УДК 515:145
DOI: 10.25686/978-5-8158-2474-4-2025-920-929

Развитие теории αβ-триангуляции в трехмерном евклидовом пространстве

В. В. Рустамян
МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

Аннотация. Исследование расширяет теорию αβ-триангуляции в трёхмерном евклидовом пространстве. Автор выделяет характерные особенности трёхмерного случая, такие как наличие замкнутых дискретных поверхностей и необходимость уточнения существующих определений и свойств. Проводится анализ минимальных конфигураций замкнутых αβ-триангуляций, примером которых служит треугольный диэдр. Анализ позволяет выявить критическое отношение приблизительно 16,67 % между количеством α- и β-граней, что имеет практическое значение. Предложен эффективный механизм рекомбинации β-рёбер в трёхмерном пространстве, позволяющий сохранять целостность триангуляции при работе с поверхностями свободной формы. Потенциальные направления будущих исследований включают расширение предложенного подхода на поверхности рода выше 0, увеличивая область его применения. Данная работа вносит существенный вклад в развитие вычислительной геометрии, архитектурного проектирования и цифровой обработки поверхностей.

***Ключевые слова*:** оптимальная триангуляция, αβ-триангуляция, свойства αβ-триангуляции, поверхности свободной формы, дискретные поверхности

Development of the theory of αβ-triangulation in three-dimensional Euclidean space

V. V. Rustamyan
MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

Abstract. This study expands the theory of αβ-triangulation into three-dimensional Euclidean space. The author identifies characteristic features of the three-dimensional case, such as the presence of closed discrete surfaces and the need to refine existing definitions and properties. Analysis of minimal configurations of closed αβ-triangulations, exemplified by the triangular dihedron, allows revealing a critical ratio of approximately 16.67 % between the number of α- and β-faces, which holds practical relevance. An efficient mechanism for recombination of β-edges in three-dimensional space is proposed, ensuring the integrity of the triangulation when handling free-form surfaces. Future research directions include extending the approach to higher-genus surfaces, thereby broadening its application scope. This work makes a valuable contribution to the development of computational geometry, architectural design, and digital surface processing.

***Keywords*:** optimal triangulation, αβ-triangulation, properties of αβ-triangulation, free-form surfaces, discrete surfaces

Введение

Одной из задач генеративного проектирования [1, 2] в архитектуре является задача аппроксимации поверхностей с использованием дискретных классов эквивалентных элементов. Основной стратегией является разработка методов, позволяющих аппроксимировать заданную поверхность небольшим набором плиточных элементов (n-угольников), что позволяет минимизировать количество уникальных компонентов и снизить затраты на производство строительных конструкций. В терминах дискретной дифференциальной геометрии [3] оптимизации подлежат дискретные поверхности – аналоги (если точнее, то «дискретные аналоги», по А.И. Бобенко) аналитических или поверхностей свободных форм. Работы ведутся над дискретными поверхностями с плиточными элементами разной природы. Одним из распространенных типов плиток является четырехугольник. Дискретные поверхности, образованные четырёхугольниками, принято называть сетями [1]. Одни публикации [4-8] посвящены оптимизации по признаку конгруэнтности сетей. Другие публикации касаются гексагональных плиток [9] и дискретных поверхностей со смешенными типами плиток [10, 11]. Значительное внимание уделяют исследованию методов оптимизации триангуляций [12-16]. Несмотря на различия подходов в исследованиях, существует общая логика: сначала определяются объекты исследования, затем проводится их предварительная обработка, после чего применяются соответствующие методы оптимизации.

В рамках решения задачи аппроксимации замкнутых поверхностей свободной формы полиэдрами с группами конгруэнтных граней была создана программа компьютерного геометрического моделирования [17]. Объект исследования – замкнутая поверхность свободной формы, заданная в виде

stl-файла с высоким числом граней. Предварительная обработка – получение триангуляции с нужным числом граней из заданной. Для оптимизации триангуляции применялся генетический алгоритм. В программе используется кандидатное решение (хромосома, индивид) в виде вектора с координатами всех вершин, разбитый на аллели по трем координатам каждой вершины. Для получения первого индивида используется алгоритм локального упрощения триангуляции [18, 19] с помощью коллапса по наименьшему ребру и с ограничениями валентностей вершин от 4 до 7. В процессе оптимизации производится перемещение вершин триангуляции полиэдра пока не будет найдено частичное или в идеальном случае полное решение. Полным считается решение, в котором отсутствуют одиночные по признаку конгруэнтности треугольники. При этом не ставилось задачи ограничения численности групп. Например, если триангуляция содержит 256 граней, то обнаружение триангуляции со 128-ю парами конгруэнтных треугольников считается полным решением [20].

Такой подход имеет три основных недостатка: первый – слишком широкое поисковое пространство, так как первое поколение индивидов не содержит в себе ни одной пары конгруэнтных граней с точностью до случайного совпадения; второй – отсутствие ориентира в виде эталонного треугольника или группы эталонных треугольников; третий и наиболее существенный недостаток – статичность структуры триангуляции первого индивида. Если триангуляцию рассматривать как граф, то под статичностью структуры подразумевается отсутствие возможности изменения валентностей вершин. Это ограничивает поисковое пространство задачи оптимизации в качественном направлении. Так как возможно возникновение ситуации невозможности полного решения при определенной структуры первого индивида [21].

В публикации [22] выдвинута гипотеза о том, что до совершения оптимизационных действий над триангуляцией, телом которого является заявленный полиэдр, возможно задать для любой триангуляции одну или несколько групп конгруэнтных треугольников без потери подвижности математической модели для механизмов оптимизации. В связи с этим была создана математическая модель «αβ-триангуляция». Определены αβ-триангуляция в пространстве E^2, операции сшивки и разреза и описан алгоритм образования αβ-триангуляции из произвольной плоской триангуляции. По сути своей αβ-триангуляция является оптимальной триангуляцией с ограничениями по критерию минимизации суммы длин ребер.

В данной статье определяются αβ-триангуляция и ее свойства в пространстве E^3. Рассматриваются примеры αβ-триангуляции для триангуляций известных полиэдров, гомеоморфных сфере. Определяется механизм рекомбинации β-ребер в пространстве E^3.

Постановка задачи

В данном исследовании ставились следующие цели:

1) определить αβ-триангуляцию в пространстве E^3;
2) рассмотреть свойства αβ-триангуляции;
3) определить механизм рекомбинации β-ребер.

Теория

1. αβ-триангуляция в пространстве E^3

Определение. Сильно связную триангуляцию K размерности 2 в пространстве E^3, в которой возможно выделить некоторое множество граней, их замыкания обозначить α-треугольниками и дополнение к ним до K – β-элементами, назовем αβ-триангуляцией ($T_{\alpha\beta}$), если она удовлетворяет условиям:

1) тела α-треугольников не имеют общих точек;
2) триангуляция K содержит только вершины остовов α-треугольников;
3) сумма длин β-ребер минимальна.

Комплексом в данной статье будем называть триангуляции и всевозможные их подмножества. Телом комплекса будем называть точечное множество данного пространства, являющееся соединением всех элементов комплекса [23, с. 99].

Все свойства $T_{\alpha\beta}$ [22] работают и в трехмерном евклидовом пространстве. Основным отличием от плоской триангуляции является существование замкнутых дискретных поверхностей. В связи с этим дополним некоторые свойства. Нумерация свойств будет соблюдаться как в источнике.

«***Свойство 6.*** *Минимальной αβ-триангуляцией является α-треугольник*» [22].

Рассмотрим замкнутые дискретные сферические поверхности. На рисунке 1в показана триангуляция первого тела Платона – тетраэдра, в которой выделен α-треугольник. Оставшаяся противоположная вершина не входит в остов ни одного треугольника не имеющего общих вершин с α-треугольником. Из определения ясно, что тетраэдр не может быть αβ-триангуляцией. Замкнутой αβ-триангуляцией с двумя α-треугольниками будет являться триангуляция октаэдра. На рисунке 1б можно наблюдать две выделенные грани – α-треугольники. Шесть оставшихся граней являются β-гранями.

Минимальной замкнутой αβ-триангуляцией является триангуляция, которая содержит 3 вершины, 3 ребра и 2 грани (треугольный диэдр). Одна из граней будет α-гранью, другая β-гранью. На рисунке 1а представлена сферическая мозаика [24, 25] треугольного диэдра.

Свойство 6.1. Минимальной замкнутой αβ-триангуляцией является треугольный диэдр.

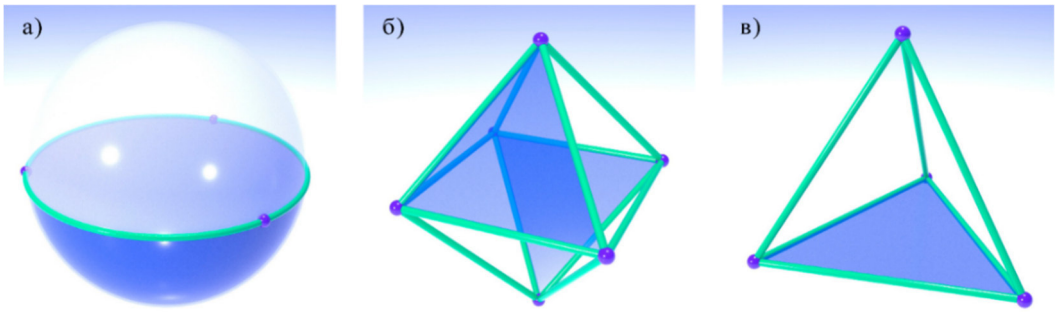


Рис. 1. Представление в виде сферической мозаики треугольного диэдра (αβ-триангуляции с одним α-треугольником) (*а*); αβ-триангуляция с двумя α-треугольниками и 6-ю β-треугольниками (*б*); триангуляция тетраэдра с выделенным α-треугольником, которая не является αβ-триангуляцией (*в*)

«***Свойство 7.*** *Число β-граней в αβ-триангуляции находится на отрезке* $\{b \in \mathbb{N}: 2(a-1) \le b \le 5(a-1)\}$, $a = |K_\alpha^2|$ *– число α-граней,* $b = |K_\beta^2|$ *– число β-граней*» [22].

Рассмотрим замкнутые дискретные поверхности рода 0 [23, с. 139]. На рисунке 2а приведен максимальный планарный граф замкнутой αβ-триангуляции, где $a = 2$. Видно, что граф гомеоморфен октаэдру (рис. 1б). При этом к числу β-граней незамкнутой поверхности добавится одна грань $AB'C'$. Если к комплексу без последней грани добавить α-треугольник $A''B''C''$ (рис. 2б), то образуется комплекс, в котором добавится еще 5 β-граней и $AB'C'$ заменится на $A''B''C'$. По индукции легко определяется число β-граней для триангуляций рода 0.

Свойство 7.1. $b = 5(a-1)+1$, где b – число β-граней в замкнутой αβ-триангуляции рода 0.

Свойство 7.1 подтверждает свойство 6.1, при $a = 1$, $b = 1$.

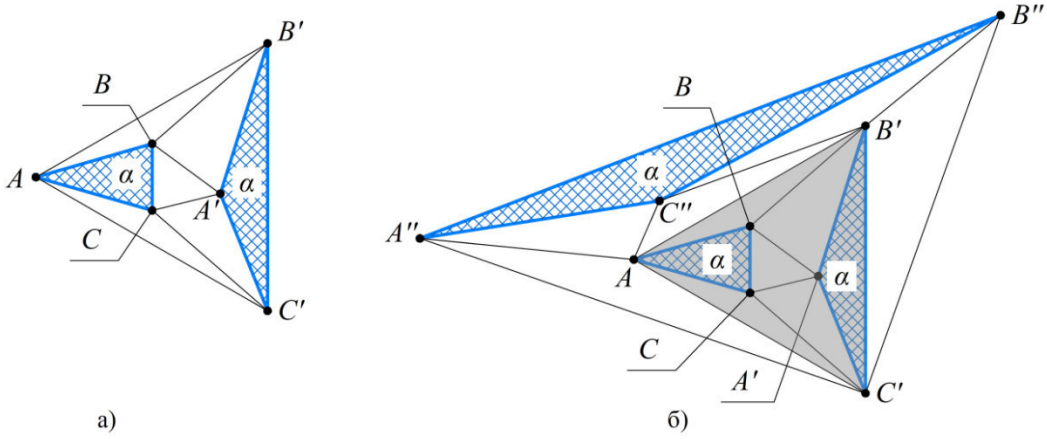


Рис. 2. Число β-граней замкнутой αβ-триангуляции

*«**Свойство 9.** αβ-триангуляция с $a = 3$ является минимальной из комплексов, границы которых – непрерывная последовательность β-отрезков, тогда и только тогда, когда хотя бы один из трех α-треугольников неправильный»* [22].

Свойство 9 в трехмерном евклидовом пространстве останется неизменным по числу α-треугольников и справедливо для любых треугольников.

Свойство 9.1. αβ-триангуляция с $a = 3$ является минимальной из комплексов, границы которых – непрерывная последовательность β-отрезков.

Общий алгоритм образования αβ-триангуляций из произвольной незамкнутой триангуляции представлен в статье [22]. Приведем пример образования αβ-триангуляций на основе триангуляции куба. Рассмотрим произвольную триангуляцию куба (рис. 3). В такой триангуляции возможно выделить два α-треугольника и независимо от их расположения останутся две свободные вершины. Мысль о добавлении еще одной вершины для того, чтобы перевести триангуляцию в αβ-триангуляцию, является естественной (свойство 1 [22]), но куда именно добавить вершину и каков механизм добавления, не является очевидным. И что делать при одной свободной вершине? Потому каждую свободную вершину и ее звезду [23 с. 101] стоит рассматривать отдельно. Есть два способа реконструирования звезд вершин: первый – применить метод коллапса вершины, который приведет к понижению числа граней на 2; второй – применить метод порождения грани. Если механизм порождения грани будет обратен механизму коллапса грани, то замыкание порождаемой грани будет являться α-треугольником. Число граней триангуляции увеличивается на 4. Тем самым для триангуляции куба есть три возможных исхода. Коллапс двух вершин приведет к αβ-триангуляции с двумя α-треугольниками (рис. 4а), что комбинаторно эквивалентно триангуляции октаэдра с точностью до рекомбинации β-ребер (рис. 1б). Коллапс одной вершины и порождение грани для второй вершины приведет к αβ-триангуляции с тремя α-треугольниками (рис. 4б). Например, такая триангуляция эквивалентна триангуляции без добавления вершин трехскатного купала (одно из тел Джонсона) и графу на рисунке 2б. Порождение грани для обоих вершин приведет к αβ-триангуляции с четырьмя α-треугольниками (рис. 4в), что эквивалентно αβ-триангуляции икосаэдра.

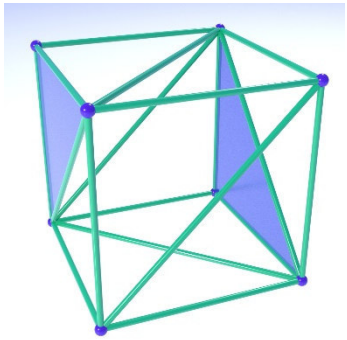


Рисунок 3. Произвольная триангуляция куба

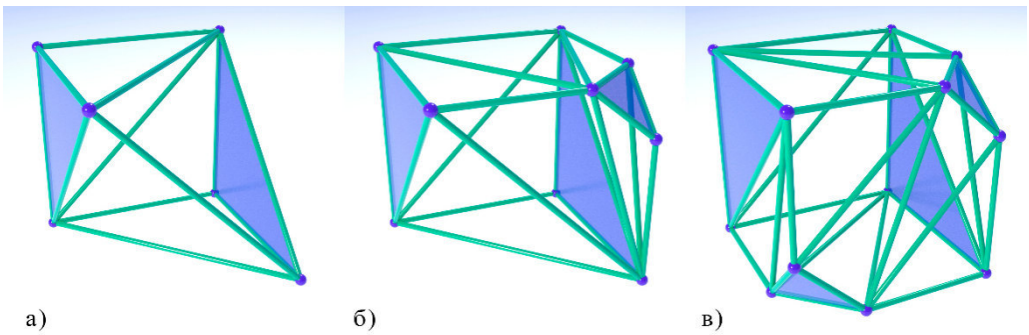
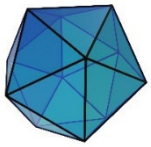
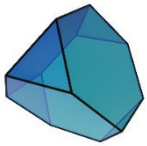
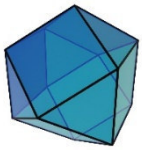
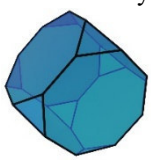
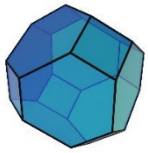


Рисунок 4. Реконструкция триангуляции куба

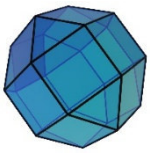
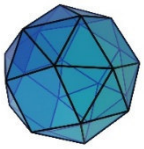
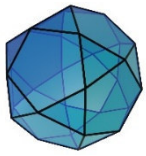
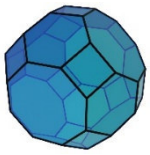
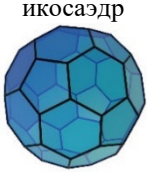
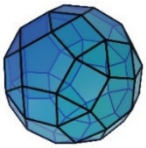
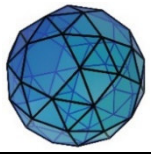
При реконструкции триангуляции с одной свободной вершиной, очевидно, может быть только два результата. Например, в случае триангуляции тетраэдра (рис. 1в) может получиться или αβ-триангуляция с одним α-треугольником (рис. 1а), или αβ-триангуляции с двумя α-треугольниками (рис. 1б). Если придерживаться рекомендациям из общего алгоритма [22] образования αβ-триангуляции, то в случае с тетраэдром образуется минимальная $T_{\alpha\beta}$ (рис. 1а), в случае куба – $T_{\alpha\beta}$ на рисунке 4б.

Опираясь на свойство 7.1 и свойство 1 [22], составим таблицу αβ-триангуляций известных полиэдров (табл. 1). Выполним расчет средней степени вершин и процента содержания α-граней в триангуляции. Шифр граней полиэдра показывает количество многоугольников, содержащихся в полиэдре. Например, $12^4 8^6 6^8$ – в усеченном кубооктаэдре 12 треугольников, 8 шестиугольников, 6 восьмиугольников. Количество граней триангуляции $|T^2|$ – показатель количества треугольников после триангуляции полиэдра без добавления вершин. Такими же показателями являются количество ребер $|T^1|$ и вершин $|T^0|$ триангуляции. Можно заметить, что для разных полиэдров с одинаковым числом вершин все показатели одинаковы. Эти триангуляции на самом деле отличаются распределением степеней вершин. Но в следствии свойства 1 [22] все триангуляции с одним показателем $|T^0|$ комбинаторно эквивалентны с точностью до рекомбинации β-ребер. Средняя степень вершин рассчитывается как удвоенное число ребер, поделенное на число вершин триангуляции. Содержание α-граней рассчитывается как соотношение α-граней к общему числу граней триангуляции.

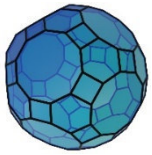
Таблица 1. **Параметры αβ-триангуляций известных полиэдров**

№	Наименование полиэдра	Шифр граней полиэдра	Кол-во граней тр-ции $\lvert T^2\rvert$	Кол-во ребер тр-ции $\lvert T^1\rvert$	Кол-во вершин тр-ции $\lvert T^0\rvert = \lvert T^0_\alpha\rvert$	Кол-во α-граней $\lvert T^2_\alpha\rvert$	Средняя степень вершин $2\lvert T^1\rvert / \lvert T^0\rvert$	Содержание α-граней в тр-ции $\lvert T^2_\alpha\rvert / \lvert T^2\rvert$, %
1	Октаэдр 	8^3	8	12	6	2	4	25%
2	Икосаэдр 	20^3	20	30	12	4	5	20%
	Усеченный тетраэдр 	$4^3 4^6$						
	Кубооктаэдр 	$8^3 6^4$						
3	Усеченный куб 	$8^3 6^8$	44	66	24	8	5,5	18,18%
	Усеченный октаэдр 	$6^4 8^6$						

Продолжение таблицы 1

№	Наименование полиэдра	Шифр граней полиэдра	Кол-во граней тр-ции $\lvert T^2\rvert$	Кол-во ребер тр-ции $\lvert T^1\rvert$	Кол-во вершин тр-ции $\lvert T^0\rvert = \lvert T^0_\alpha\rvert$	Кол-во α-граней $\lvert T^2_\alpha\rvert$	Средняя степень вершин $2\lvert T^1\rvert / \lvert T^0\rvert$	Содержание α-граней в тр-ции $\lvert T^2_\alpha\rvert / \lvert T^2\rvert$, %
	Ромбокубо-октаэдр 	$8^3 18^4$						
	Курносый куб 	$32^3 6^4$						
4	Икосододекаэдр 	$20^3 12^5$	56	84	30	10	5,6	17,86%
5	Усеченный кубооктаэдр 	$12^4 8^6 6^8$	92	138	48	16	5,75	17,39%
6	Усеченный додекаэдр 	$20^3 12^{10}$	116	174	60	20	5,8	17,24%
	Усеченный икосаэдр 	$12^5 20^6$						
	Ромбоикосо-додекаэдр 	$20^3 30^4 12^5$						
	Курносый додекаэдр 	$80^3 12^5$						

Окончание таблицы 1

№	Наименование полиэдра	Шифр граней полиэдра	Кол-во граней тр-ции $\lvert T^2\rvert$	Кол-во ребер тр-ции $\lvert T^1\rvert$	Кол-во вершин тр-ции $\lvert T^0\rvert = \lvert T^0_\alpha\rvert$	Кол-во α-граней $\lvert T^2_\alpha\rvert$	Средняя степень вершин $2\lvert T^1\rvert / \lvert T^0\rvert$	Содержание α-граней в тр-ции $\lvert T^2_\alpha\rvert / \lvert T^2\rvert$, %
7	Ромбоусеченный икосододекаэдр 	$30^4 20^6 12^{10}$	236	354	120	40	5,9	16,95%

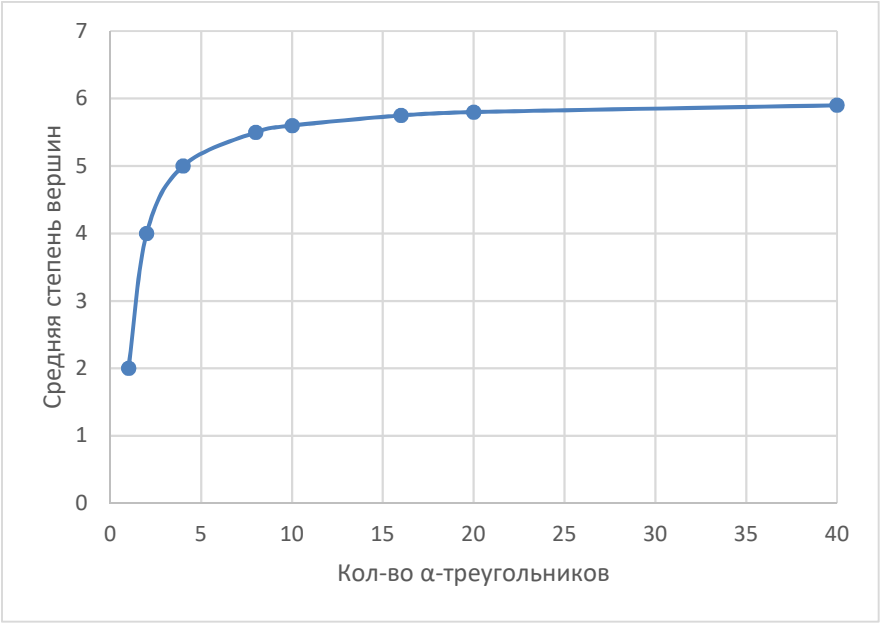


Рисунок 5. График зависимости показателя $2\lvert T^1\rvert / \lvert T^0\rvert$ от количества α-треугольников

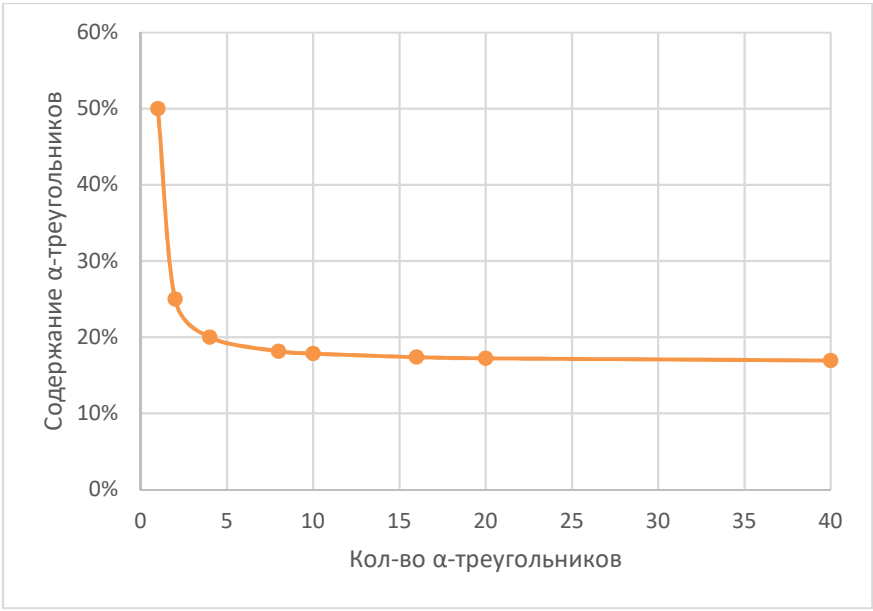


Рисунок 6. График зависимости показателя $\lvert T^2_\alpha\rvert / \lvert T^2\rvert$ от количества α-треугольников

К показателям таблицы 1 добавим показатели αβ-триангуляции с одним α-треугольником (рис. 1а) и построим графики зависимости показателя $2|T^1|/|T^0|$ (рис. 5) и показателя $|T_\alpha^2|/|T^2|$ (рис. 6) от количества α-треугольников. Из графиков видно, что при увеличении числа α-треугольников показатели асимптотически стремятся к определенным значениям. Так как данными триангуляциями мы аппроксимируем сферу, то бесконечное увеличение α-треугольников в пределе приведет к триангуляции плоскости. На плоскости регулярной является триангуляция со степенью вершин равной 6 (рис. 7). При этом α-треугольники также располагаются регулярно. Если разбить триангуляцию плоскости на равные множества, то окажется, что на каждый α-треугольник приходится 5 β-граней. Это означает, что показатель $|T_\alpha^2|/|T^2|$ равен 1/6, то есть 16,67 %. Средняя степень вершин $2|T^1|/|T^0| = 6$.

Рисунок 7. Регулярная триангуляция плоскости

2. Рекомбинация β-ребер $T_{\alpha\beta}$ в E^3

В отличие от плоской триангуляции, где требуется проверка пересечений β-ребер с α-треугольниками, для осуществления третьего условия определения рекомбинация β-ребер в пространстве E^3 теоретически не имеет ограничений. Это следует из особенностей дискретных поверхностей в общем случае. Например, поверхность способна иметь самопересечения. Если многообразие поверхностей свободной формы ограничить, например рассматривать гладкие поверхности без самопересечений, тогда потребуется вводить условия проверки на самопересечения.

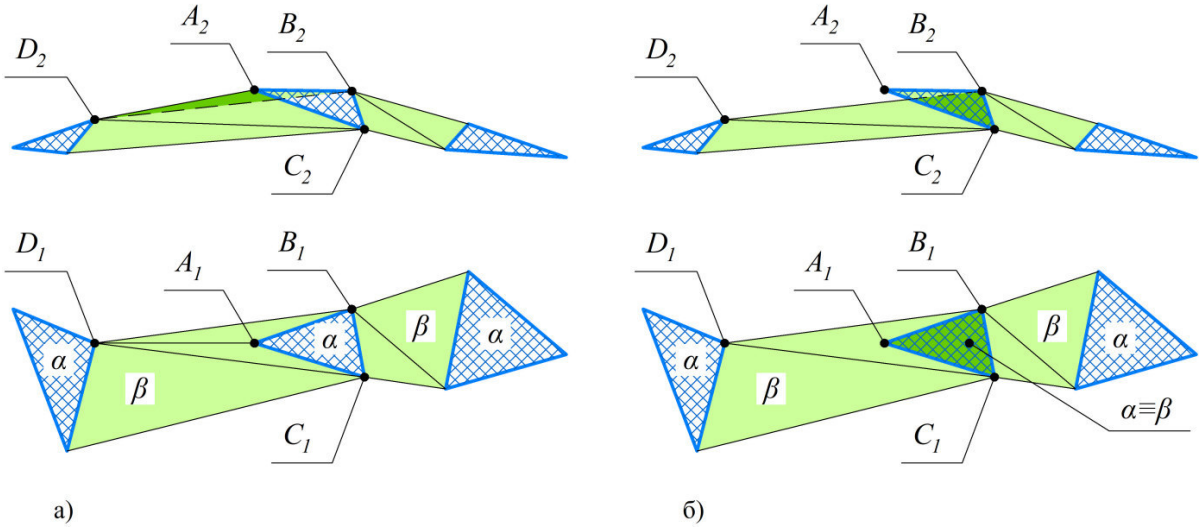


Рисунок 8. Рекомбинация β-ребер

Рассмотрим пример (рис. 8), где возникает самопересечение. На рисунке 8а приведен фрагмент αβ-триангуляции, где в четырехугольнике $ABDC$ диагонали AD и BC являются конкурентными по длине. Диагональ BC оказывается короче AD, вследствие чего происходит рекомбинация (flip). На рисунке 8б показан результат такой рекомбинации. Видно, что из треугольников DBA и DAC образовались

треугольники DBC и ABC. При этом в треугольнике ABC совпадают две грани – α и β. Образуется эдакий «карман» BAC. Дискретная поверхность с такими элементами не может аппроксимировать гладкую поверхность. Соответственно, при создании алгоритма рекомбинации в пространстве E^3 потребуется ввести ограничение на создание β-ребра, если оно совпало с α-ребром.

Выводы

Определено, что свойства математической модели «αβ-триангуляция» в пространстве E^2 выполнимы и в пространстве E^3. Триангуляции в трехмерном пространстве способны быть замкнутыми, в связи с чем дополнены некоторые свойства. Механизм образования $T_{\alpha\beta}$ из произвольной триангуляции и операции разреза и сшивки останутся неизменными.

Установлены предельные случаи замкнутой αβ-триангуляции: с одним α-треугольником объект, показанный на рисунке 1а; с бесконечным числом α-треугольников – на рисунке 7. Эмпирически выявлено соотношение числа α-граней к β-граням, равное 16,67 %. Это свидетельствует о том, что при решении задачи аппроксимации замкнутых поверхностей свободной формы полиэдрами с группами конгруэнтных граней посредством αβ-триангуляции возможно задать, как минимум, полученный процент α-треугольников конгруэнтными или группами конгруэнтных. Так как α-треугольники напрямую независимы друг от друга, то эта математическая модель обеспечивает отсутствие потери подвижности триангуляции для механизмов оптимизации.

Интересным к дальнейшему изучению представляется обобщение свойства 7.1 для αβ-триангуляций рода, отличного от 0.

Таким образом, исследование позволило развить теорию αβ-триангуляции в трёхмерном пространстве, установить важную пропорцию между α- и β-гранями, предложить эффективные механизмы рекомбинации β-ребер и определить направление дальнейших работ.

Список литературы

1. Бешшар А. А., Клименко П. Я. Сравнение методов вычислительного проектирования в архитектуре // Молодой исследователь Дона. 2022. № 3(36). С. 31-36.

2. Акшов Э. А. Использование вычислительного проектирования и искусственного интеллекта при моделировании архитектурных объектов // Архитектура и современные информационные технологии. 2023. № 2(63). С. 298-315. DOI: 10.24412/1998-4839-2023-2-298-315.

3. Бобенко А. И., Сурис Ю. Б. Дискретная дифференциальная геометрия. Интегрируемая структура / пер. с англ. В. Э. Адлера. М.: Ижевск: Ин-т компьютерных исслед, 2010. 488 с. ISBN 978-5-93972-798-3.

4. K-set tilable surfaces / Fu C. W., Lai C. F., He Y., Cohen-Or D. // ACM Transactions on Graphics. 2010. Vol. 29, no. 4. P. 1-6. DOI: https://doi.org/10.1145/1778765.1778781.

5. Jimenez M., Müller C., Pottmann H. Discretizations of Surfaces with Constant Ratio of Principal Curvatures // Discrete & Computational Geometry. 2020. Vol. 63, no. 3. P. 670-704. DOI: 10.1007/s00454-019-00098-7.

6. Architectural freeform surfaces designed for cost-effective paneling through mold re-use / Pellis D., Kilian M., Wang H., et al. // Advances in Architectural Geometry. 2020. P. 2-16.

7. Tsiliakos M. Fast Geometry Optimizations for Architectural Workflows: A Case Study on the Computational Geometry of High-Rises // ACADIA 2024: Designing Change-Proceedings for the 2024 Association for Computer Aided Design in Architecture Conference. 2024. Vol. 1. P. 635-644.

8. Free-form Surface Approximation Using Rotational Patches / Liu Y., Xie Y. M., Lee T. U., et al. // ACM Transactions on Graphics. 2025. Vol. 44, no. 5. P. 1-14. DOI: 10.1145/3744707

9. Freeform honeycomb structures / Jiang C., Wang J., Wallner J., Pottmann H. // Computer Graphics Forum. 2014. Vol. 33, no. 5. P. 185-194.

10. Masonry shell structures with discrete equivalence classes / Chen R., Qiu P., Song P., et al. // ACM Transactions on Graphics. 2023. Vol. 42, no. 4. P. 1-12. DOI: 10.1145/3592095

11. Reducing the Number of Different Faces in Free-Form Surface Approximations Through Clustering and Optimization / Liu Y., Lee T.-U., Rezaee J. A., et al. // Computer-Aided Design. 2023. Vol. 166. P. 103633. DOI 10.1016/j.cad.2023.103633.

12. Singh M., Schaefer S. Triangle Surfaces with Discrete Equivalence Classes // ACM Transactions on Graphics. 2010. Vol. 29. DOI: 10.1145/1833351.1778783.

13. Lee T. U., Liu Y., Xie Y. M. Planar-thick panels and 3D-printed gap fillers: A hybrid digital fabrication approach to curved surface approximations // Composite Structures. 2024. Vol. 331. P. 117875. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2024.117875.

14. Bi M., Liu Y., Xie Y. M. Clustering and optimisation of nodes, beams and panels for cost-effective fabrication of free-form surfaces // Proceedings of IASS Annual Symposia / International Association for Shell and Spatial Structures (IASS). 2023. No. 19. P. 1-12. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.117912.

15. Design and optimisation of grid shells for maximising both structural performance and panel similarity / Zhong Y., Liu Y., Lu H., et al. // Engineering Structures. 2025. Vol. 329. P. 119820. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.119820.

16. Modeling and fabrication with specified discrete equivalence classes / Liu Z., Zhang Z., Zhang D., et al. // ACM Transactions on Graphics. 2021. Vol. 40, no. 4. P. 1-12. https://doi.org/10.1145/3450626.3459843.

17. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024612472 Российская Федерация. Программа создания триангулированных полиэдров, грани которых группируются по свойству конгруэнтности треугольников, аппроксимирующих замкнутые не самопересекающиеся поверхности свободной формы с помощью генетического алгоритма: № 2023685692: заявл. 24.11.2023: опубл. 01.02.2024 / В. В. Рустамян.

18. Скворцов А. В., Мирза Н. С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. Томск: Изд-во Томского университета, 2006. 168 с. ISBN 5-7511-2028-0.

19. Лебединская Н. А., Лебединский Д. М. Преобразование триангуляций при помощи элементарных операций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 1. С. 84-86.

20. Рустамян В. В. Анализ основных параметров генетического алгоритма при решении задачи аппроксимации замкнутых поверхностей свободной формы полиэдрами с группами конгруэнтных треугольников // Геометрия и графика. 2024. Т. 12, № 2. С. 13-25. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-12-3-13-25.

21. Рустамян В. В. Анализ топологии полиэдров в задаче аппроксимации замкнутых поверхностей полиэдрами с группами конгруэнтных граней // GraphiCon 2024: материалы 34-й Международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению, Омск, 17–19 сентября 2024 года. Омск: Омский государственный технический университет. 2024. С. 827-836. DOI: 10.25206/978-5-8149-3873-2-2024-827-836.

22. Рустамян В. В. αβ-триангуляция на евклидовой плоскости // Геометрия и графика. 2025. Т. 13, № 1. С. 15-25. DOI: 10.12737/2308-4898-2025-13-1-15-25.

23. Александров П. С. Комбинаторная топология. 2-е изд. М.: Ленанд, 2020. 664 с. ISBN 978-5-9710-7311-6.

24. Sarhangi R. An introduction to medieval spherical geometry for artists and artisans // Bridges London: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture. 2006. P. 551-560.

25. Sarhangi R. Illustrating Abu al-Wafā'Būzjānī: Flat Images, Spherical Constructions // Iranian Studies. 2008. Vol. 41, no. 4. P. 511-523.