии носит название глобоида и образуется путем вращения части дуги вокруг неподвижной оси (рис. 2) [6, 7].

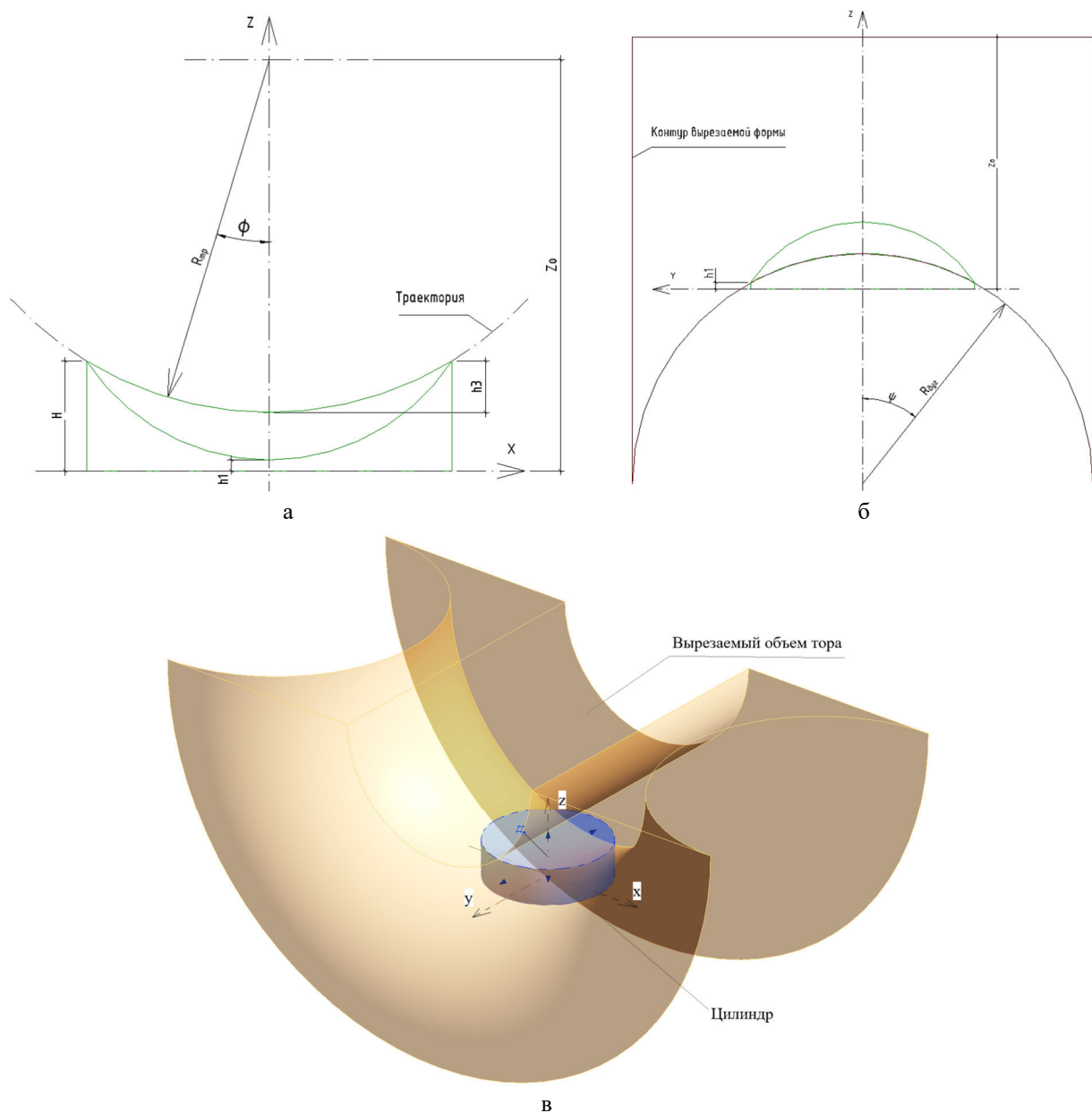


Рисунок 1. Геометрическая схема тороидной поверхности: *а* – вид спереди; *б* – вид сбоку; *в* – общий вид

Поверхность тора описывается в параметрическом виде (1). В рассматриваемой задаче интерес представляет только внутренняя часть тороидной поверхности, которая обеспечивается наложением

ограничений (2). Итоговая поверхность ограничивается цилиндром, соответственно, координаты точек поверхности должны удовлетворять равенству (1) и удовлетворять условиям (3).

$$\begin{cases} x = ((R_{mp} + R_{\partial yz}) + R_{\partial yz} \cos \psi) \cdot \cos \varphi; \\ y = R_{\partial yz} \sin \psi; \\ z = ((R_{mp} + R_{\partial yz}) + R_{\partial yz} \cos \psi) \cdot \sin \varphi + (H + R_{mp} - h_3). \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]; \\ \varphi \in [\pi; 2\pi]. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} -D/2 \leq x \leq D/2; \\ -D/2 \leq y \leq D/2; \\ 0 < z \leq H. \end{cases} \quad (3)$$

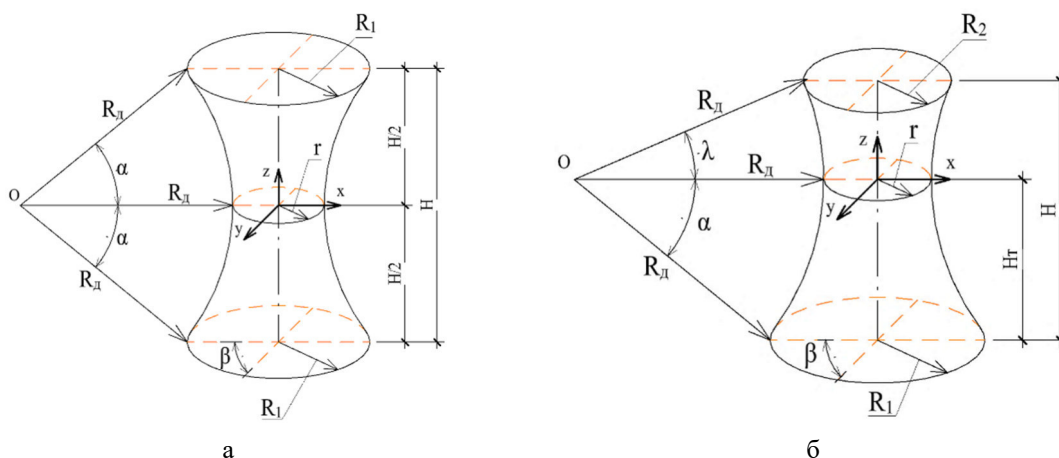


Рисунок 2. Геометрическая схема глобоидной поверхности:  
при равных (а) и различных (б) размерах верхнего и нижнего оснований

Поверхность глобоида можно выразить в виде параметрической зависимости (4), записанной для тороидной поверхности с некоторыми ограничениями:

$$\begin{cases} x(z) = ((R_o + r) - R_o \cos \alpha) \cdot \cos \beta; \\ y(z) = ((R_o + r) - R_o \cos \alpha) \cdot \sin \beta; \\ z \in \left[-\frac{H}{2}; \frac{H}{2}\right]. \end{cases} \quad (4)$$

В основе компьютерного моделирования ветровых потоков лежат уравнения Навье–Стокса, которые описывают движение жидкости и газа [8] (5), а также уравнение неразрывности (6).

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \vec{v}) = 0, \quad (6)$$

где  $\nabla$  – оператор набла;  $\Delta$  – векторный оператор Лапласа;  $t$  – время;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление;  $\vec{v}$  – векторное поле скоростей;  $\vec{f}$  – векторное поле силовых масс.

Приведенные в данном разделе геометрические методы построения поверхности отрицательной кривизны легли в основу построения параметрических моделей в среде информационного моделирования, что позволяет создавать множество форм, экономя трудовые и временные ресурсы [9]. Уравнение движения газов использовалось при разработке алгоритмов автоматизации определения аэродинамических характеристик.

**Результаты экспериментов**

По результатам моделирования торонидной поверхности были выделены характерные аэродинамические зоны (рис. 3) и систематизированы картины распределения аэродинамических характеристик в зависимости от изменения коэффициента формы  $k$  (рис. 4), который определяется по следующему выражению:

$$k = \frac{H - h_2 - h_3}{D},$$

где  $h_2$  – высота сдвиговой дуги;  $h_3$  – высота дуги-траектории;  $H$  – общая высота;  $D$  – диаметр.

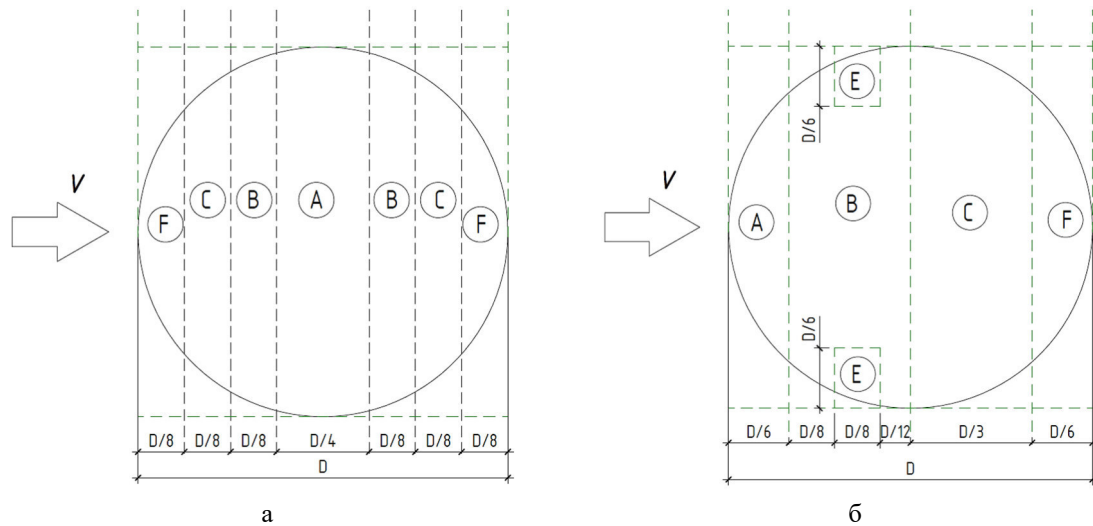


Рисунок 3. Размеры аэродинамических зон: а – «направление 0»; б – «направление 90»

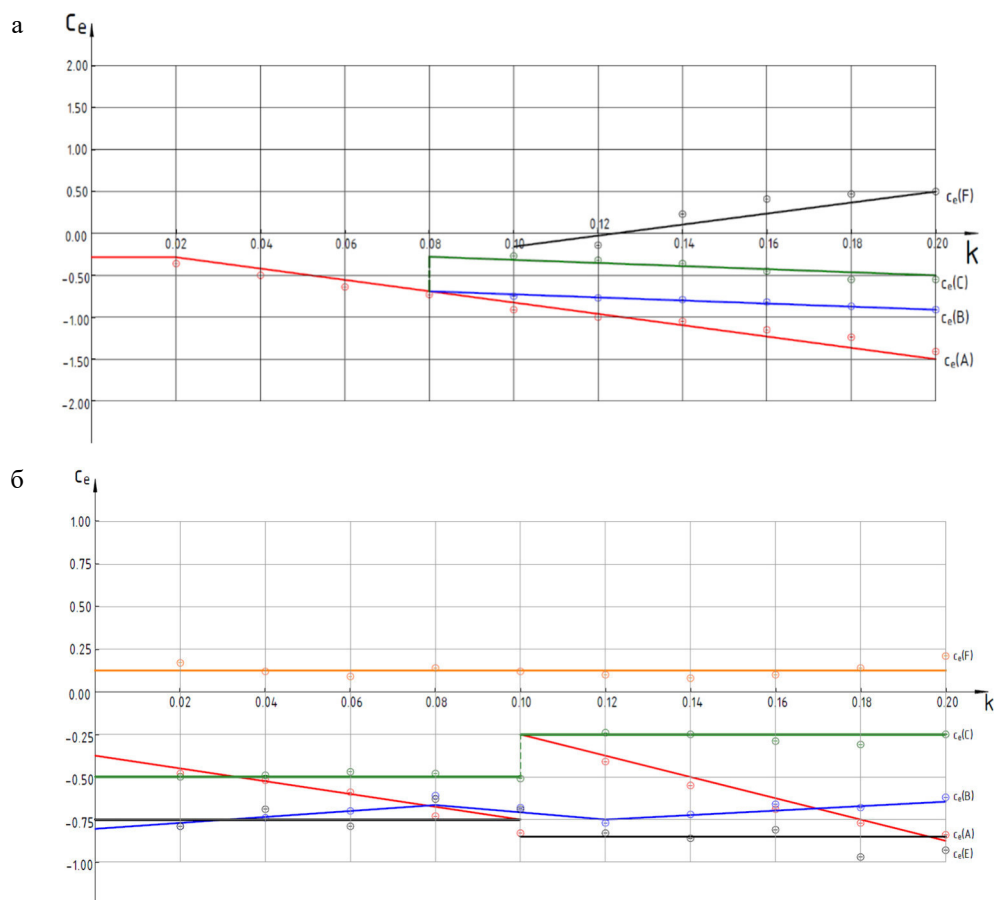


Рисунок 4. Картины изменения аэродинамических коэффициентов при направлении потоков:  
а – «направление 0»; б – «направление 90»

Для разработки алгоритмов автоматизации моделирования аэродинамики поверхностей отрицательной гауссовой кривизны определялись характерные картины для каждой поверхности. В ходе анализа результатов многократно проведенных компьютерных экспериментов тороидной поверхности были получены три характерные картины распределения аэродинамических коэффициентов по поверхности по одному направлению движения воздушных масс и одна картина по перпендикулярному направлению. Следующим этапом являлась систематизация геометрических фигур, характеризующих изменения аэродинамических коэффициентов, и установление принадлежности искомой точки той или иной аэродинамической зоне. Данный алгоритм был опубликован в научной статье [10].

При анализе результатов компьютерного моделирования аэродинамических особенностей поверхности глобоида было установлено, что имеются три характерные картины распределения исследуемых параметров (рис. 5–7). Каждая картина была разделена на области, для которых были получены осредненные значения аэродинамических коэффициентов. Для возможности выделения момента, когда меняется характерная картина, вводится коэффициент формы, который в общем случае определяется по формуле

$$k = \frac{R_1 + R_2 - 2r}{2H}.$$

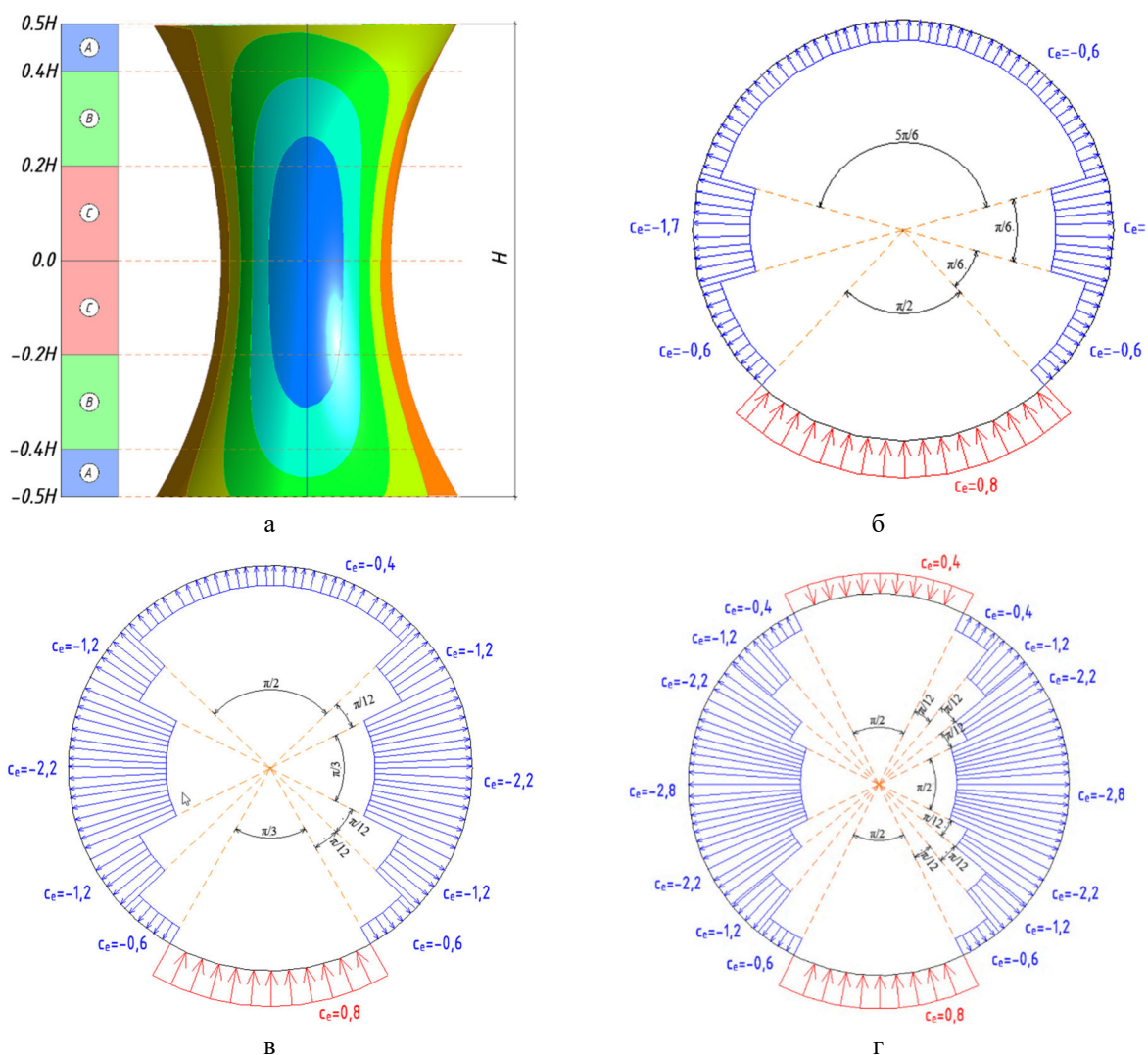


Рисунок 5. Картины распределения аэродинамических коэффициентов:  
а – общий вид первой картины при  $R_1 = R_2$ ; б – для зоны "А"; в – для зоны "В"; г – для зоны "С"

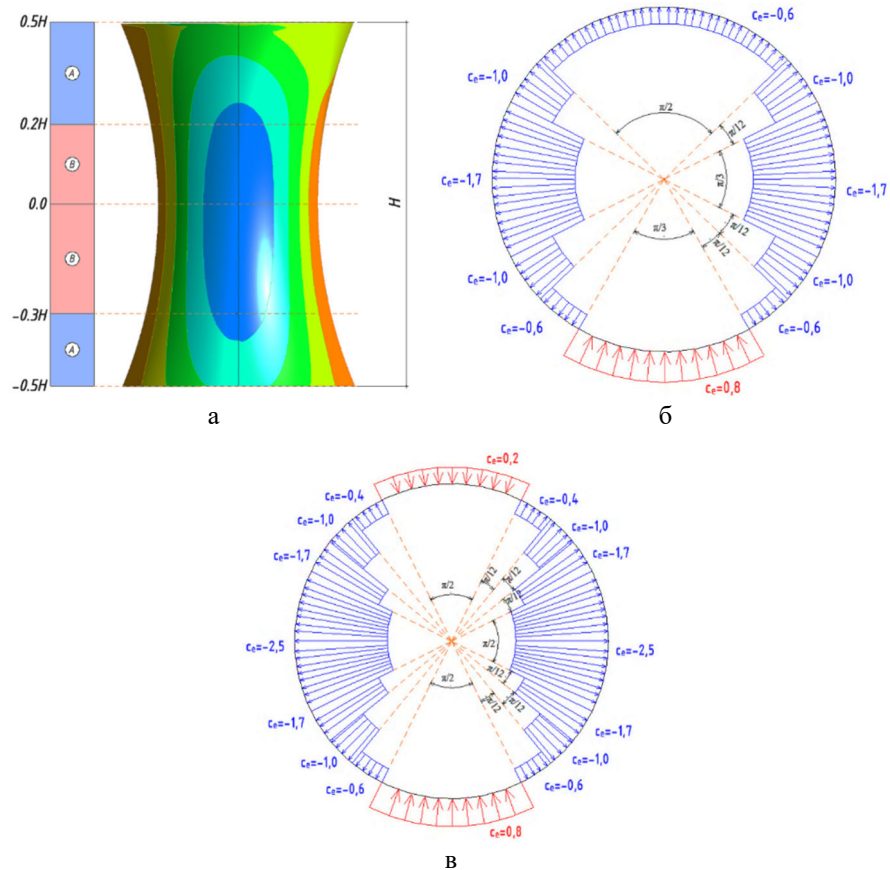


Рисунок 6. Картины распределения аэродинамических коэффициентов:  
 а – общий вид второй картины при  $R_1 = R_2$ ; б – для зоны "А"; в – для зоны "В"

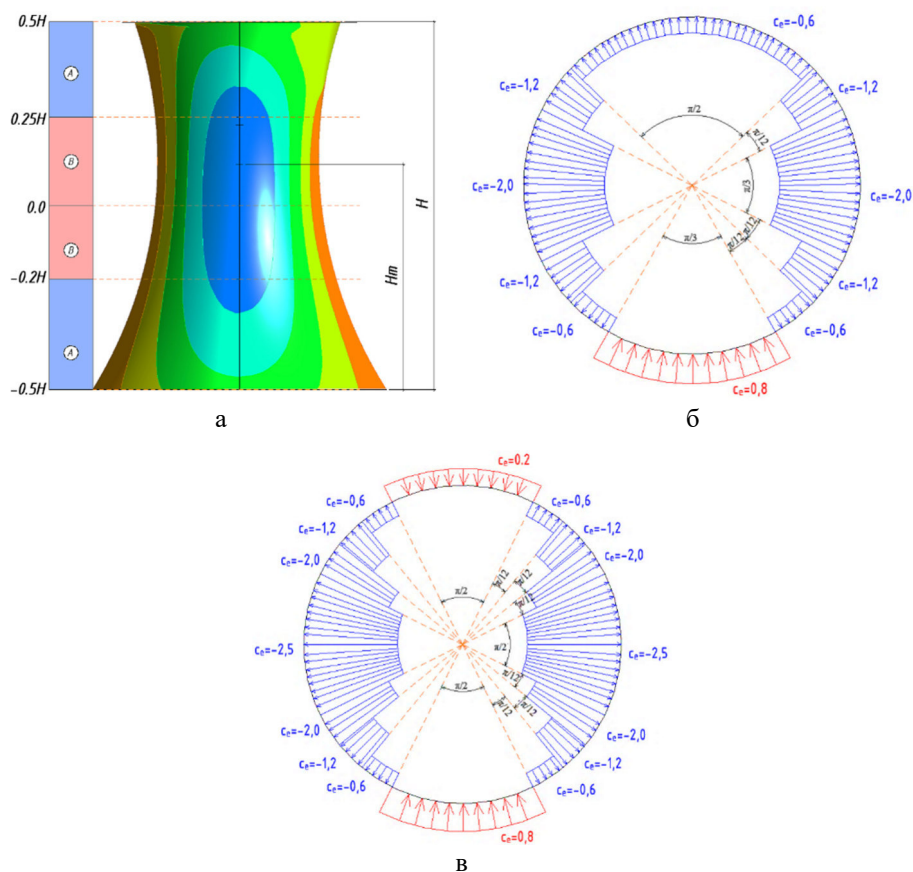


Рисунок 7. Картины распределения аэродинамических коэффициентов:  
 а – общий вид картины при  $R_1 \neq R_2$ ; б – для зоны "А"; в – для зоны "В"

### Обсуждение результатов

Разработанные способы определения аэродинамических характеристик исследуемых поверхностей расширяют существующие положения нормативных баз, в частности в строительных нормах, в которых заложены формы, являющиеся крайним случаем исследуемых поверхностей: сводчатая поверхность – крайняя формы тороидной поверхности (рис. 8), цилиндр – глобоида (рис. 9). Достоверность проверенных исследований достигается строгостью математического аппарата, большого количества вычислительных экспериментов и общей согласованностью с действующими нормативными документами.

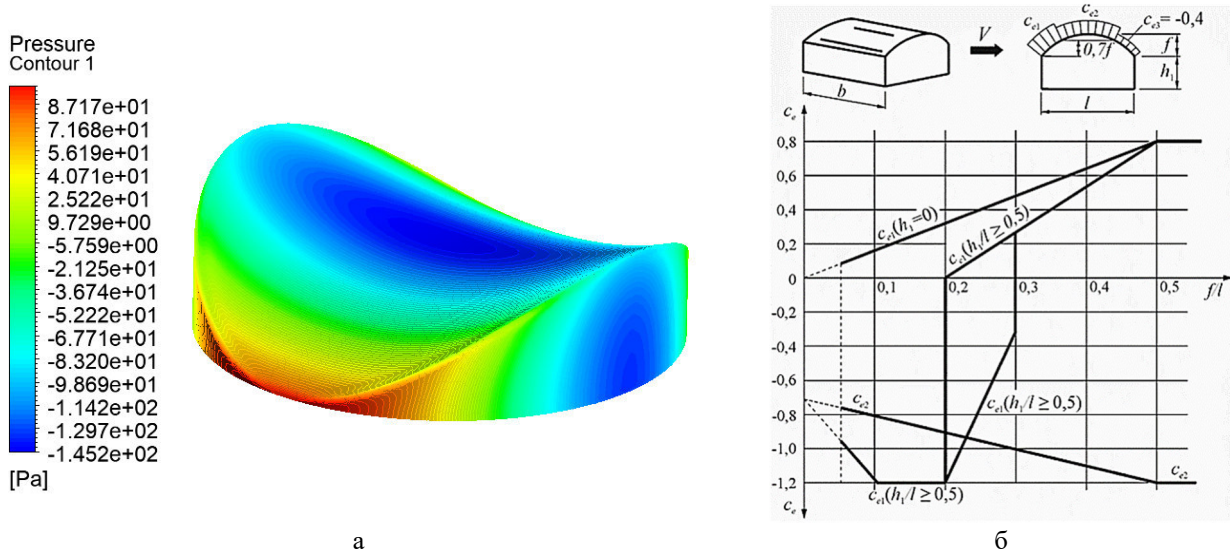


Рисунок 8. Картины распределения аэродинамических коэффициентов: *а* – компьютерное моделирование для тороидной поверхности; *б* – фрагмент действующего нормативного документа

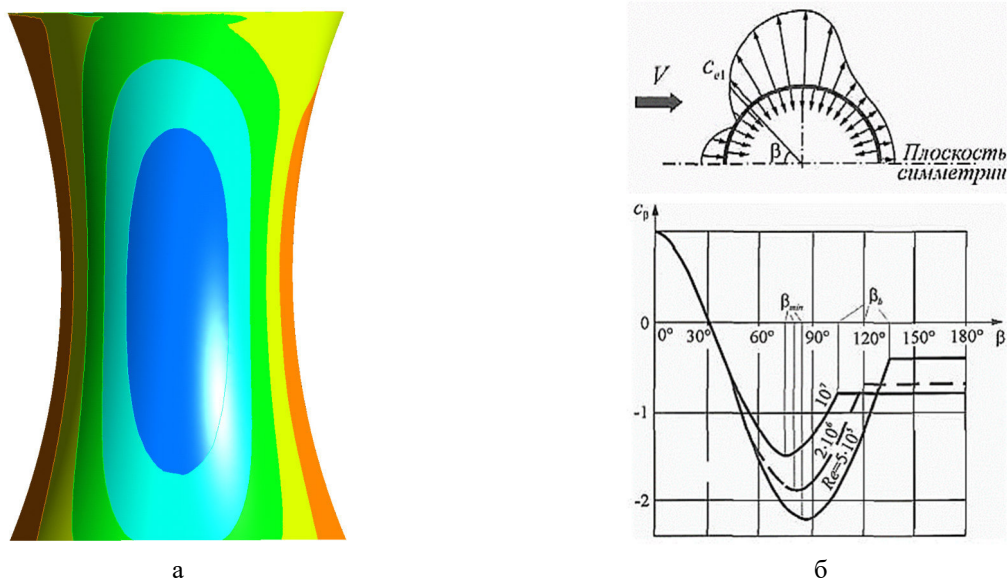


Рисунок 9. Картины распределения аэродинамических коэффициентов: *а* – компьютерное моделирование для глобоидной поверхности; *б* – фрагмент действующего нормативного документа (прил. В.1.12 СП 20.13330.2016)

С использованием представленных в статье цифровых моделей поверхностей с отрицательной гауссовой кривизной были разработаны алгоритмы автоматизированного определения аэродинамических характеристик в конкретно заданной точке на тороидных и глобоидных поверхностях (рис. 10, 11), которые могут быть внедрены в проектные процедуры на различных этапах жизненного цикла зданий и сооружений.

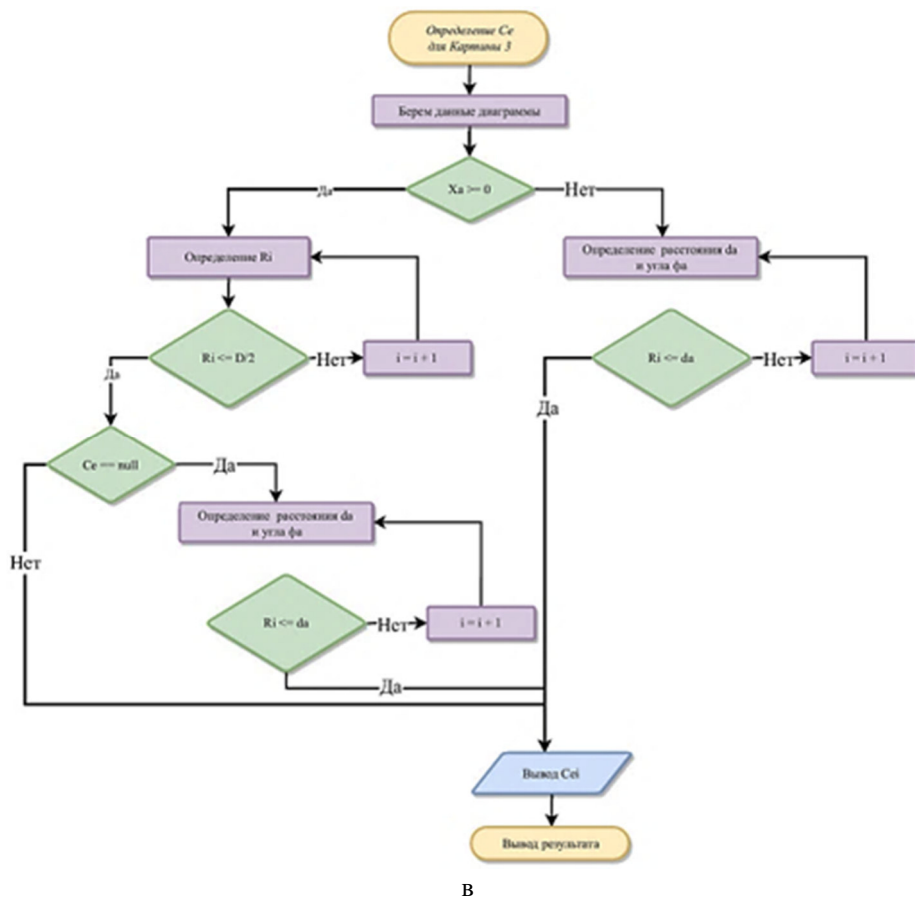
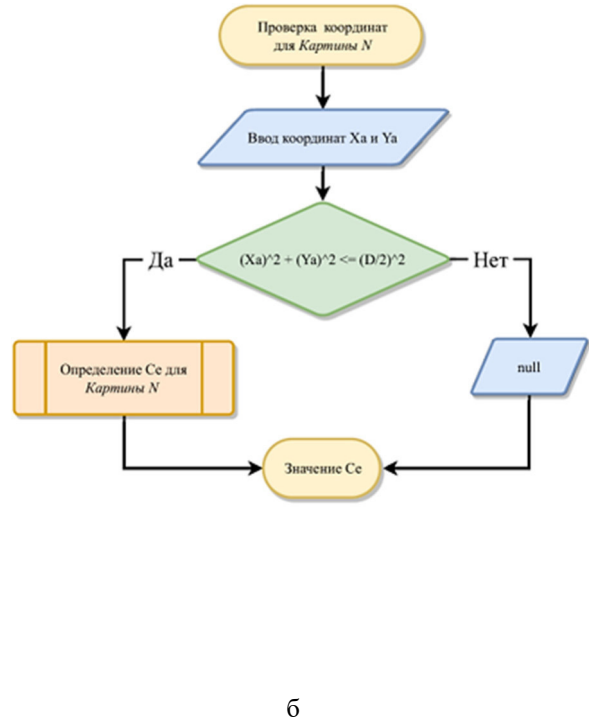
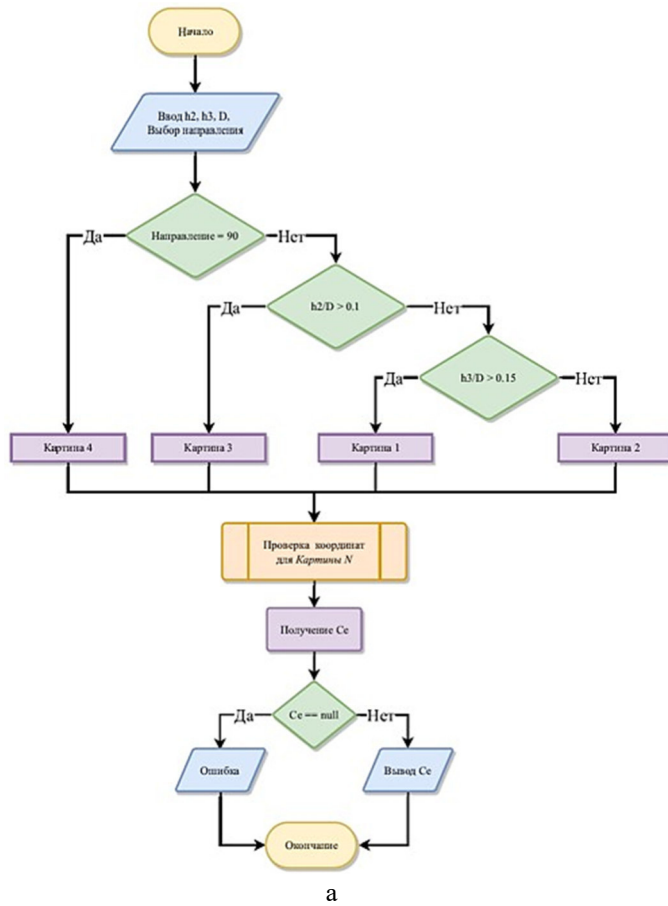


Рисунок 10. Алгоритм определения аэродинамических коэффициентов на тороидной поверхности:  
а – блок-схема основной программы; б, в – блок-схема подпрограмм

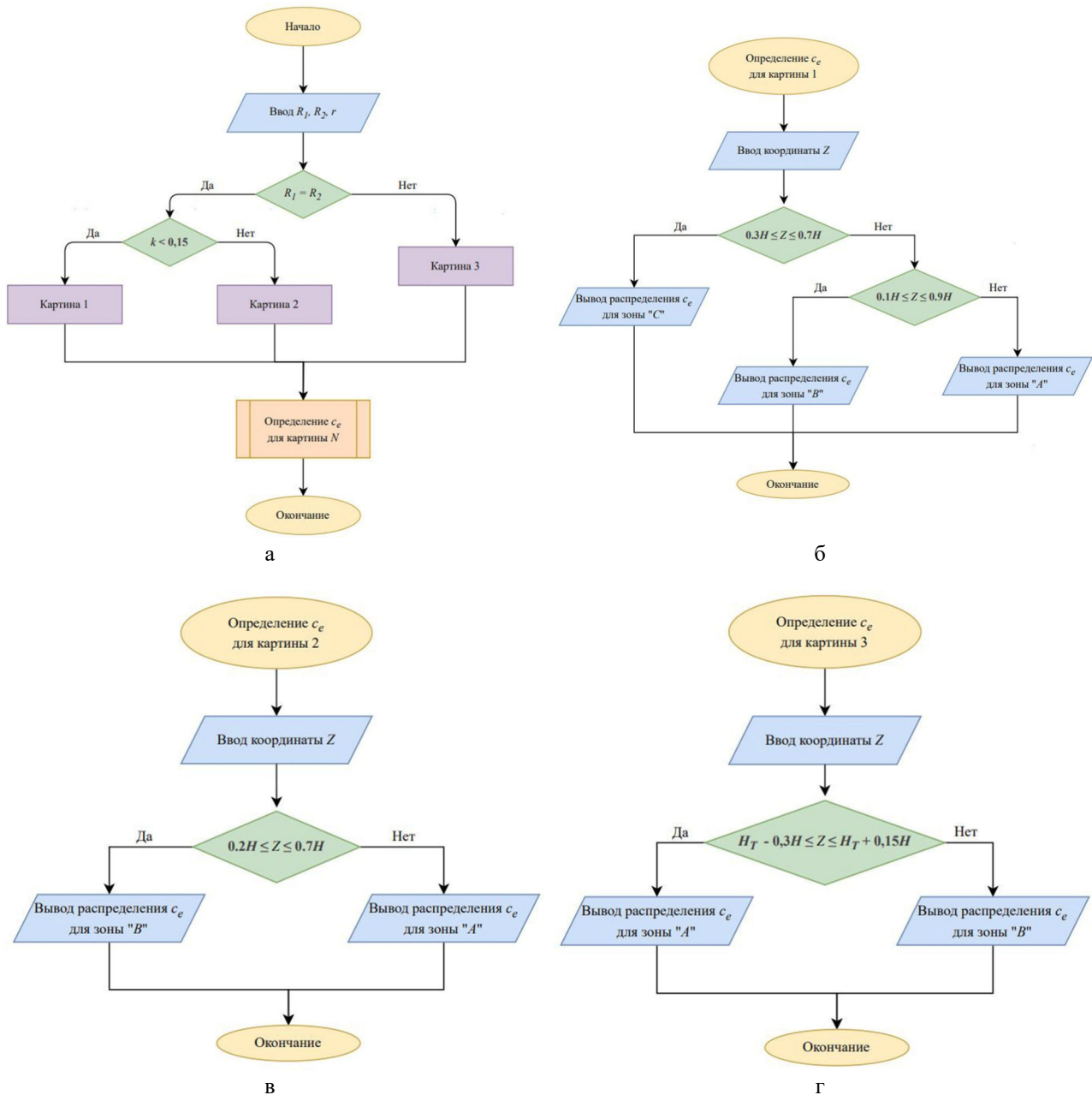


Рисунок 11. Алгоритм определения аэродинамических коэффициентов на тороидной поверхности:  
а – блок-схема основной программы; б-г – блок-схема подпрограмм

## Выводы

1. Решены задачи параметрического моделирования семейств геометрических поверхностей тороидального и глобоидного типов, пригодных для интеграции в современные системы автоматизированного проектирования (САПР) и стандарты проектирования различных технических объектов, таких как строительные конструкции, автомобили и самолеты.

2. На основании систематизации результатов многократно проведенных вычислительных экспериментов и геометрического анализа изополей распределения аэродинамических коэффициентов разработаны инженерные расчеты аэродинамических параметров поверхностей отрицательной гауссовой кривизны.

3. Разработаны алгоритмы автоматизированного расчета аэродинамических параметров поверхностей отрицательной гауссовой кривизны, ставшие основой для реализованного программного обеспечения «Система автоматизированного расчета аэродинамических коэффициентов на поверхность двоякой кривизны» (свидетельство о государственной регистрации № 2025666216 от 24.06.2025 г.).

**Научный руководитель** Хазов Павел Алексеевич, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет.

### Список литературы

1. Нартова Л. Г., Бодрышев В. В. Геометрическое моделирование технических поверхностей избранных классов // Вестник БГТУ. 2018. № 8 (69). С. 4–13.
2. Иванов В. Н. Формообразование поверхностей на заданных криволинейных планах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 13. С. 3–8.
3. Моделирование кривых 2-го порядка и поверхностей оболочек инженерных сооружений на их основе / Е. В. Конопацкий, О. С. Воронова, С. И. Ротков, М. В. Лагунова, А. А. Бездитный // Строительство и техногенная безопасность. 2021. № 22 (74). С. 101–110.
4. Крысько А. А. Геометрическое и компьютерное моделирование криволинейных поверхностей мембранных покрытий на прямоугольном плане // Строительство и техногенная безопасность. 2020. № 18 (70). С. 98–106.
5. Поддаева О. И., Дуничкин И. В. Архитектурно-строительная аэродинамика // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 6. С. 602–609. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.6.602-609
6. Sobolak M., Jagielowicz P. E. The methods of globoid surface modeling in CAD // Archives of Materials Science and Engineering. 2016. No. 81. Pp. 76–84.
7. Golebsky R., Boral P. Globoid surface shaped with turning and envelope method // MATEC Web of Conferences, 2019. No. 254. Pp. 2–12.
8. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. 2-е изд. М.: Мир, 1981. 408 с.
9. Шилов С. С., Федоров А. В., Молева А. А. Параметрическое моделирование как способ увеличения жизненного цикла зданий и сооружений // Приволжский научный журнал. 2024. № 3. С. 231–239.
10. Шилов С. С., Хазов П. А., Ведяйкина О. И. Методика цифровой поддержки определения аэродинамических показателей на поверхности двойкой кривизны // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2025. № 7. С. 23–31.