

Гладкие преобразования *B*-сплайнов

С. Н. Ганчук

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ) – федеральное государственное унитарное предприятие Государственной корпорации по атомной энергии «Росатом», г. Саров, Россия

Аннотация. *B*-сплайны являются одним из основных геометрических объектов современных CAD-систем. Различные преобразования *B*-сплайнов широко применяются при построении практически каждого геометрического объекта. В работе рассматриваются вопросы гладкого сопряжения *B*-сплайнов на примере двух задач. Первая задача – гладкое сопряжение двух сплайнов произвольной степени, при этом под «гладким сопряжением» понимается выполнение в точке сопряжения условий непрерывности производных всех порядков, вплоть до порядка ($p - 1$), где « p » – степень исходных сплайнов. После гладкого сопряжения два сплайна без погрешности заменяются одним сплайном, определенным на меньшем числе контрольных точек. Вторая задача – понижение степени *B*-сплайна, одним из шагов которой является гладкое сопряжение. Решение задач гладкого сопряжения сводится к оптимизационной задаче при наличии ограничений, которая решается методом неопределенных множителей Лагранжа.

Ключевые слова: *B*-сплайн, система автоматизированного проектирования, гладкое сопряжение.

Smooth B-spline transformations

S. N. Ganchuk

Russian Federal Nuclear Center - All-Russian Research Institute of Experimental Physics (RFNC- VNIIEPh) – Federal State Unitary Enterprise of the State Atomic Energy Corporation “Rosatom”, Sarov, Russian Federation

Abstract. B-splines are one of the main geometric objects of modern CAD systems. Various transformations of B-splines are widely used in the construction of almost every geometric object. The paper considers the issues of smooth conjugation of B-splines using two problems as an example. The first problem is a smooth conjugation of two splines of an arbitrary degree, where "smooth conjugation" is understood as fulfillment of the conditions of continuity of derivatives of all orders at the conjugation point, up to the order ($p - 1$), where " p " is the degree of the original splines. After the smooth conjugation, the two splines are replaced without an error by one spline defined with the smaller number of control points. The second problem is the reducing of the degree of the B-spline, one of the steps of which is smooth conjugation. The solution of smooth conjugation problems is reduced to an optimization problem in the presence of constraints, which is solved by the method of undetermined Lagrange multipliers.

Keywords: B-spline, computer-aided design system, smooth conjugation.

Введение

Сложность современных изделий машиностроения такова, что их проектирование невозможно без использования CAD-систем, в которых одной из основных функциональных операций является сопряжение *B*-сплайнов с заданным порядком непрерывности при наложении дополнительных ограничений на аппроксимирующую линию и понижение степени *B*-сплайнов.

Сопряжение *B*-сплайнов с заданным порядком гладкости с математической точки зрения является довольно сложной задачей [1], и, к примеру, в ставших к настоящему времени классическими монографиях [2, 3] вопросы сопряжения не рассматриваются. Разнообразным вопросам сопряжения линий и поверхностей с невысоким порядком гладкости (вплоть до второго) в отечественной и иностранной научной литературе уделяется достаточное внимание. При этом вопросы сопряжения *B*-сплайнов рассматриваются в небольшом количестве работ и в них изучаются сплайны 3-й степени и без дополнительных ограничений, что делает задачу гладкого сопряжения *B*-сплайнов с дополнительными ограничениями актуальной. Кроме этого, замена без погрешности нескольких сопряженных между собой сплайнов одним сплайном весьма востребована, так как позволяет представить насколько геометрических объектов одним.

Задача понижения степени *B*-сплайна является как самостоятельной, так и развитием задачи аппроксимации NURBS-кривой *B*-сплайном. На практике при работе геометрического ядра современных CAD-систем при некоторых преобразованиях появляются сплайны очень высоких степеней (например, 12-й степени). Естественно, возникает задача понизить степень этих сплайнов

и проконтролировать точность отклонения от исходной кривой. Таким образом, задача понижения степени сплайнов с контролем точности, также является актуальной.

Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается постановка задачи для сопряжения B -сплайнов, у которых в реальной части узлового вектора отсутствуют кратные узлы.

Заданы два B -сплайна степени p $P(u)$ и $Q(v)$ (если степени сплайнов не совпадают, то у сплайна меньшей степени увеличивается степень до p , используя процедуру, описанную в [2], которая не приводит к искажению сплайна):

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,p}(u), \quad u_p \leq u \leq u_{n+1}, \quad (1)$$

$$Q(v) = \sum_{j=0}^m Q_j N_{j,p}(v), \quad v_p \leq v \leq v_{m+1}, \quad (2)$$

где $P_i, Q_j, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ – заданные контрольные точки для сплайнов $P(u)$ и $Q(v)$ соответственно; u, v – параметрические переменные, определенные на узловых векторах U и V соответственно.

$$U = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_n, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p+1}, \quad (3)$$

$$V = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1}, v_{p+1}, \dots, v_m, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p+1}. \quad (4)$$

Потребуем, чтобы для B -сплайнов (1) и (2) выполнялось условие $n, m > p$ (при $n = m = p$ получаем кривые Безье, для которых полностью гладкое сопряжение рассмотрено ниже). Так как единая терминология для узловых векторов в современной научной литературе отсутствует (см. примеры различных терминологий в монографиях [2–4]), станем использовать терминологию классической монографии [2]. Тогда узловой вектор вида (3) и (4) будем называть *Clamping* (зажатый) узловой вектор.

Сформируем *Clamping* (зажатый) узловой вектор T :

$$T = \{u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1} = v'_p, v'_{p+1}, \dots, v'_{m+p+1}\}, \quad (5)$$

где $u_i, i = \overline{0, (n+1)}$ – соответствующие элементы узлового вектора (3) сплайна (1); $v'_i = f(v_i)$, $i = \overline{p, (m+p+1)}$; f – линейная функция; $v_i, i = \overline{p, (m+p+1)}$ – соответствующие элементы узлового вектора (4) сплайна (2).

Функция f имеет вид

$$v'_i = v_{i+p-n-1} + u_{n+1}, \quad i = \overline{p, (m+p+1)}. \quad (6)$$

Вектор (5) представляет собой объединение векторов (3), (4), при этом от вектора (3) отбрасываем последние p кратных узлов, от вектора (4) отбрасываем первые $(p+1)$ кратные узлы и к оставшимся узлам вектора (4) применяем преобразование (6).

Для программной реализации узловой вектор (5) удобнее представить в следующем виде:

$$T = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+m+2}\}, \quad (7)$$

$$\text{где } t_i = \begin{cases} u_i, & i = \overline{0, (n+1)}, \\ v_{i+p-n-1} + u_{n+1}, & i = \overline{(n+1), (n+m+2)}. \end{cases}$$

Определим сплайны (1), (2) как один составной сплайн $\bar{R}(t)$, определенный на узловом векторе (7):

$$\bar{R}(t) = \begin{cases} P(w), & t_p \leq w \leq t_{n+1}, \\ Q(f^{-1}(w)), & t_{n+1} \leq w \leq t_{n+m+2-p}. \end{cases} \quad (8)$$

Сплайн (8) в точках $P(t_{n+1})$ и $Q(f^{-1}(t_{n+1}))$ в общем случае не обладает непрерывностью.

Необходимо выполнить полностью гладкое сопряжение сплайнов (1) и (2), то есть определить контрольные точки $R_i, i = \overline{0, (n+m-p+1)}$ для аппроксимирующего сплайна $R(t)$ степени p :

$$R(t) = \sum_{i=0}^{n+m-p+1} R_i N_{i,p}(t), \quad t_p \leq t \leq t_{n+m-p+2}, \quad (9)$$

где t – параметрическая переменная, определенная на узловом векторе (7).

Сплайн (9) должен минимизировать метрику $d(R, \bar{R})$ между сплайнами (9) и (8), которую примем в виде дискретной коэффициентной нормы, минимизирующую отклонение контрольных точек $\hat{P}_i, \hat{Q}_j, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ от исходных $P_i, Q_j, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$:

$$d(R, \bar{R}) = O(\varepsilon_i, \delta_j) = \left(\sum_{i=0}^n \|\varepsilon_i\|^2 + \sum_{j=0}^m \|\delta_j\|^2 \right) \rightarrow \min. \quad (10)$$

Нахождение аппроксимирующего сплайна $R(t)$ будем выполнять в два этапа.

Этап 1. Выполняется полностью гладкое сопряжение сплайнов (1) и (2), для чего рассчитываются новые контрольные точки $\hat{P}_i, \hat{Q}_j, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$, которые используются для построения новых сопряженных B -сплайнов $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$. При этом узловые вектора исходных и сопряженных сплайнов не изменяются и соответствуют (3) и (4). Сплайны $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ должны удовлетворять условиям гладкого сопряжения

$$\hat{P}^{(r)}(u)|_{u=1} = \hat{Q}^{(r)}(v)|_{v=0}, \quad r = \overline{0, (p-1)}, \quad (11)$$

где r – порядок производной.

Этап 2. Преобразование без погрешности (абсолютно точно) сопряженных сплайнов $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ в один аппроксимирующий B -сплайн $R(t)$ (9), который определен на узловом векторе (7), для чего необходимо выполнить расчет контрольных точек $R_i, i = \overline{0, (n+m-p+1)}$.

Кроме ограничений (11) на B -сплайны $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ (и соответственно на $R(t)$) могут быть наложены дополнительные ограничения:

1) полного совпадения с одним из исходных B -сплайнов:

$$\hat{P}(u) = P(u), \quad u_p \leq u \leq u_{n+1}, \quad (12)$$

или

$$\hat{Q}(v) = Q(v), \quad v_p \leq v \leq v_{m+1}; \quad (13)$$

2) сопряженные B -сплайны $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ должны проходить через точки, заданные на исходных сплайнах, с сохранением значений производных в этих точках:

$$\hat{P}^{(r1)}(u)|_{u=u_{kp}} = P^{(r1)}(u)|_{u=u_{kp}}, \quad kp = \overline{0, l}, \quad r1 = \overline{0, rp}, \quad (14)$$

$$\hat{Q}^{(r2)}(v)|_{v=v_{kq}} = Q^{(r2)}(v)|_{v=v_{kq}}, \quad kq = \overline{0, m}, \quad r2 = \overline{0, rq}, \quad (15)$$

где $(l+1), (m+1)$ – количество точек, в которых заданы ограничения.

Таким образом, задача полностью гладкого сопряжения B -сплайнов (1), (2) состоит в оптимизационной задаче (10), при ограничениях (11), кроме этого, могут присутствовать дополнительные ограничения (12), (13) и (14), (15).

Используемый метод

Оптимизационную задачу (10) при ограничениях (11) будем решать методом неопределенных множителей Лагранжа [5]. Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \sum_{i=n-p+1}^n \|\varepsilon_i\|^2 + \sum_{j=0}^{p-1} \|\delta_j\|^2 + \\ + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r \left[\sum_{i=0}^r (P_{n-i} + \varepsilon_{n-i}) N_{n-i,p}^{(r)}(1) - \sum_{j=0}^r (Q_j + \delta_j) N_{j,p}^{(r)}(0) \right]. \quad (16)$$

Вычисляя частные производные функции (16) по $\varepsilon_{n-i}, \delta_j$ и $\lambda_r, i, j, r = \overline{0, (p-1)}$ и приравнивая их к нулю, получаем систему из $3p$ линейных уравнений относительно неизвестных $\varepsilon_{n-i}, \delta_j$ и $\lambda_r, i, j, r = \overline{0, (p-1)}$.

Дополнительные ограничения (12) или (13) тривиальны, они выполняются исключением из оптимизационной задачи соответствующих переменных (ε_{n-i} для (12) и δ_j для (13)). Ограничения (14) и (15) добавляются к оптимизационной задаче по аналогии с ограничениями (11), как это выполнено в [5].

Переход к аппроксимирующему сплайну $R(t)$

Преобразование двух полностью сопряженных B -сплайнов $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ в один B -сплайн $R(t)$ той же степени p производится без какой-либо погрешности с помощью расчета новых контрольных точек R_k , $k = \overline{0, (n+m-p+1)}$ и нового узлового вектора для этого сплайна:

$$T = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, t_{p+1}, \dots, t_{n+m-p+1}, \underbrace{t_{n+m-p+2}, \dots, t_{n+m-p+2}}_{p+1} \right\}. \quad (17)$$

Отметим, что B -сплайны $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ после гладкого сопряжения определены на *Clamping* (зажатых) узловых векторах.

Введем следующие обозначения: $\hat{P}_{_UnClR}$, $\hat{Q}_{_UnClL}$ – сплайны, полностью совпадающие со сплайнами $\hat{P}(u)$, $\hat{Q}(v)$ соответственно, при этом сплайн $\hat{P}_{_UnClR}$ (в соответствии с принятой терминологией) определен на *UnClamping_Rigth* (не зажатом справа) узловом векторе, сплайн $\hat{Q}_{_UnClL}$ определен на *UnClamping_Left* (не зажатом слева) узловом векторе.

Переход от *Clamping* (зажатого) узлового вектора к не зажатым справа или слева векторам выполняется по следующим соотношениям:

$$u_{n+i+2} = u_{n+i+1} + (u_{p+i+1} - u_{p+i}), \quad i = \overline{0, (p-1)}, \quad (18)$$

$$u_{p-i-1} = u_{p-i} + (u_{n-i+1} - u_{n-i}), \quad i = \overline{0, (p-1)}. \quad (19)$$

По (18) переходим к *UnClamping_Rigth* (не зажатый справа), по (19) – к *UnClamping_Left* (не зажатый слева).

Для «объединения» *UnClamping_Rigth* (не зажатый справа) вектора с *UnClamping_Left* (не зажатый слева) в один *Clamping* (зажатый) узловой вектор вида (17) необходимо воспользоваться процедурой (7).

Преобразование сплайнов \hat{P} , \hat{Q} в $\hat{P}_{_UnClR}$, $\hat{Q}_{_UnClL}$ соответственно выполняется с помощью следующих равенств:

$$\hat{P}_{_UnClR}(u)^{(r)}|_{u=1} = \hat{P}(u)^{(r)}|_{u=1}, \quad r = \overline{0, (p-2)}, \quad (20)$$

$$\hat{Q}_{_UnClL}(v)^{(r)}|_{v=0} = \hat{Q}(v)^{(r)}|_{v=0}, \quad r = \overline{0, (p-2)}. \quad (21)$$

В развернутом виде условия (20), (21) имеют вид

$$\sum_{i=0}^p \hat{P}_{_UnClR, n-i} N_{UnCl, n-i, p}^{(r)}(1) = \sum_{i=0}^p \hat{P}_{Cl, n-i} N_{Cl, n-i, p}^{(r)}(1), \quad r = \overline{0, (p-2)}, \quad (22)$$

$$\sum_{j=0}^p \hat{Q}_{_UnClL, j} N_{UnCl, j, p}^{(r)}(0) = \sum_{j=0}^p \hat{Q}_{Cl, j} N_{Cl, j, p}^{(r)}(0), \quad r = \overline{0, (p-2)}. \quad (23)$$

Система линейных уравнений (22) решается относительно $\hat{P}_{_UnClR, n-i}$, $i = \overline{0, (p-2)}$, система (23) – относительно $\hat{Q}_{_UnClL, j}$, $j = \overline{0, (p-2)}$. Остальные контрольные точки сплайнов $\hat{P}_{_UnClR}$, $\hat{Q}_{_UnClL}$ совпадают с соответствующими контрольными точками сплайнов $\hat{P}_{_Cl}$, $\hat{Q}_{_Cl}$.

В точке сопряжения сплайнов $\hat{P}_{_UnClR}$, $\hat{Q}_{_UnClL}$ совпадают производные вплоть до порядка $(p-1)$, поэтому контрольные точки $\hat{P}_{_UnClR, n-i}$, $i = \overline{0, p}$ совпадают с контрольными точками $\hat{Q}_{_UnClL, j}$, $j = \overline{0, p}$.

Объединив контрольные точки $\hat{P}_{_UnClR, i}$, $i = \overline{0, n}$ и $\hat{Q}_{_UnClL, j}$, $j = \overline{0, m}$, получаем контрольные точки R_i , $i = \overline{0, (n+m-p+1)}$ аппроксимирующего сплайна $R(t)$.

Результаты и их обсуждение

На рисунке 1, *а* представлены исходные и сопряженные B -сплайны степени $p = 3$ ($n = m = 4$).

Исходные сплайны имеют узловые векторы:

$$U = V = \{0; 0; 0; 0; 0.5; 1; 1; 1; 1\}.$$

На рисунке 1, *б*, *в* представлены результаты преобразования сплайнов $\hat{P}(u)$, $\hat{Q}(v)$ в сплайны $\hat{P}_{_UnClR}(u)$ и $\hat{Q}_{_UnClL}(v)$ с узловыми векторами:

$$U_{UnClR} = \{0; 0; 0; 0; 0.5; 1; 1.5; 2; 2.5\},$$

$$V_{UnClL} = \{-1.5; -1; -0.5; 0; 0.5; 1; 1; 1; 1\}.$$

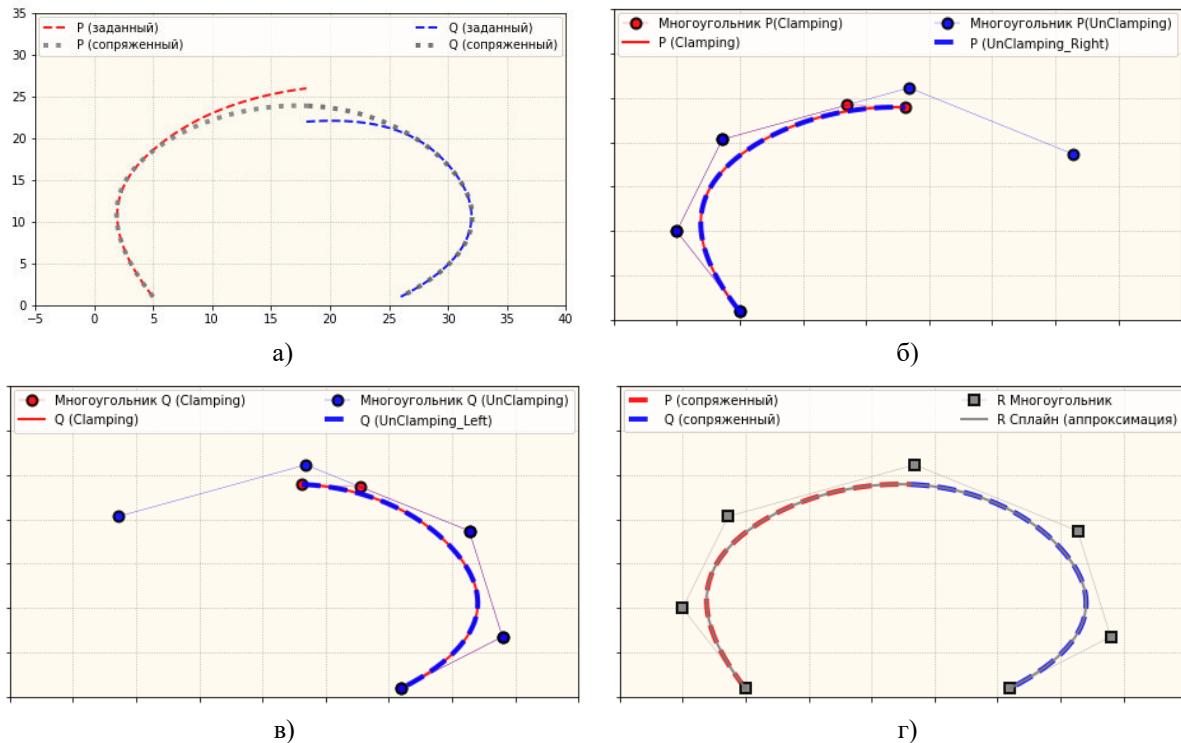


Рисунок 1. Сопряжение сплайнов: *а* – исходные B -сплайны $P(u)$, $Q(v)$ и сопряженные $\hat{P}(u)$, $\hat{Q}(v)$;
б – сплайн $\hat{P}\text{-}_\text{UnClR}(u)$; *в* – сплайн $\hat{Q}\text{-}_\text{UnCLL}(v)$; *г* – «объединение» сплайнов $\hat{P}\text{-}_\text{UnClR}(u)$ и $\hat{Q}\text{-}_\text{UnCLL}(v)$ в аппроксимирующий сплайн $R(t)$

Из рисунка 1, *б*, *в* видно, что последние три контрольные точки сплайна $\hat{P}\text{-}_\text{UnClR}(u)$ совпадают с первыми тремя контрольными точками сплайна $\hat{Q}\text{-}_\text{UnCLL}(v)$. На рисунке 1, *г* иллюстрируется «объединение» сплайнов $\hat{P}\text{-}_\text{UnClR}(u)$ и $\hat{Q}\text{-}_\text{UnCLL}(v)$ в аппроксимирующий сплайн $R(t)$ с узловым вектором

$$T = \{0; 0; 0; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2; 2\}.$$

На рисунке 2 приводятся результаты сопряжения при последовательном добавлении следующих дополнительных ограничений для точки $u_0 = 0,75$:

$$\hat{P}(u_0) = P(u_0), \quad (25)$$

$$\hat{P}^{(1)}(u_0) = P^{(1)}(u_0), \quad (26)$$

$$\hat{P}^{(2)}(u_0) = P^{(2)}(u_0). \quad (27)$$

Дополнительное ограничение (25) соответствует прохождению аппроксимирующего сплайна $R(t)$ через точку u_0 сплайна $P(u)$. Совместные ограничения (25) и (26) соответствуют требованию прохождения $R(t)$ через точку $P(u_0)$ с сохранением первой производной. Ограничения (25)-(27) устанавливают требования прохождения через точку $P(u_0)$ с сохранением первой и второй производных.

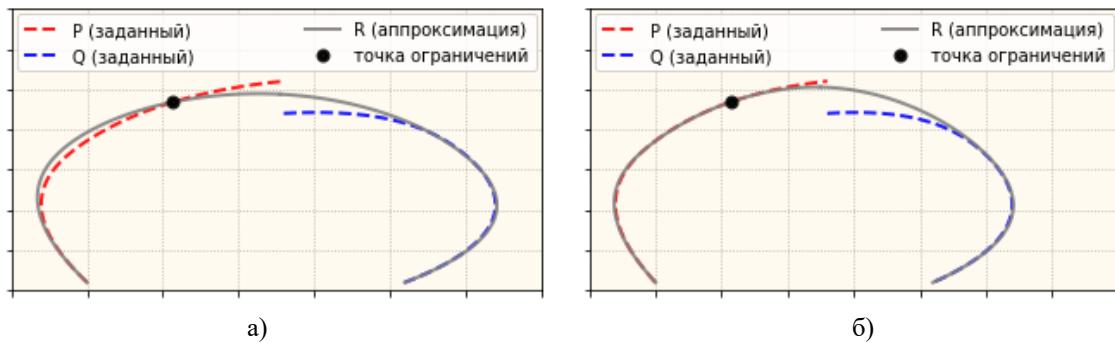
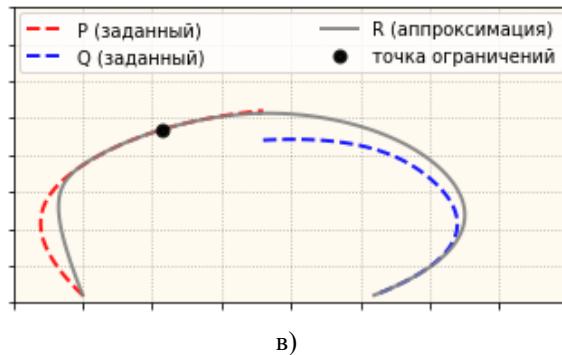


Рисунок 2. Сопряжение с дополнительными ограничениями: *а* – ограничение (25) – прохождение через точку, *б* – ограничения (25)-(26) – прохождение через точку с сохранением 1-й производной



в)

Рисунок 2. Сопряжение с дополнительными ограничениями: в – ограничения (25)-(27) – прохождение через точку с сохранением 1-й и 2-й производных

Понижение степени B-сплайна

Задан сплайн $C_0(t)$ степени p_0 :

$$C_0(t) = \sum_{i=0}^{n_0} P_{0i} N_{i,p_0}(t),$$

где $(n_0 + 1)$ – количество контрольных точек сплайна $C_0(t)$.

Необходимо аппроксимировать сплайн (28) сплайном $C_1(t)$ степени p_1 , где $p_1 < p_0$:

$$C_1(t) = \sum_{i=0}^{n_1} P_{1i} N_{i,1}(t),$$

где $(n_1 + 1) \leq (n_0 + 1)$ – количество контрольных точек сплайна $C_1(t)$.

Алгоритм включает в себя последовательность четырех следующих вычислительных процедур.

1. Представление сплайна $C_0(t)$ как набора сопряженных кривых Безье

Для выполнения этой процедуры в узловом векторе сплайна $C_0(t)$ все внутренние узлы (узлы в реальной части вектора) делаются кратными степени сплайна p_0 . Это выполняется с помощью процедуры вставки дополнительных узлов в узловой вектор [2]. Пример представления сплайна как набора сопряженных кривых Безье методом вставки кратных узлов праведен на рисунке 3.

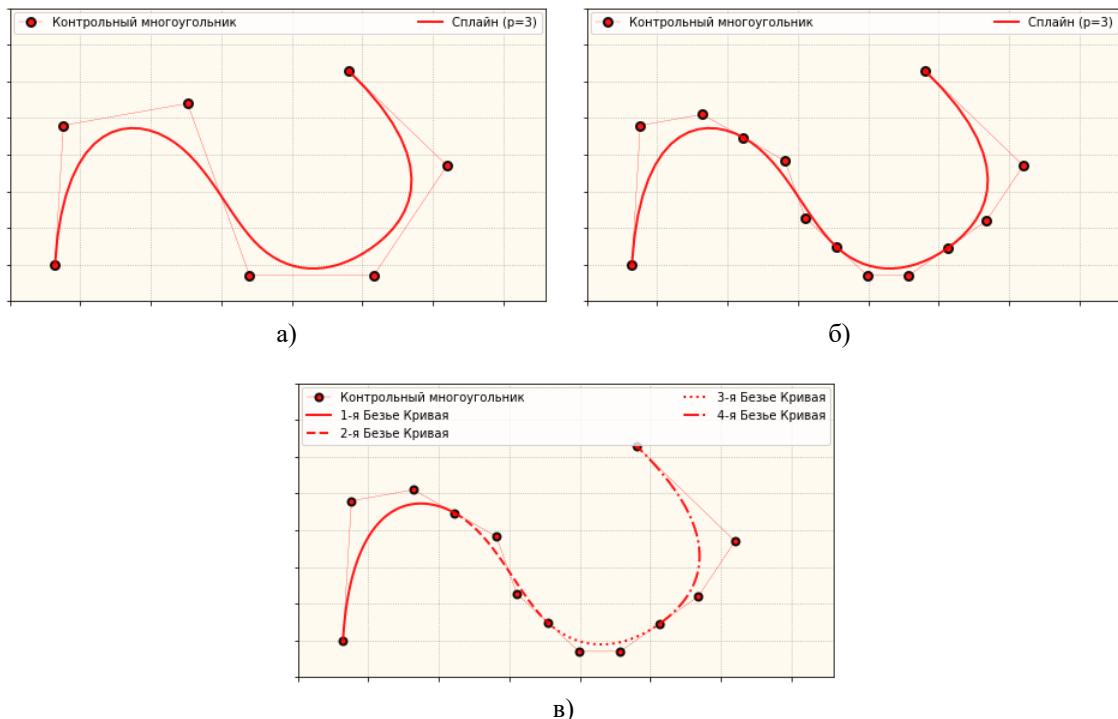


Рисунок 3. Представления сплайна как набора сопряженных кривых Безье: а – исходный сплайн 3-й степени, узловый вектор $U = (0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1)$; б – сплайн после вставки кратных узлов, $U = (0,0,0,0,0.25,0.25,0.25,0.5,0.5,0.5,0.75,0.75,0.75,1,1,1,1)$; в – 4 кривых Безье 3-й степени

2. Понижение степени кривой Безье

Запишем исходную кривую Безье степени p в виде B -сплайна:

$$C(t) = \sum_{i=0}^p P_i N_{i,p}(t), \quad (28)$$

где $P_i, i = \overline{0, p}$ – контрольные точки.

Запишем кривую Безье степени $(p-1)$:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{p-1} F_i N_{i,p-1}(t), \quad (29)$$

где $F_i, i = \overline{0, (p-1)}$ – контрольные точки.

Рассмотрим интегральную метрику разности кривых (28) и (29) и минимизируем эту метрику по контрольным точкам кривой $F(t)$:

$$J(F_0, \dots, F_{p-1}) = \int_0^1 (C(t) - F(t))^2 dt \rightarrow \min_{F_0, \dots, F_{p-1}}. \quad (30)$$

Дополним оптимизационную задачу (30) четырьмя ограничениями:

$$F(t|_{t=0}) = C(t|_{t=0}), \quad (31)$$

$$F^{(1)}(t|_{t=0}) = C^{(1)}(t|_{t=0}), \quad (32)$$

$$F(t|_{t=1}) = C(t|_{t=1}), \quad (33)$$

$$F^{(1)}(t|_{t=1}) = C^{(1)}(t|_{t=1}). \quad (34)$$

Ограничения (31), (32) задают неизменность начальной точки и производной в этой точке. Ограничения (33), (34) – аналогичные ограничения для конечной точки. Оптимизационная задача (30) при ограничениях (31)-(32) решается методом неопределенных множителей Лагранжа, который подробно описан в работе [5].

Пример понижения степени различных кривых Безье алгоритмом (30)-(34) приведен на рисунке 4.

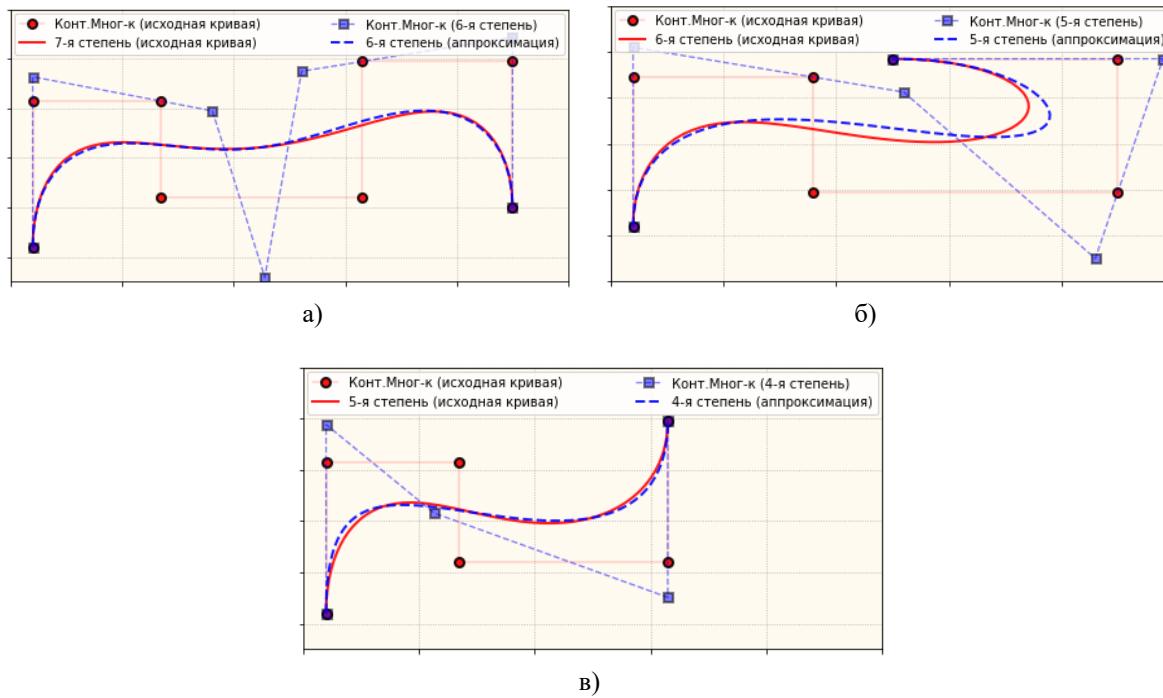


Рисунок 4. Понижение степени кривых Безье: *а* – понижение с 7-й до 6-й степени; *б* – понижение с 6-й до 5-й степени; *в* – понижение с 5-й до 4-й степени

Следует отметить, что результат работы нашего алгоритма довольно близок к результатам алгоритма понижения степени кривых Безье, приведённого в [120].

3. Гладкое сопряжение кривых Безье

На предыдущем шаге алгоритма (шаг 2 «Понижение степени кривой Безье») кривые Безье сопряжены между собой с порядком C^1 . На текущем шаге кривые Безье сопрягаются с порядком

гладкости, равным степени кривых, для чего используется алгоритм (программный модуль), приведенный в работе [5].

4. Расчет метрик

Рассчитываются метрики Хаусдорфа, кривизны и квадратичной разности между исходным сплайном и полученным после шага 3 сплайном (этот сплайн представляет собой набор гладко сопряжённых кривых Безье).

На рисунке 5, *а* приведен результат работы алгоритма по понижению степени с 24-й до 12-й. На рисунке 5, *б* показано возрастание метрики Хаусдорфа по мере понижения степени кривой, приведенной на рисунке 5, *а*. На рисунке 5, *б* представлены метрики для предлагаемого алгоритма и алгоритма, основанного на интегральной норме (то есть минимизации функционала (30)).

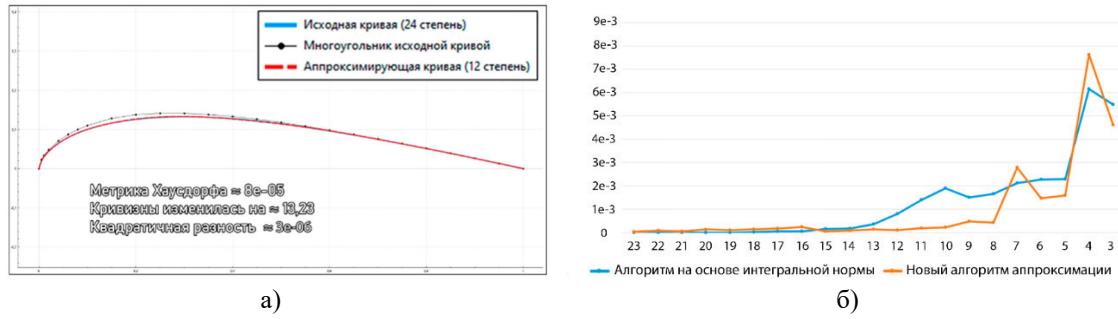


Рисунок 5. Результат работы алгоритма

Выводы

1. Решена задача гладкого сопряжения двух сплайнов произвольной степени, при этом под «гладким сопряжением» понимается выполнение в точке сопряжения условий непрерывности производных всех порядков, вплоть до порядка $(p - 1)$, где « p » – степень исходных сплайнов.
2. Решена задача замены без погрешности двух гладко сопряженных сплайнов, определенных на меньшем числе контрольных точек.
3. Решена задача понижения степени B -сплайна, одним из шагов которой является гладкое сопряжение.
4. Решение задач гладкого сопряжения сводится к оптимизационной задаче при наличии ограничений, которая решается методом неопределенных множителей Лагранжа.

Список литературы

1. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2002. 472 с. ISBN 5-94052-048-0.
2. Piegl L., Tiller W. The NURBS book. 2 ed. Springer, 1997. 646 p. ISBN 978-3-540-61545-3.
3. Rogers D. F. An introduction to NURBS: with historical perspective. Elsevier, 2001. 324p. ISBN 1-55860-669-6.
4. Salomon D. Curves and Surfaces for Computer Graphics. Springer, 2006. 461 p. ISBN 0-387-24196-5.
5. Апроксимация сопряжения кривых Безье с сохранением порядка гладкости и дополнительными ограничениями / С. Н. Ганчук, О. В. Кривошеев, С. В. Маврин [и др.] // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2024. Т. 24, № 1. С. 59-69. DOI: 10.14529/build240108.