

УДК 004.514

DOI: 10.25686/978-5-8158-2474-4-2025-344-352

## О неевклидовой визуализации многомерных функций

А. К. Алексеев<sup>1</sup>, А. Е. Бондарев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>РКК Энергия им. С.П. Королева, Королев, Россия

<sup>2</sup>ИПМ им М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

**Аннотация.** Рассмотрены проблемы, связанные с визуализацией данных в многомерном пространстве. В качестве одного из вариантов обсуждено использование Риманова пространства переменной кривизны для моделирования пространства визуализации. Рассмотрено использование уравнений Гильберта-Эйнштейна, Уинслоу, Бельтрами для моделирования геометрией пространства визуализации и пространства восприятия. Применение уравнений Бельтрами позволяет в некоторой степени нивелировать проблемы, связанные с визуализацией многомерной функции. Использование уравнений Гильберта-Эйнштейна осложняется как неясностью трактования априорной информации, так и техническими трудностями. Наиболее перспективным представляется использование уравнений типа Уинслоу, соответствующих построению гармонических координат для уравнений Гильберта-Эйнштейна.

**Ключевые слова:** многомерное пространство, визуализация, Риманово пространство, уравнение Бельтрами, уравнения Уинслоу, уравнения Гильберта-Эйнштейна.

## On a nonequclidean visualization of the multidimensional functions

A. K. Alekseev<sup>1</sup>, A. E. Bondarev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> RSC Energia, Korolev, Russia

<sup>2</sup> Keldysh Institute of Applied mathematics of RAS, Moscow, Russia

**Abstract.** The problems of the data visualization in multidimensional spaces are addressed. The application of the Riemann space of variable curvature for the visualization space is discussed. The Hilbert-Einstein, Winslow and Beltrami equations are considered for the visualization and perception spaces. The Beltrami system enables to reduce the problems related with the visualization of multidimensional spaces. The application of the Hilbert-Einstein equations is complicated both the technical problems and problems with treating the a priori information. The application of the Winslow equations, which corresponds to the harmonic coordinates for the Hilbert-Einstein equations is most perspective.

**Keywords:** multidimensional space, visualization, Riemann space, Beltrami system, Winslow equations, Hilbert - Einstein equations.

### Введение

Работа с многомерными данными представляет собой один из наиболее интересных и перспективных разделов научной визуализации. В частности, к ним относится визуальный анализ многомерных функций, таких как плотность распределения вероятности в уравнении Больцмана, многопараметрическое решение уравнений Навье-Стокса, волновая функция в конфигурационном пространстве при решении многочастичных задач квантовой механики и многие другие.

Однако визуализация многомерных функций (даже в случае скалярной функции  $f(x), x \in R^d$ ) при  $d \geq 6$  затруднена как техническими проблемами (необходимые память и быстродействие катастрофически растут при увеличении размерности задачи («проклятие размерности»)), так и геометрическими проблемами, связанными с отличием свойств многомерных пространств от стандартного для нас двух- и трехмерных пространств [1]. В первую очередь, к ним относится эффект концентрации меры, при которой большая часть объема сосредотачивается около поверхности тела. Объем объектов характерного размера  $l \in [0,1]$  (по одной координате) в  $d$ -мерном пространстве изменяется как  $\sim l^d$ . Это влияет как на представление известных функций (особенно в виде двумерных сечений), так и на аппроксимацию неизвестных многомерных функций (при поиске их особенностей, максимумов, минимумов и т.д.).

Многомерные данные обычно задаются на некотором множестве точек пространства, которое соответствует не регулярной многомерной сетке, а некоторому ансамблю точек (с много меньшим числом узлов). Распространенным подходом к визуализации и анализу многомерных данных является понижение размерности и переход к двух- и трехмерным объектам [2]. Понижение размерности можно

выполнить как интуитивным выбором наиболее важных переменных, так и более формальным путем, например, используя анализ основных компонент. Также часто используется набор сечений плоскостями вдоль некоторого пути [3,4], это позволяет находить и визуализировать некоторые особенности данных, например, дыры. Данные мы рассматриваем как набор значений функции на некотором ансамбле точек пространства (гиперкуба, гиперсфера). Распространенными являются ситуации, когда многомерная функция может быть задана некоторым ансамблем точек или неявно, с помощью некоторого алгоритма. В обоих этих случаях простейшим кажется подход с построением функции в узлах регулярной сетки. К сожалению, в многомерном случае построение регулярной сетки по сути запрещено проклятием размерности (в 6-мерном случае, используя 100 узлов по каждой координате, мы получим  $100^6 = 10^{12}$  узлов сетки, что создаст серьезные затруднения для стандартной вычислительной техники). Более реалистичным является построение функции в виде значений на случайном ансамбле узлов.

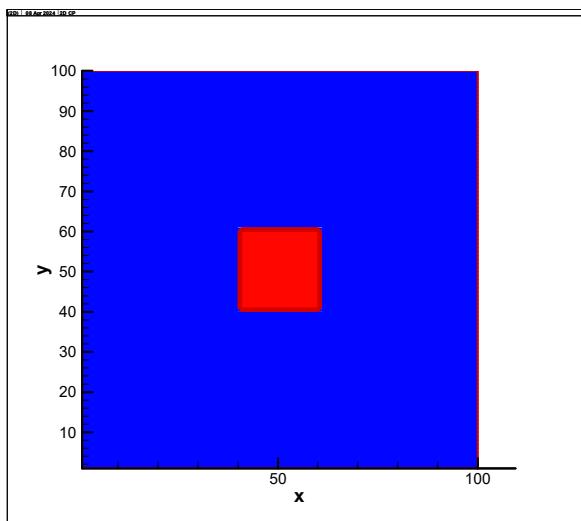


Рисунок 1

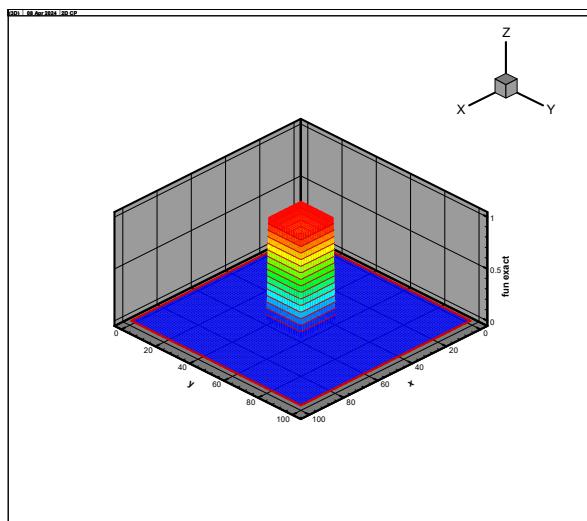


Рисунок 2

Явным недостатком такого подхода является отсутствие учета особенностей, специфичных для многомерных пространств. Например, на рисунке 1 представлено сечение 6-мерного кубика  $Cub \in R^6$  со стороной  $2/10$  по каждой координате плоскостью, которое дает визуальное представление о значимости этого кубика с точки зрения его размеров. К сожалению, это представление абсолютно неадекватно. В реальности отношение объема этого кубика к объему куба, в котором он содержится, равно  $(2/10)^6 = 1/13825 \sim 7 \cdot 10^{-5}$  и достаточно мало, соответствует точке. На рисунке 2 представлена визуализация 6-мерной функции, принимающей единичное значение на этом кубике. Это представление также неадекватно (в шестимерном пространстве рассматриваемая фигура более удачно иллюстрировалась бы некоторой иглой). Таким образом, наивная 2D-визуализация 6-мерной фигуры радикально преувеличивает ее значимость с точки зрения величины объема. При этом погрешность среднего, рассчитанного по этим узлам, не зависит от размерности пространства и определяется числом узлов в ансамбле, что является основным преимуществом метода Монте-Карло при расчете интегралов. Однако при использовании метода Монте-Карло с равномерной выборкой с большой вероятностью деталь, у которой объем невелик (типа вышеописанной функции, рис. 2), обнаружена не будет, так как попадет между узлами. Особенно это относится к разрешению в окрестности центра гиперкуба/гиперсферы.

Рисунки 3 и 4 представляют визуализацию данного сечения с помощью преобразования координат Winslow (), соответствующего наличию априорной информации в форме (10). Эти изображения гораздо лучше отражают важность фигуры с точки зрения занимаемого ей объема в шестимерном пространстве. Здесь мы имеем эффект, обратный эффекту «огромной луны», в котором априорная информация увеличивает некоторый объем в пространстве визуализации.

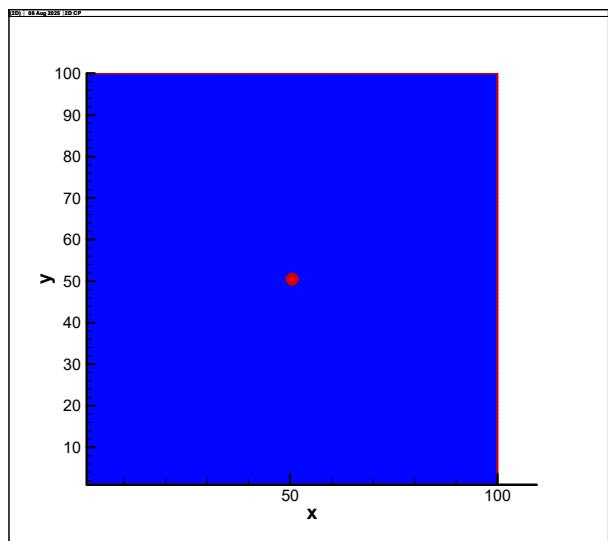


Рисунок 3

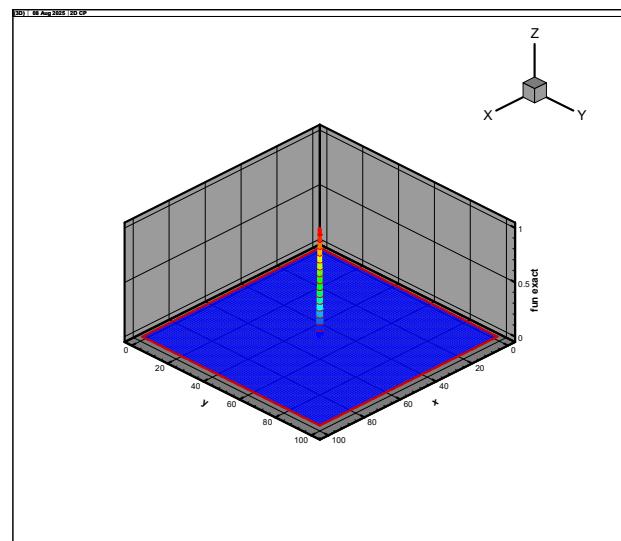


Рисунок 4

### Невклидова геометрия пространства восприятия

Следует отметить, что пространство человеческого визуального восприятия (*перцептивное пространство* (perception space)) не является линейной проекцией наблюдаемого физического пространства на плоскость сетчатки глаза. Простейшим примером, с которым сталкивался каждый, является «эффект огромной луны», вследствие которого размеры Луны около горизонта выглядят существенно больше, чем около зенита. Такое преобразование возможно с помощью перехода к криволинейной системе координат либо в евклидовом пространстве, либо в невклидовом пространстве. Существует большой набор работ, посвященных анализу геометрии пространства визуального восприятия. В работе [5] обосновывается, что перцептивное пространство является пространством Лобачевского (имеет постоянную отрицательную кривизну). В работе [6] утверждается, что перцептивное пространство является пространством Римана с положительной кривизной. В работе [7] указывается, что перцептивное пространство является пространством Римана с кривизной переменного знака, плавно изменяющейся по расстоянию от наблюдателя: с отрицательной кривизной на близких расстояниях и с положительной кривизной на дальних расстояниях. В работе [8] представлены экспериментальные данные, подтверждающие предположение о наличии кривизны переменного знака, однако смена знака кривизны по этим данным происходит при достижении высоты уровня глаз (изменяется не по расстоянию, а по высоте). На рисунке 5 представлена иллюстрация [7], демонстрирующая свойства этого пространства.

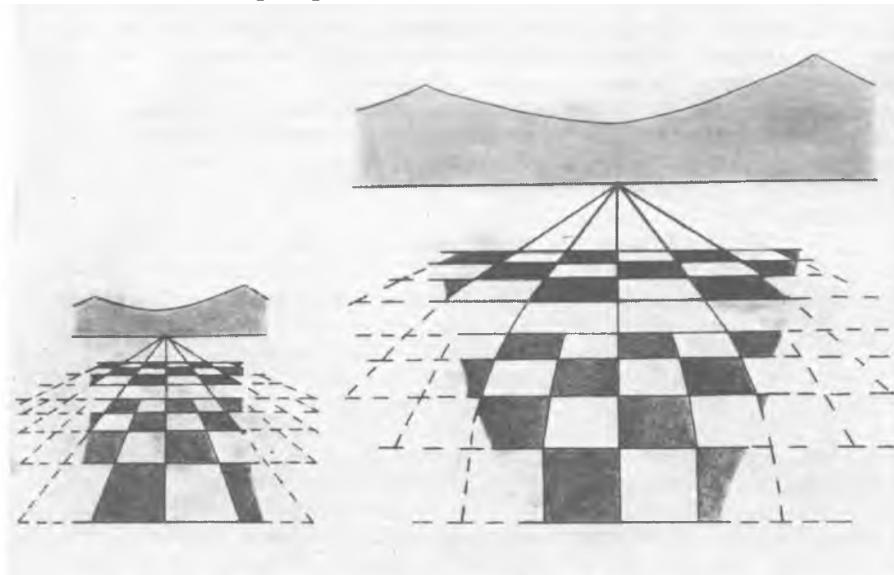


Рисунок 5

Можно считать, что в рамках человеческого зрения на перцептивное пространство (некое трехмерное Риманово пространство переменной кривизны) проектируется некоторая область внешнего трехмерного евклидова пространства.

Таким образом, в рамках человеческого зрения можно выделить три пространства: физическое, пространство визуализации и перцептивное пространство. В рамках научной визуализации (как приема для анализа данных) используется область в некотором промежуточном пространстве, пространстве визуализации, чаще всего двумерном (лист, экран), но в некоторых случаях и трехмерном (стереоочки). При этом возможен переход к новой криволинейной системе координат, задаваемой матрицей Якоби и соответствующим метрическим тензором.

В настоящее время пространство визуализации, как правило (за исключением образцов средневековой живописи [7]), принимается евклидовым. Однако вопрос о целесообразности использования евклидовой метрики для пространства визуализации является нетривиальным. С одной стороны, во избежание дополнительных искажений было бы естественным, чтобы пространство визуализации имело бы ту же метрику, что и перцептивное пространство. С другой стороны, при визуализации многомерных пространств переход от евклидовой метрики к неевклидовой в пространстве визуализации может определяться совсем другими причинами и может оказаться, что метрика визуального пространства не должна совпадать с метрикой перцептивного.

Но в целом переход к неевклидовой метрике для пространства визуализации не кажется противоестественным, так как он в конечном итоге уже выполнен при переходе от трехмерного физического к трехмерному перцептивному.

### Возможности моделирования пространства восприятия с помощью уравнений Гильберта-Эйнштейна

В работе [7] предлагается моделировать перцептивное пространство с помощью уравнений Гильберта-Эйнштейна. Действительно, в достаточно общем случае метрику неевклидова пространства можно описать уравнениями типа Гильберта-Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R \pm \lambda g_{\mu\nu} = -T^{\mu\nu}, \quad (1)$$

которые связывают тензор Риччи  $R_{\mu k} = R_{\mu\lambda k}^\lambda$ ,  $R_{ab} = \partial_m \Gamma_{ab}^m - \partial_a \Gamma_{mb}^m + \Gamma_{mn}^m \Gamma_{ab}^n - \Gamma_{an}^m \Gamma_{mb}^n$

(свертку тензора кривизны 4-го ранга  $R_{\mu\nu k}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda$ ), кривизну

$R = g^{\mu k} R_{\mu k}$  (Ricci scalar), метрический тензор  $g_{jm}$ , тензор энергии-импульса, символы

Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta = \frac{g^{\beta\delta}}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\delta} \right)$ .

Уравнения Гильберта-Эйнштейна можно использовать для описания Риманового пространства как с положительной, так и с отрицательной кривизной. В общей теории относительности (ОТО) уравнения Гильберта-Эйнштейна получаются из условий стационарности функционала действия Гильберта-Эйнштейна

$$S = \int L_{HE} \sqrt{g} d^4x = \int (R - \Lambda + L_{phys}) \sqrt{g(x)} d^4x. \quad (2)$$

На первый взгляд, использование уравнений Гильберта-Эйнштейна для анализа геометрии перцептивного пространства и расчета его метрического тензора выглядит необоснованным. Тем более, что четырехмерное пространство, время и сигнатура псевдоевклидова пространства Минковского, характерные для уравнений Гильберта-Эйнштейна в ОТО (с псевдо-Римановым пространством) в нашем случае не используются. Однако существует обстоятельство, оправдывающее такой подход. Уравнения типа Гильберта-Эйнштейна достаточно универсальны и используются не только в общей теории относительности, но и в информационной геометрии, где метрическим тензором служит информационная матрица Фишера,  $F_{ij} \in R^{n \times n}$  (тензор в пространстве плотностей вероятности случайного распределения  $\rho(u, \theta)$ ) имеющая следующий вид:

$$F_{ij} = \int \left( \frac{-\partial \ln \rho(u, \theta)}{\partial \theta_i} \right) \cdot \left( \frac{-\partial \ln \rho}{\partial \theta_j} \right) \rho du = \int \frac{\partial \rho}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \theta_j} \frac{1}{\rho} du = 4 \int \frac{\partial \rho^{1/2}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \rho^{1/2}}{\partial \theta_j} du. \quad (3)$$

Несимметричное расстояние между двумя плотностями вероятности в одном и том же пространстве параметров можно ввести с помощью меры Кулльбака-Лейблера (Kullback-Leibler), иногда также обозначаемой как кросс-энтропия:  $KL(f, g) = E_f(\ln(f(x)/g(x))) = \int (Ln(f(x)) - (Ln(g(x))f(x))dx$ .

Мера Кулльбака-Лейблера при малых расстояниях между плотностями распределения описывается информационной матрицей Фишера  $KL(\rho(\theta_i + \Delta\theta_i), \rho(\theta_i)) \approx F_{jk}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$ .

Как показано в [9], для этого метрического тензора можно получить уравнение  $R^{\mu\nu}(\theta) - 1/2 g^{\mu\nu} R(\theta) + T^{\mu\nu}(\theta) = 0$ . Следует отметить, что матрица Фишера является обратной ковариационной матрицей и принадлежит Риманову пространству с неположительной кривизной, что не соответствует как ОТО, так и перцептивному пространству.

К сожалению, природа тензора в правой части (аналога тензора энергии-импульса) в этих работах не конкретизируется (в [9] он обозначается как «некоторые статистические ограничения»). По нашему мнению, их можно рассматривать как некоторую априорную информацию о метрике. Если предположить, что геометрия перцептивного пространства зависит от отображенных в нем объектов, то априорная информация о них играет роль, аналогичную тензору энергии-импульса. При этом априорная информация влияет на метрический тензор и на кривизну глобально даже там, где  $T^{\mu\nu} = 0$  (аналогично гравитации).

При обработке информации, осуществляющейся при проектировании на перцептивное пространство, использование информации Фишера и информационной геометрии выглядит вполне естественным [10]. В частности, в [10] показано, что подход информационной геометрии (использующий в качестве метрического тензора матрицу Фишера) оказывается применим и к анализу работы сетей нейронов при обработке визуальной информации. В этой работе перцептивное пространство обозначается как «visual space» и рассматривается как статистическое параметрическое пространство, чья геометрия определяется метрическим тензором, определяемым Гауссовым распределением  $(\mu, \sigma)$ . При этом кривизна пространства оказывается отрицательной. Соответствующие выражения для символов Кристоффеля приведены в [11].

Следует отметить, что матрица Фишера определена в параметрическом пространстве достаточно большой размерности, поэтому если она соответствует нейросетям, моделирующим человеческий мозг, то наше трехмерное перцептивное пространство не является следствием архитектуры нашего мозга, а выступает результатом его обучения трехмерными образцами. При обучении многомерными образцами трудности в нашем восприятии могут быть уменьшены или преодолены. В качестве примера можно взять компьютерные игры HyperRouge (2011) и Hyperbolica (2022), которые позволяют обучить наше восприятие на образах из Риманова пространства отрицательной кривизны.

К сожалению, при решении уравнений типа Гильберта-Эйнштейна и последующей координатизации полученного решения встречается огромное количество как принципиальных, так и технических сложностей, что показано в работах по ОТО [12]. Построить координаты по одному метрическому тензору невозможно, да и само построение метрического тензора для уравнения Гильберта-Эйнштейна очень нетривиально. Это связано с тем, что 10 уравнений Гильберта-Эйнштейна в ОТО содержит 14 независимых величин, и для замыкания необходимо еще четыре дополнительных уравнения («координатные условия»). Более того, благодаря соотношениям Бьянки [12] потребуется еще четыре дополнительных уравнения. Следует также отметить, что уравнения этого типа могут иметь сингулярности и содержать нетривиальную физику, зачастую требующую для интерпретации серьезных усилий. В интересном случае двумерного пространства уравнения Гильберта-Эйнштейна вырождены (тензор Гильберта-Эйнштейна исчезает, так как в этом случае  $R_{ij} \equiv 1/2 R g_{ij}$ ).

Из-за перечисленных трудностей надежда на то, что идея Б. Раушенбаха [7] по моделированию перцептивного пространства с помощью уравнений типа Гильберта-Эйнштейна будет реализована,

достаточно слаба. Основной причиной такой формы уравнений является выбор плотности Лагранжиана в действии Гильберта–Эйнштейна. Поэтому поиск более простых подходов к моделированию Риманова пространства переменной кривизны (с более простыми плотностями Лагранжиана и более простыми уравнениями) выглядит перспективным. В частности, на практике вычислительной аэрогазодинамики (при построении расчетной сетки) довольно часто реализуется преобразование координат, удовлетворяющее некоторому функционалу метрического тензора (без его производных). Вместо решения уравнений типа Гильберта–Эйнштейна при этом решаются уравнения Winslow (или аналоги), определяющие как преобразование координат, так и метрические коэффициенты. В стандартном варианте (задачах аэрогазодинамики) эти уравнения задают преобразование координат в евклидовом пространстве. Однако на языке ОТО решение уравнений Winslow соответствует построению гармонических координат в Римановом пространстве. Уравнения типа Winslow позволяют построить криволинейную координатную систему, в некоторых случаях соответствующую Риманову пространству.

### Подход к построению перспективного пространства с помощью функционалов, зависящих от метрического тензора

В работах по аэрогазодинамике [16-21] для построения неравномерных расчетных сеток часто используется преобразование координат из физического пространства (двух- или трехмерного евклидова) в вычислительное. Здесь мы будем рассматривать двумерный случай, при этом физическая плоскость  $(x, y)$  ( $x_i$ ) преобразуется в вычислительную плоскость  $(\xi, \eta)$  ( $u_i$ ) через решение уравнения Пуассона с источниками членами. Рассмотрим использование функционала Winslow [18, 19, 20]

$$I = \int (g_{11}^2 + g_{22}^2) dx dy = \int (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2) dx dy = \int \frac{x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2}{\tilde{J}^2} \tilde{J} d\xi d\eta = \int \frac{\tilde{g}_{11}^2 + \tilde{g}_{22}^2}{\sqrt{\tilde{g}}(\xi, \eta)} d\xi d\eta. \quad (4)$$

Он обеспечивает максимальную гладкость преобразования и при этом запрещает обращение в нуль якобиана  $\tilde{J}$  (и соответствующего метрического тензора) и вырождение соответствующего преобразования. Добавим к стандартной постановке потенциал  $\Phi(\xi, \eta)$

$$I(\xi, \eta, \xi_x, \xi_y) = 1/2 \int (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2 + \Phi(\xi, \eta)) dx dy. \quad (5)$$

Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид уравнений Пуассона с нелинейными источниками (в стандартном варианте веса  $P, Q$  добавляются искусственно).

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta) = \partial \Phi(\xi, \eta) / \partial \xi; \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta) = \partial \Phi(\xi, \eta) / \partial \eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее переменные  $(\xi, \eta)$  принимаются за независимые и на равномерной сетке по  $(\xi, \eta)$  решается система

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -\tilde{J}^2 (P x_\xi + Q x_\eta); \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -\tilde{J}^2 (P y_\xi + Q y_\eta). \end{aligned} \quad (7)$$

Система содержит распределенные источники и позволяет рассчитать координаты  $(x, y)$  в узлах равномерной сетки  $(\xi, \eta)$ .

Источниковый член в (6) и (7) часто используется в форме

$$P = Q = b \times \text{sign}(\xi - \xi_0) \times \exp(-d\{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2\}^{1/2}), \quad (8)$$

что позволяет сжимать узлы сетки в физическом пространстве  $(x, y)$  около точек  $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$ .

В нашем случае переменные  $(\xi, \eta)$  соответствуют исходным координатам, получаемым простым сечением плоскостью. Переменные  $(x, y)$  соответствуют трансформированным координатам, при этом сетка, в которой задана функция, уже не будет равномерной.

Кроме функционалов Winslow и длины при построении сетки иногда минимизируются другие функционалы [16], напрямую связанные с компонентами метрического тензора. К ним относятся функционалы ортогональности, функционал площади, Liao.

Условиями стационарности этих функционалов служат ЧДУ второго порядка, некоторые из которых достаточно легко решаются на практике и позволяют осуществить преобразование декартовых координат в криволинейные и наоборот. Часть функционалов (площади, ортогональности, Liao) порождают решения, содержащие складки. В качестве лекарства иногда используются суммы этих функционалов [21].

### Построение конформных координат и система Бельтрами

В работах [12, 13] для двумерного случая рассмотрено построение системы координат, реализующих заданную Риманову метрику с помощью решения системы Бельтрами

$$gx_\xi = -g_{12}y_\xi + g_{11}y_\eta, \quad gx_\eta = -g_{22}y_\xi + g_{12}y_\eta, \quad g^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \quad (9)$$

или

$$g_{22}v_{xx} - 2g_{12}v_{xy} + g_{11}v_{yy} + (g_{22,x} - g_{12,y})v_x + (g_{11,y} - g_{12,x})v_y + \frac{g_x - g_y}{g} = 0. \quad (10)$$

Решение этого уравнения позволяет вычислить  $v(x, y)$ , далее, имея поле  $u_x, u_y$ , рассчитаем  $u(x, y)$  интегрированием. В численных расчетах использовалась функция априорной важности  $\theta(x, y)$ , при которой деформация расстояния записывается как  $ds^2 = \theta(x, y)(dx^2 + dy^2)$  и дает компоненты тензора  $g_{xx} = \theta$ ,  $g_{yy} = \theta$ ,  $g_{xy} = 0$ . В работах [12, 13] используется достаточно универсальная форма  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + \delta(x^2 + y^2))^2}$ , пригодная для Римановых пространств как с отрицательной, так и с положительной кривизной.

Использование системы уравнений Бельтрами позволяет осуществить простейший способ построения координат в Римановом пространстве, однако ограничено только двумерным случаем. Уравнения типа Winslow с этой точки зрения более универсальны.

### Функция важности

Если мы ориентируемся на преобразование координат типа (9), (10), основной интерес для нас представляет определение формы и смысла источниковых членов  $(P, Q)$ . Они могут быть связаны чисто с геометрией пространства либо со свойствами функции. Аналогом является сопряженная функция  $\psi(x, y, z, u, v, w)$  [22], которая позволяет визуализировать зоны, где функция  $f(x, y, z, u, v, w)$  оказывает наибольшее влияние на ценный функционал. В случае  $\psi(x, y, z, u, v, w) > 0$  сопряженную функцию можно связать с метрическим тензором  $\psi \sim J = \sqrt{g}$ , что дает априорную информацию о зонах влияния функции. В частности, при эффекте огромной луны  $d\tilde{V} \sim \sqrt{g}dV$  априорная информация искажает объемы. В нашем случае, мы используем конформное отображение  $dx^2 + dy^2 = \rho(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2)$  и функцию (11) в качестве априорной информации. Решая далее уравнения Бельтрами, можно построить преобразование координат, аналогичное представленным на рисунках 3 и 4.

### Обсуждение

Представлено двумерное сечение 6-мерного гиперкуба (см. рис. 1, 2) в евклидовых координатах и в Римановых координатах (см. рис. 3, 4) с априорной метрикой (8) и построением координат решением уравнения Уинслоу (6,7). Оно более информативно в части о тображении объема, занимаемого функцией в сравнении со стандартным сечением гиперкуба плоскостью. Это достигается за счет неевклидовой трансформации пространства визуализации.

В значительной степени визуализация сводится к отображению некоторого физического пространства (чаще всего трехмерного, но в некоторых случаях и многомерного (например, 6-мерное пространство скоростей и координат в уравнении Больцмана) на двумерное (иногда трехмерное) промежуточное пространство–пространство визуализации. Далее пространство визуализации отображается на пространство восприятия (перцептивное пространство), которое является трехмерным пространством Римана с переменной кривизной.

Риманова геометрия пространства восприятия подтверждена как многочисленными современными экспериментами, так и многочисленными примерами средневековой живописи.

Пространство визуализации в современной практике обычно евклидово. В данной работе мы рассматриваем возможности, предоставляемые Римановой метрикой в пространстве визуализации, и проблемы, порождаемые таким подходом.

Как мы уже видели (см. рис. 1, 2), наивная визуализация многомерной функции с помощью сечений плоскостями существенно искажает представление об объеме этой функции. Нелинейное преобразование координат с использованием Римановой метрики позволяет исправить эти искажения (см. рис. 3, 4).

В идеале пространство визуализации должно иметь ту же геометрию, что и перцептивное пространство, это должно уменьшить искажения при проектировании из одного пространства в другое. В случае двумерной визуализации полное устранение искажений вряд ли возможно из-за различия в размерности (художественные попытки этого представлены в [7]). В случае трехмерной визуализации неясно, как технически выполнить построение образа в неевклидовой геометрии. Более того, неясно, насколько геометрия пространства восприятия универсальна при переходе от одного индивидуума к другому.

### Заключение

Для адекватной визуализации многомерных функций можно использовать трансформированную плоскость с Римановой метрикой, где метрический тензор может определяться геометрией и размерностью пространства, априорной информацией о значимости некоторых областей.

Использование уравнений типа Гильberta-Эйнштейна оправдывается аналогией между Римановыми физической и информационной геометриями. Вместо уравнений Гильberta-Эйнштейна для моделирования перцептивного пространства и пространства визуализации проще использовать уравнения типа Winslow или уравнения Бельтрами.

С учетом того, что матрица Фишера определена в параметрическом пространстве достаточно большой размерности, определяемом числом использованных нейронов, наше привычное трехмерное перцептивное пространство не является следствием архитектуры нашего мозга, а является следствием его обучения трехмерными образцами. Вполне вероятен переход к многомерному пространству при обучении многомерными образцами. В качестве аналогии можно рассмотреть компьютерные игры HyperRouge и Hyperbolica, которые позволяют обучить наше восприятие на образах из Риманова пространства отрицательной кривизны.

### Список источников

- [1] Зорич В.А. Многомерная геометрия, функции очень многих переменных и вероятность // ТВП. 2014. Т. 59, вып. 3. Р. 436–451.
- [2] Chen H. et al, Noisy Data Visualization using Functional Data Analysis. arXiv:2406.03396v1 [cs.LG] 5 Jun 2024
- [3] Laa U., Cook D., Buja A., Valencia G. 2020. Hole or grain? A Section Pursuit Index for Finding Hidden Structure in Multiple Dimensions. arXiv:2004.13327v3 [stat.CO] 10 Mar 2022.
- [4] Laa U., Cook D., and Valencia G. 2020. A slice tour for finding hollowness in high-dimensional data. arXiv:1910.10854v1 [stat.CO] 24 Oct 2019.
- [5] Luneburg R.K. Metric methods in binocular visual perception // Courant Anniversary / eds K. O. Friedricks, et al. New York: Interscience, 1948. Pp. 215–240.
- [6] Battro A.M. Riemannian geometries of variable curvature in visual space: visual alleys, horopters, and triangles in big open fields // Perception. 1976. Vol. 5. P. 9–23.
- [7] Раушенбах Б.Б. Пространственные построения в живописи. М.: Наука, 1980.
- [8] Koenderink J. J., Van Doorn A. J., Lappin J. S. Direct measurement of the curvature of visual space // Perception. 2000. Vol. 29, no. 1. P. 69–79.

- 
- [9] Calmet X., Calmet J. Dynamics of the Fisher information metric. 2004. arXiv:cond-mat/0410452v1.
  - [10] Mazumdar D., et al. Investigation of the neural origin of non-Euclidean visual space and analysis of visual phenomena using information geometry. arXiv:2505.13917v1, 2025.
  - [11] Costa S. I. R., Santos S. A., Strapasson J. E. Fisher information distance: a geometrical reading. arXiv.1210.2354v3[stat.ME], 10 Jan, 2014.
  - [12] Arnold D. N. Numerical Problems in General Relativity // Proceedings of the 3rd European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications. P. Neittaanmaki, T. Tiihonen, P. Tarvainen eds. WS, Singapore. P. 3–15.
  - [13] Белинский П. П., Годунов С. К., Иванов Ю. Б., Яненко И. К. Применение одного класса квазиконформных отображений для построения разностных сеток в областях с криволинейными границами // ЖВМ. 1975. Т. 5, № 6. С. 1499–1511.
  - [14] Уравнения с частными производными / Л. Берс и др. М.: Мир, 1966.
  - [15] Knupp P. M., Steinberg. S. Fundamentals of Grid Generation. CRC Press, 1993.
  - [16] Khattri S. K., Grid Generation and Adaptation by Functionals. arXiv:math/0607388v1 [math.NA] 17 Jul 2006
  - [17] Charakhchyan A. A., Ivanenko S. A. A Variational Form of the Winslow Grid Generator // JCP. 1997. Vol. 136. P. 385–398.
  - [18] Brackbill J. U., Saltzman J. S., Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // JCP. 1982. Vol. 46. P. 342.
  - [19] Тишкин В. Ф. Методы построения расчетных сеток. М.: МГУ, 2016.
  - [20] Fortunato M., Persson P-O. High-order unstructured curved mesh generation using the Winslow equations // JCP. 2016. Vol. 303. Pp. 1-14.
  - [21] Tinoco J.G., Barrera P., Cortes A. Some Properties of Area Functionals in numerical Grid Generation // X Meshing Round Table. Newport Beach, California, USA, 2001.
  - [22] Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Применение сопряженных уравнений и визуальное представление сопряженных параметров в задачах идентификации и управления течением // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2011. № 50. 24 с.