

Геометрические модели и алгоритмы проектирования отражающих экранов в акустике

Е. А. Замятин

Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация. При проектировании зданий и сооружений общественного назначения важно учитывать акустические параметры помещения. Данные параметры оказывают значительное влияние на комфортность эксплуатации помещений. Одним из способов улучшения акустических параметров является применение отражающих экранов. В работе рассмотрены вопросы разработки таких экранов на основе методов геометрической акустики.

Ключевые слова: геометрическая модель, акустические параметры, отражающий экран, каркасная поверхность, сплайн

Geometric models and algorithms for designing reflective screens in acoustics

E. A. Zamyatina

Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russia

Abstract. When designing buildings and public facilities, it is important to take into account the acoustic parameters of the room. These parameters have a strong influence on the comfort of the premises operation. One of the ways to improve acoustic parameters is to use reflective screens. The paper considers the issues of developing such screens based on geometric acoustics methods.

Keywords: geometric model, acoustic parameters, reflective screen, frame surface, spline

Введение

При проектировании поверхностей внутренних помещений объектов общественного назначения необходимо учитывать акустические свойства помещений. Эти характеристики оказывают сильное влияние на комфортность эксплуатации объектов.

В настоящее время для расчета акустических параметров помещений применяются волновая, статистическая и геометрическая модели.

Так как звук имеет волновую природу, то *волновая модель* наиболее полно отражает явления, связанные с его распространением в помещениях. Но данная модель требует большого объема вычислений. В связи с этим волновая модель применяется для помещений несложной геометрической формы [1].

Статистическая модель [2] предполагает, что звуковое поле в помещении изотропное и диффузное. Для расчетов используются усредненные параметры звукового излучения. Эта модель не учитывает геометрическую форму помещения, но эффективна для расчета времени реверберации и других акустических параметров.

Геометрическая модель не учитывает волновую природу излучения, поэтому имеет ряд ограничений [3]. При соблюдении условий применимости геометрическая модель дает возможность получить результаты расчета акустических параметров при использовании поверхностей сложной геометрической формы. В расчетах акустических параметров помещений геометрическая модель применяется достаточно давно, но ее применение было ограничено трудоемкими процессами графических построений. Поэтому, как правило, строились плоские модели (разрезы, планы) распространения звука в помещениях. Применение геометрической модели в системах компьютерной графики значительно расширяет ее возможности, позволяя реализовать геометрическое моделирование акустических процессов в пространстве для поверхностей, имеющих сложную геометрическую форму.

Постановка задачи

В статье рассмотрены вопросы совершенствование существующих и разработка новых геометрических моделей и алгоритмов создания отражающих поверхностей на основе сплайновых методов с учетом акустических свойств. Для этих целей необходимо:

- 1) разработать геометрическую модель создания поверхностей экранов, содержащих заданные точки и отражающих звук точечного источника на заданную поверхность;
- 2) разработать, на основе предложенной геометрической модели, геометрические и вычислительные алгоритмы создания поверхностей отражающих экранов;
- 3) разработать методику оптимизации поверхности отражающих экранов для повышения их эффективности;
- 4) провести вычислительные эксперименты по расчету акустических параметров помещений при применении отражающих экранов, созданных на основе предложенной геометрической модели создания поверхностей экранов.

Теория

Среди основных методов образования поверхностей наибольшее распространение получили *каркасный* и *каркасно-кинематический*. Для решения поставленных задач наиболее подходит каркасный метод, так как при создании поверхности с помощью данного метода [4] есть возможность наиболее полно учитывать заданные условия в определенных точках поверхности.

Каркасные поверхности определяются непрерывными каркасами, т. е. однопараметрическими наборами линий, принадлежащими поверхности, взятыми с шагом параметра, меньшим по модулю любой наперед заданной положительной величины.

Геометрической частью определителя каркасной поверхности является ее дискретный каркас, представляющий собой дискретный набор линий, принадлежащих определяемой поверхности. Алгоритмическая часть определителя такой поверхности представляет собой описание процесса определения точек и линий, принадлежащих поверхности, при непрерывном изменении параметров.

Для задания геометрической части определяемых поверхностей, т. е. дискретного линейного каркаса, в работе использовались кубические сплайны [5]. Как известно, сплайны являются мощным современным средством геометрического моделирования. Многие современные графические системы (*AutoCAD*, *3DMAX* и др.) поддерживают моделирование с помощью сплайнов. Кубические сплайны не требуют больших затрат вычислительных ресурсов, вместе с этим позволяют строить плавные линии в пространстве, проходящие через заданные точки, имеющие в каждой точке непрерывные производные первого и второго порядков.

Рассмотрим алгоритмическую часть определителя каркасных поверхностей, т.е. набор действий, которые необходимо выполнить для определения различных параметров поверхности. Приведены два варианта: аппроксимация участка поверхности и аппроксимация всего заданного отсека поверхности.

Рассмотрим *аппроксимацию отсека поверхности*. Пусть поверхность задана сетью. Возьмем в пространстве некоторую линию t . Определим первые и вторые производные в ее точках при переходе к новому параметру. Пусть задана линия

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \quad (1)$$

Перейдем к новому параметру u . Будем считать, что параметрам точек $M_i = s_i$ соответствуют новые параметры u_i . Запишем зависимость параметра s от u в следующем виде:

$$s = f(u). \quad (2)$$

Тогда с учетом (1) и (2) уравнение линии имеет такой вид:

$$\vec{r} = \vec{r}(f(u)). \quad (3)$$

Определим зависимость (3). Выполним аппроксимацию функции (3) плоским сплайном, который обозначим через n (рис. 1). Имея такую зависимость, можно определить параметр точки на линии – s^T при заданном параметре u^T (см. рис. 1) и из уравнения (3) найти координаты точки.

Найдем первую и вторую производные по новому параметру u . Продифференцировав (9) по параметру u , получим

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{d\vec{r}(f(u))}{ds} \frac{df(u)}{du}. \quad (4)$$

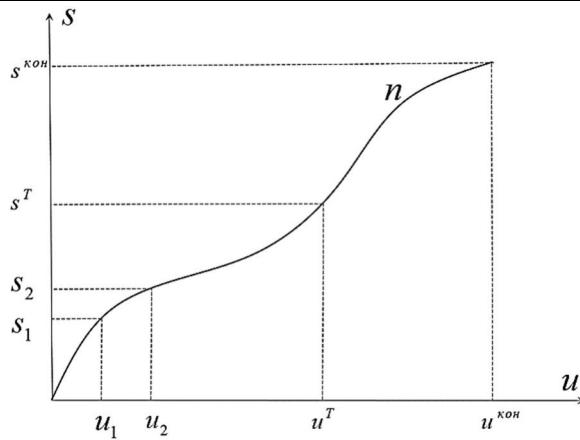


Рисунок 1. Зависимость $s = f(u)$

Положение точки на сплайне n (см. рис. 1) зависит от параметра σ , поэтому

$$\frac{df}{du} = \frac{ds}{d\sigma} / \frac{du}{d\sigma}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), для первых производных получим

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{d\sigma} / \frac{du}{d\sigma}. \quad (6)$$

Для определения вторых производных продифференцируем (5) по u :

$$\frac{d^2\vec{r}}{du^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \left(\frac{df}{du} \right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2f}{du^2}. \quad (7)$$

Найдем вторую производную функции f по параметру u :

$$\frac{d^2f}{du^2} = \left(\frac{du}{d\sigma} \cdot \frac{d^2f}{d\sigma^2} - \frac{d^2u}{d\sigma^2} \cdot \frac{df}{d\sigma} \right) / \left(\frac{du}{d\sigma} \right)^2. \quad (8)$$

Подставив (5) и (8) в (7), получим значение искомой второй производной.

Пусть заданы параметры некоторой точки поверхности K – u_k и v_k . Найдем координаты этой и производные в ней. Определим на каждом сплайне k_i точку N_i , соответствующую параметру

$v=v_k$ (3). В каждой точке N_i определим первые производные $\frac{d\vec{r}_i^k(f_i(v_k))}{dv}$ (6) и вторые производные

$\frac{d^2\vec{r}_i^k(f_i(v_k))}{dv^2}$ (7). Через найденные точки построим сплайн l_k (рис. 2). Точка K будет принадлежать

этому сплайну. Построим для сплайна l_k зависимость параметра s_k от u (2) (см. рис. 2). По формуле (3) определим координаты точки K , по (7), (8) – производные высших порядков.

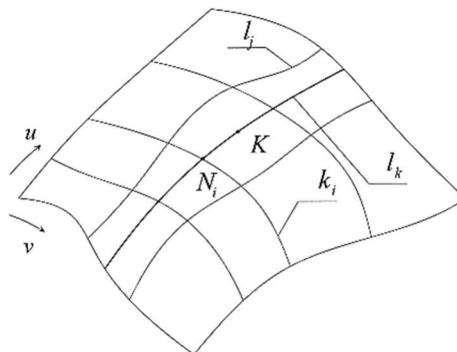


Рисунок 2. Построение сплайна l_k

Рассмотрим конструирование каркасных поверхностей, соответствующих заданным требованиям. В качестве требований, предъявляемых к поверхности, взяты условия оптимального отражения излучения от конструируемой поверхности на заданную поверхность и принадлежности конструируемой поверхности заданных точек. Такие условия часто используются для конструирования отражающих экранов при решении задач в геометрической оптике и акустике.

Рассмотрим формирование отражающей поверхности. Пусть заданы I – точечный источник излучения, массив точек A_{ij} , где $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$ и отсек поверхности Ω . Используя сплайновый метод, построим отсек поверхности Σ , содержащий точки массива A_{ij} и равномерно отражающий излучение источника I на отсек Ω . Массив и отсек поверхности согласованы. Под согласованием подразумевается установление взаимно однозначного соответствия между точками массива и точками отсека поверхности таким образом, чтобы сумма длин отрезков, соединяющих соответственные точки, была минимальной.

Определим в точках A_{ij} векторы нормалей \vec{N}_{ij} поверхности Σ (рис. 3)

$$\vec{N}_{ij} = \frac{\vec{B}_{ij} - \vec{A}_{ij}}{|\vec{B}_{ij} - \vec{A}_{ij}|} + \frac{\vec{I} - \vec{A}_{ij}}{|\vec{I} - \vec{A}_{ij}|}, \quad (9)$$

где \vec{I} , \vec{A}_{ij} , \vec{B}_{ij} – радиусы-векторы соответствующих точек I , A_{ij} , B_{ij} .

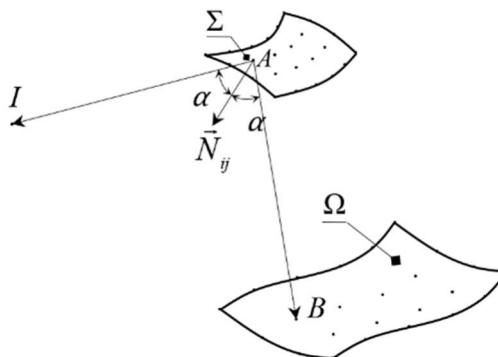


Рисунок 3. Определение вектора нормали

Возьмем ряд точек массива \vec{A}_{ij} при фиксированном значении j . Построим сплайн, проходящий через эти точки таким образом, чтобы касательные в них были перпендикулярны вектору нормали (9) и имели наименьшие углы φ с векторами $\vec{a}_{ij} = \vec{A}_{i+1,j} - \vec{A}_{ij}$. Вектор касательной \vec{t}_{ij}^v найдем как направляющий вектор линии пересечения t_{ij}^v плоскостей (6), содержащей векторы \vec{a}_{ij} и \vec{N}_{ij} , и β_{ij} , проходящей через точку A_{ij} и перпендикулярной \vec{N}_{ij}

$$\vec{t}_{ij}^v = \alpha_{ij} \cap \beta_{ij}, \quad (10)$$

где $\vec{a}_{ij} \in \alpha_{ij}$; $\vec{N}_{ij} \in \alpha_{ij}$; $A_{ij} \in \beta_{ij}$; $\vec{N}_{ij} \perp \beta_{ij}$.

При построении сплайна явно задать касательные можно только в начальной и конечной точках. Для того чтобы сплайн имел заданные касательные во всех точках, введем вблизи A_{ij} дополнительные точки, которые будут определять касательные (10).

Таким образом, построив сплайны, проходящие через ряды точек массива D_{ij} с фиксированным j , получим линии, проходящие через точки A_{ij} и имеющие в них касательные, перпендикулярные нормалям \vec{N}_{ij} . Обозначим построенные сплайны через n_j . Их уравнения

$$\vec{r}(u) = r_{n_j}(u, v^j). \quad (11)$$

Построим в каждой точке $D_{i'j}$ векторы нормалей $\vec{N}_{i'j}$, перпендикулярные векторам $\vec{t}_{i'j}^v$

$$\vec{t}_{i'j}^v = \frac{dr_{n_j}(v_j^{i'})}{dv}, \quad (12)$$

где $v_j^{i'}$ – параметр, соответствующий точке $D_{i'j}$ на сплайне (11).

В точках массива $D_{i'j}$, соответствующих точкам заданного массива A_{ij} , векторы $\vec{N}_{i'j}$ совпадают с векторами нормалей в этих точках, определенных по соотношениям (10). В ближайших точках (соответствующих дополнительным точкам C_{ijk}^1 и C_{ijk}^2) построим $\vec{N}_{i'j}$ таким образом, чтобы отраженные в них лучи имели минимальное отклонение от B_{ij} . Определим вектор $\vec{N}'_{i'j}$ по формуле

$$\vec{N}'_{i'j} = \frac{\vec{B}_{i'j} - \vec{D}_{i'j}}{|\vec{B}_{i'j} - \vec{D}_{i'j}|} + \frac{\vec{I} - \vec{D}_{i'j}}{|\vec{I} - \vec{D}_{i'j}|}, \quad (13)$$

где $i'' = \text{Round}\left(\frac{i' + 2k}{2k + 1}\right)$; Round – функция, округляющая значение аргумента до ближайшего целого.

Если бы вектор $\vec{N}'_{i'j}$ был нормалью в точке $D_{i'j}$, то луч, отраженный в ней, точно попадал бы в B_{ij} . Но это возможно только для точек, соответствующих A_{ij} , так как во всех остальных точках $\vec{N}'_{i'j}$ не перпендикулярен вектору касательной $\vec{t}_{i'j}^v$ (12). Поэтому построим его так, чтобы угол ψ между ним и $\vec{N}'_{i'j}$ был минимальным. Вектор $\vec{N}'_{i'j}$ определяется как направляющий вектор прямой $n_{i'j}$, которая является линией пересечения плоскостей $\gamma_{i'j}$ и $\delta_{i'j}$. Плоскость $\gamma_{i'j}$ содержит векторы $\vec{t}_{i'j}^v$ (12) и $\vec{N}'_{i'j}$ (13). Плоскость $\delta_{i'j}$ содержит точку $D_{i'j}$ и перпендикулярна вектору $\vec{t}_{i'j}^v$.

Построим векторы касательных в точках $D_{i'j}$, перпендикулярные $\vec{N}'_{i'j}$ и составляющие с векторами $\vec{b}_{i'j}$ минимальный угол:

$$\vec{b}_{i'j} = \begin{cases} \vec{D}_{i'j+1} - \vec{D}_{i'j}, & \text{если } j = 1; \\ \vec{D}_{i'j} - \vec{D}_{i'j-1}, & \text{если } j \neq 1. \end{cases}$$

где $\vec{t}_{i'j}^u$ определим аналогично тому, как определили $\vec{t}_{i'j}^v$ (10). Найдем линию пересечения плоскостей $\alpha'_{i'j}$ и $\beta'_{i'j} = t_{i'j}^u$

$$t_{i'j}^u = \alpha'_{i'j} \cap \beta'_{i'j}, \quad (14)$$

где $\vec{b}_{i'j} \in \alpha'_{i'j}$; $\vec{N}_{i'j} \in \alpha'_{i'j}$; $D_{i'j} \in \beta'_{i'j}$; $\vec{N}_{i'j} \perp \beta'_{i'j}$.

Направляющий вектор линий $t_{i'j}^u$ (14) – $\vec{t}_{i'j}^u$ является искомым вектором.

Построим сплайны, проходящие через точки $D_{i'j}$, при фиксированном значении i' и имеющие в них касательные (14). Введем вблизи $D_{i'j}$ дополнительные точки $E_{i'jk}^1$ и $E_{i'jk}^2$, $k = 1, 2, \dots, M$, радиусы-векторы которых определяются по соотношениям

$$\vec{E}_{i'jk}^1 = \vec{D}_{i'j} - \frac{\vec{t}_{i'j}^u}{|\vec{t}_{i'j}^u|} d_1 k, \quad j = 1, 2, \dots, m-1; \quad \vec{E}_{i'jk}^2 = \vec{D}_{i'j} + \frac{\vec{t}_{i'j}^u}{|\vec{t}_{i'j}^u|} d_2 k, \quad j = 2, 3, \dots, m,$$

где $d_1 = \frac{|\vec{b}_{i'j}|}{N}$; $d_2 = \frac{|\vec{b}_{i'j+1}|}{N}$.

После ввода дополнительных точек имеем массив $G_{i'j'}$, где $j' = 1, 2, \dots, 2M(m-1)+m$. Точкам массива A_{ij} соответствуют точки $G_{2M(i-1)+i, 2M(j-1)+j}$. Через точечные ряды $G_{i'j'}$, при фиксированном i' , строим сплайны $k_{i'}$, имеющие в этих точках заданные касательные (14).

Через точки массива $G_{i'j'}$, при фиксированном j' , строим сплайны $l_{j'}$. Сплайновым методом строим поверхность, используя в качестве исходных данных сеть $k_{i'}$, $l_{j'}$ (рис. 4).

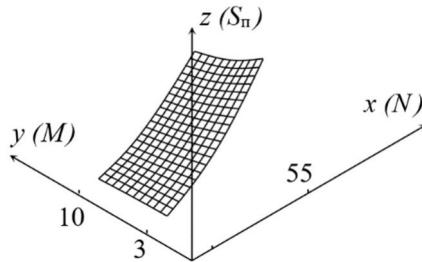


Рисунок 4. Полученная поверхность экрана

Для определения оптимальных параметров создается сплайновая поверхность в трехмерном пространстве описанным выше способом. Координате x соответствует параметр N , y – параметр M , z – полезная площадь $S_{\text{п}}$. Затем определяется локальный максимум координаты z (т. е. полезной площади $S_{\text{п}}$). Рассматриваются значения z на границах области и в точках экстремума в заданной области. Для определения точек экстремума определим частные производные z по x и y . Известно

$$\begin{cases} z_u = z_x x_u + z_y y_u; \\ z_v = z_x x_v + z_y y_v, \end{cases} \quad (15)$$

где для краткости обозначим $\frac{\partial z}{\partial u} = z_u$, $\frac{\partial z}{\partial v} = z_v$, $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u$, $\frac{\partial x}{\partial v} = x_v$, $\frac{\partial y}{\partial u} = y_u$, $\frac{\partial y}{\partial v} = y_v$.

Из системы (15) имеем

$$\begin{cases} z_x = \frac{z_v x_u - z_u x_v}{x_u y_v - x_v y_u}; \\ z_y = \frac{z_u y_v - z_v y_u}{x_u y_v - x_v y_u}. \end{cases} \quad (16)$$

Для определения необходимого условия экстремума в точках области приравниваем уравнения системы (16) к 0:

$$\begin{cases} z_v x_u - z_u x_v = 0; \\ z_u y_v - z_v y_u = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Решив систему (17), получим точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума. Из найденных точек определяем ту, которая имеет максимальное значение координаты z . На рисунке 5 приведен пример, где эта поверхность не имеет локальных максимумов, поэтому максимальное значение принимает на границе области, которую легко определить визуально.

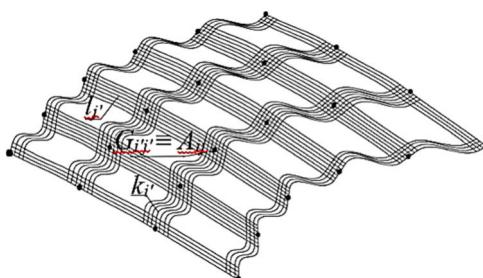


Рисунок 5. Оптимизация поверхности

Результаты экспериментов

Проведен численный эксперимент расчета акустических параметров проектируемого помещения с использованием отражающих экранов, созданных на основе предложенной геометрической модели. Для расчета акустических параметров помещений применялось специализированное программное обеспечение моделирования и анализа акустики помещений *Catt-acoustic*. Результаты расчетов приведены на рисунке 6 в виде цветовых диаграмм. Средние значения звукового давления равны без отражающего экрана 78,283714 дБ, с экраном – 82,206857 дБ.

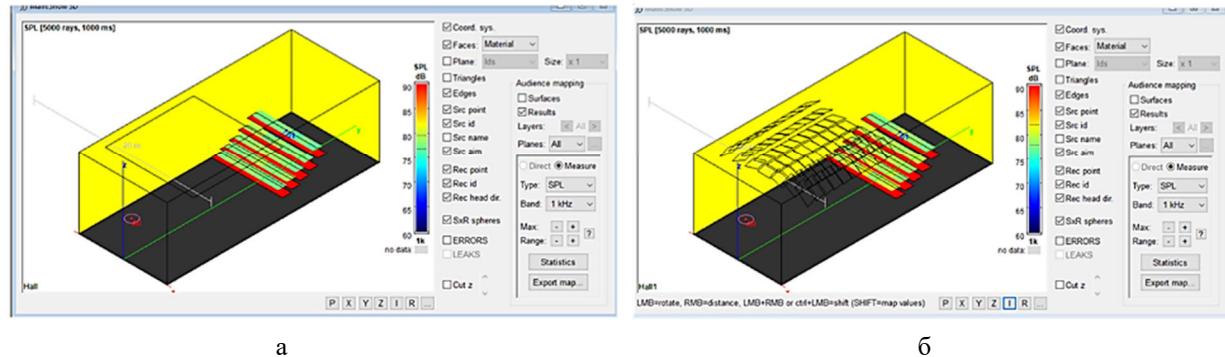


Рисунок 6. Цветовые диаграммы распределения звукового давления: *а* – без отражающего экрана; *б* – с экраном

Эхограммы первых отражений в одной из точек поверхности зрителей приведены на рисунке 7. На рисунке 7*а* показана эхограмма без применения отражающего экрана, а на рисунке 7*б* – с отражающим экраном.

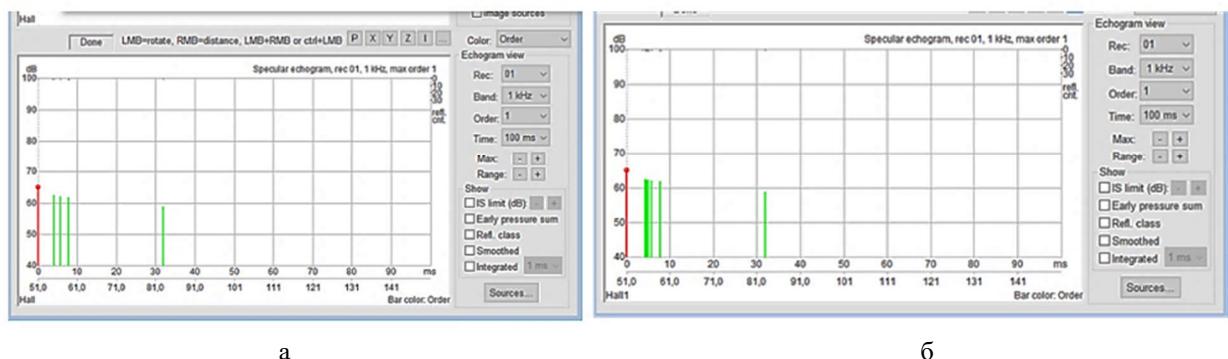


Рисунок 7. Эхограммы первых отражений (– прямые лучи, – отраженные лучи)

Обсуждение результатов

Проведенные исследования показывают, что введение отражающего экрана увеличивает среднее звуковое давление на зону поверхности зрителей за счет первых мало запаздывающих отражений на 5 % (см. рис. 6*б*).

Выводы и заключение

По проделанной работе можно сделать следующие выводы:

1. Разработана геометрическая модель создания поверхностей экранов, отражающих звук точечного источника на заданную поверхность. Применение разработанной модели позволит значительно ускорить проектирование помещений с улучшенными акустическими параметрами на этапе эскизного проектирования. Разработанные модели могут быть использованы как для создания отражающих экранов, так и для разработки поверхностей ограждающих конструкций помещений.

2. Разработан пакет программ для автоматизированного проектирования отражающих экранов. Программы, входящие в разработанный пакет, могут быть использованы как самостоятельно при проектировании помещений, так и в составе автоматизированных систем архитектурно-строительного проектирования.

3. Разработана методика оптимизации поверхности отражающих экранов для повышения их эффективности при изменении задаваемых основных геометрических параметров, основанная на расчёте эффективной площади отражающих экранов. Эта методика позволяют оценить основные акустические параметры помещения при различных вариантах архитектурных решений и выбрать наилучший из них. Исследованы виды поверхностей экранов, их эффективность, при изменении задаваемых основных геометрических параметров. Результаты данного исследования позволяют проектировщику более быстро определить параметры создаваемой поверхности экрана, для получения большей эффективности.

4. Исследована эффективность предложенной модели при проектировании помещений с учетом акустических свойств. Исследования производились путем проведения численного эксперимента с использованием специализированного программного обеспечения *Catt-acoustic* для моделирования и анализа акустики помещений, которые показали увеличение величины среднего звукового давления на поверхность зрителей на 5 и более процентов.

Научный руководитель Приходько Виктор Маркович, заведующий кафедрой «Начертательная геометрия и графика», Ростовский государственный университет путей сообщения.

Список литературы

1. Помпеи А., Сумбатян М. А., Тодоров Н. Ф. Компьютерные модели в акустике помещений // Акустический журнал. 2009. Т. 55, №6. С. 760–771.
2. Абзалилова С. А., Дмитриев В. Л. История развития акустики // Современные научные исследования и инновации. 2019. № 1. URL: <https://web.sciencedirect.com/science/article/pii/S1068263819300012> (дата обращения: 08.12.2024).
3. Лейзер И. Г. О применении методов геометрической акустики для расчета отражений звука от плоских поверхностей // Акустический журнал. 1966. Т. XII, вып. 2. С. 206–212.
4. Котов И. И. Алгоритмы конструирования каркасных поверхностей. М.: МАИ, 1975. 63 с.
5. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М: Мир, 1972. 319 с.