

УДК 535.361.21

DOI: 10.25686/978-5-8158-2474-4-2025-250-260

Модель отражения света от реальных поверхностей: матричный подход с учетом анизотропии рассеяния

В. П. Будак, Д. Н. Макаров, П. А. Смирнов

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

Аннотация. В работе предлагается наиболее полная аналитическая модель отражения света от реальных поверхностей. С учетом глубины проникновения света в реальные объекты часто в несколько длин волн рассматривается отражение от плоского слоя, ограниченного сверху случайно-неровной френелевской поверхностью и ламбертовским дном. Отличительной особенностью предлагаемой модели является выделение в решении анизотропной части, которая приближенно, но аналитически учитывает все особенности точного решения. Выделение особенностей в решении позволяет дискретизировать уравнение переноса излучения, а все описание переноса излучения приобретает матричную форму. Для учета френелевского отражения выделяются зона полного внутреннего отражения и зона закона Снеллиуса, что позволяет описывать перенос через границу в матричной форме. Это дает возможность рассчитывать отражение произвольной стопкой слоев на основе матрично-операторного метода, однако операция звездного произведения, лежащая в его основе, была модифицирована с учетом выделения анизотропной части решения. Полученная модель отличается высокой скоростью счета при реализации и не имеет ограничений на степень анизотропии рассеяния в объеме вещества.

Ключевые слова: коэффициент яркости поверхности, объемное рассеяние, поверхностное отражение, случайно-неровная поверхность

Light reflection model for real surfaces: matrix approach with anisotropic scattering

V. P. Budak, D. N. Makarov, P. A. Smirnov

National Research University "MPEI"

Abstract. This paper presents a comprehensive analytical model for light reflection from real surfaces, accounting for multi-wavelength penetration depths. The model treats reflection from a flat layer bounded by a randomly rough Fresnel top surface and a Lambertian base. Its key innovation is the analytical isolation of an anisotropic component, approximating all features of the exact solution while enabling discretization of the radiative transfer equation into a matrix form. Fresnel reflection is handled by separating total internal reflection and Snell's law zones, with boundary conditions expressed as matrices. The model extends to multi-layer systems via a modified matrix operator method (star product adapted for anisotropy). Computational efficiency is high, with no constraints on scattering anisotropy.

Keywords: surface radiance factor, volumetric scattering, surface reflection, randomly rough surface.

Введение

В компьютерной графике модели отражения поверхности (BRDF – Bidirectional Reflectance Distribution Function) играют ключевую роль в создании реалистичных изображений. В этой области имеются многочисленные исследования. Даже краткий обзор существующих моделей отражения представляет собой самостоятельную объемную тему анализа. Поэтому ограничимся ссылками на две фундаментальные монографии энциклопедического содержания, в которых приведена классификация основных моделей отражения [1, 2]. Анализ таких моделей показывает, что среди них преобладают модели, основанные на отражении на случайно-неровной поверхности (СНП). Если применимость такого рода моделей для металлических поверхностей не вызывает сомнения, то отражение от частично-прозрачных объектов подобными моделями описать невозможно. Наиболее полная модель отражения реальными объектами была предложена в работе [3], где отражение включало в себя как поверхностное отражение, так и объемное рассеяние подповерхностной средой. В [3] убедительно показано, что объяснить отражение света только френелевским отражением от поверхности невозможно.

Развитие полноценной модели отражения по [3] сильно сдерживалось отсутствием эффективных методов решения уравнения переноса излучения (УПИ) в рассеивающей среде, по сути, до конца XX века [4]. В настоящее время появились две модели, реализующие модель [3]. В [5] для решения УПИ используется метод дискретных ординат (МДО), что делает УПИ дискретным в матричной форме. Учет отражения от границ проводится на основе матрично-операторного метода (МОМ – ниже

в статье мы остановимся подробнее). В [6] этот подход далее развивается на произвольные плоскослоистые среды.

Сложность вычислений по матричным выражениям определяется размерами матриц, которые определяются анизотропией индикатрисы рассеяния – количество полиномов Лежандра в ее разложении. Подавляющее большинство сред имеет взвешенные частицы существенно больше длины волны [7], что в соответствии с теорией Г. Ми приводит к сотням членов в разложении индикатрисы по полиномам Лежандра. В настоящей работе предлагается эффективный метод расчета отражения слоя с учетом объемного рассеяния для произвольной степени анизотропии, что открывает возможность создания модели отражения реальными объектами.

Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу УПИ для однородного плоского слоя, освещаемого сверху плоским мононаправленным источником в направлении $\hat{\mathbf{l}}_0$ и ограниченного сверху плоской френелевской границей, а снизу ламбертовским дном [4]:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial L}{\partial \tau} + L(\tau, \mu, \phi) = \frac{\Lambda}{4\pi} \iint x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) L(\tau, \mu', \phi') d\hat{\mathbf{l}}', \\ L(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\tau=0, \mu>0} = \rho_F(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(\tau, \hat{\mathbf{l}}'), \quad L(\tau, \mu, \phi) \Big|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = \frac{\rho_L}{\pi} \int_{(\mu>0)} L(\tau_0, \hat{\mathbf{l}}') \mu d\hat{\mathbf{l}}', \end{cases} \quad (1)$$

где $L(\tau, \hat{\mathbf{l}})$ – яркость светового поля в точке на оптической глубине τ по направлению $\hat{\mathbf{l}}$; Λ – альбедо однократного рассеяния; τ_0 – оптическая толщина слоя; $x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}})$ – индикатриса рассеяния. Здесь декартова система координат $OXYZ$, причем OZ направлена вниз. Значком “ \wedge ” отмечаются единичные векторы, $\mu = (\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{z}})$; ϕ – азимут в плоскости OXY относительно оси OX ; ρ_L – коэффициент отражения от диффузного дна (Lambert); $\rho_F(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')$ – коэффициент яркости френелевской (Fresnel) границы [4]:

$$\rho_F(v) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{nv - \sqrt{1 - n^2(1 - v^2)}}{nv + \sqrt{1 - n^2(1 - v^2)}} + \frac{v - n\sqrt{1 - n^2(1 - v^2)}}{v + n\sqrt{1 - n^2(1 - v^2)}} \right\}, \quad (2)$$

где n – показатель преломления вещества плоского слоя; v – косинус угла отражения.

Важнейшим вопросом является применимость модели плоского слоя к отражению реальными объектами. С точки зрения описания переноса излучения играет роль не геометрия объектов, а геометрия области взаимодействия света со средой под поверхностью границы. Глубина проникновения света в глубину большинства объектов в реальности составляет несколько длин волн, когда кривизной границы можно пренебречь. Это аналогично подходу в описании переноса излучения в атмосфере при оптическом дистанционном зондировании – приближение независимого пикселя (IPA – Independent Pixel Approximation) [8].

Для решения задачи (1) искомую функцию $L(\tau, \hat{\mathbf{l}})$ необходимо дискретизировать. Вследствие лучевой природы УПИ пространственно-угловое распределение яркости $L(\tau, \hat{\mathbf{l}})$ неизбежно содержит разрывы и особенности, возникающие из-за точечных источников, резких границ сред или особенностей индикатрисы рассеяния [9]. Сингулярности невозможно точно представить в дискретной форме. Наилучшим решением здесь является представление решения в виде суммы анизотропной части (АЧ) $L_a(\tau, \hat{\mathbf{l}})$, которая пусть приближенно, но аналитически описывает всю анизотропную часть решения, включая все особенности и разрывы, и регулярной части (РЧ) $\tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{l}})$, которая является гладкой функцией, допускает дискретизацию и находится численно:

$$L(\tau, \hat{\mathbf{l}}) = L_a(\tau, \hat{\mathbf{l}}) + \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{l}}). \quad (3)$$

Более того, в $L_a(\tau, \hat{\mathbf{l}})$ можно включить и анизотропию, связанную с угловой анизотропией индикатрисы рассеяния. В работе [9] проведено детальное исследование особенностей решения УПИ и показано, что решение краевой задачи (1) содержит в угловом распределении особенность $\delta(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}}_0)$.

Идея такого представления была высказана в [10] для численного вычисления интегралов функций, содержащих особенности и разрывы. Представление (3) модифицирует УПИ в (1):

$$\mu \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tau} + \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\Lambda}{4\pi} \int \int x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) \tilde{L}(\tau, \mu', \varphi') d\hat{\mathbf{l}}' + F(\tau, \mu, \varphi), \quad (4)$$

где функция источников $F(\tau, \mu, \varphi)$ связана с невязкой АЧ от точного решения УПИ.

На решении уравнения (4) с учетом краевых условий из (1) будет построена модель отражения. Идея метода нами впервые высказана в [11]. На ее основе предложена модель отражения в [12], однако не удавалось строго учесть френелевское отражение на границах. Построение полной модели отражения, строго учитывающей объемное рассеяние и отражение на границах, является предметом настоящей работы.

Матричная теория переноса

Запишем азимутальную зависимость $\tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{l}})$ в виде ряда Фурье:

$$\tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=-M}^{m=M} C^m(\tau, \mu) e^{im\varphi} = \sum_{m=0}^{m=M} (2 - \delta_{m0}) C^m(\tau, \mu) \cos m\varphi, \quad (5)$$

а индикатору рассеяния выразим в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$x(v) = \sum_{k=0}^K \frac{2k+1}{4\pi} x_k P_k(v). \quad (6)$$

Подстановка (5) и (6) в (4) приводит к уравнению

$$\mu \frac{dC^m(\tau, \mu)}{d\tau} = -C^m(\tau, \mu) + \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=m}^{N_s} (2k+1) x_k Q_k^m(\mu) \int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} f_k^m(\tau) Q_k^m(\mu), \quad (7)$$

где f_k – коэффициенты разложения $F(\tau, \mu, \varphi)$ в азимутальный ряд Фурье.

Поскольку РЧ $\tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{l}})$ является гладкой функцией, то интеграл в (7) можно представить по методу гауссовых квадратур

$$\int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} w_j C_j^-(\tau) Q_k^m(\mu_j^-) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} w_j C_j^+(\tau) Q_k^m(\mu_j^+), \quad (8)$$

где μ_j^\pm – узлы гауссовых квадратур порядка N по схеме, при которой разделяются потоки вниз $\mu_j^+ > 0$ и вверх $\mu_j^- < 0$; $C_j^\pm(\tau)$, w_j – соответствующие им веса и искомые дискретные ординаты коэффициентов $C^m(\tau, \mu')$. Индекс m из-за очевидности во всех дальнейших выражениях опускаем.

Если подставить (8) в (4) с учетом (5) и (6), то УПИ примет вид конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если все переменные в (7) представить в виде векторов и матриц, то систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать в виде матричного уравнения

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \bar{C}_+ \\ \bar{C}_- \end{bmatrix} = -\tilde{M}^{-1} (\tilde{I} - \tilde{X} \tilde{W}) \begin{bmatrix} \bar{C}_+ \\ \bar{C}_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_+ \\ \bar{F}_- \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $\bar{C}_\pm = [C_j^\pm]$, $\tilde{W} = \text{diag}(w_i)$, $\tilde{M} = \text{diag}(\mu_i^+, \mu_i^-)$, $\bar{F}_\pm = [f_j^\pm]$,

$$\tilde{X} = \frac{\Lambda}{4} \begin{bmatrix} \sum_{k=m}^K (2k+1) x_k Q_k^m(\mu_i^+) Q_k^m(\mu_j^+) & \sum_{k=m}^K (2k+1) x_k Q_k^m(\mu_i^+) Q_k^m(\mu_j^-) \end{bmatrix}.$$

Тем самым описание процесса переноса приобретает дискретную, матричную форму [13]. Система уравнений (9) представляет двухточечную краевую задачу, решение которой можно представить в матричной форме:

$$-\begin{bmatrix} \bar{C}_+(0) \\ \bar{C}_-(0) \end{bmatrix} + e^{\tilde{B} \tau_0} \begin{bmatrix} \bar{C}_+(\tau_0) \\ \bar{C}_-(\tau_0) \end{bmatrix} = \int_0^{\tau_0} e^{\tilde{B} t} \begin{bmatrix} \bar{F}_+(t) \\ \bar{F}_-(t) \end{bmatrix} dt, \quad (10)$$

где матричная экспонента $e^{\tilde{B} \tau} = \tilde{U} e^{\tilde{F} \tau} \tilde{U}^{-1}$, $\tilde{F} = \text{diag}(\tilde{F}_-, \tilde{F}_+)$, $\tilde{F}_\pm = \text{diag}(\gamma_i)$, $e^{\tilde{F} \tau} = \text{diag}(e^{\tilde{F}_- \tau}, e^{\tilde{F}_+ \tau})$, γ_i , \tilde{U} – собственные значения и матрица собственных векторов матрицы $\tilde{B} \equiv \tilde{M}^{-1} (\tilde{I} - \tilde{X} \tilde{W})$.

Сложностью решения (10) является наличие у матричной экспоненты $e^{\tilde{B} \tau_0}$ положительных и отрицательных показателей, отчего с увеличением оптической глубины τ_0 обусловленность матрицы быстро падает. Для устранения этого применяется масштабное преобразование [14] – обе части уравнения умножаются на матрицу:

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\tilde{r}_+ \tau_0} \\ \tilde{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

что приводит (10) к виду

$$\begin{bmatrix} -e^{-\tilde{r}_+ \tau_0} \tilde{u}_{22} & \tilde{u}_{21} \\ -\tilde{u}_{12} & e^{\tilde{r}_- \tau_0} \tilde{u}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_-(0) \\ \tilde{C}_+(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_+ \\ \tilde{J}_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-\tilde{r}_+ \tau_0} \tilde{u}_{21} & -\tilde{u}_{22} \\ \tilde{u}_{11} & -e^{\tilde{r}_- \tau_0} \tilde{u}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_+(0) \\ \tilde{C}_-(\tau_0) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\text{где } \tilde{U} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} \\ \tilde{u}_{21} & \tilde{u}_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{J}_+ \\ \tilde{J}_- \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \tilde{S} \tilde{I}_k(\tau_0) \tilde{U}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{q}_+ \\ \tilde{q}_- \end{bmatrix}, \quad \tilde{I}_k(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} e^{\tilde{r}_t} f_k^m(t) dt, \quad \tilde{q}_{\pm} = [Q_k^m(\mu_i^{\pm})].$$

Уравнение (12) связывает падающие на слой потоки $\tilde{C}_-(0)$, $\tilde{C}_-(\tau_0)$ с выходящими из него $\tilde{C}_-(0)$, $\tilde{C}_+(\tau_0)$. Разрешим (12) относительно выходящих потоков $\tilde{C}_-(0)$, $\tilde{C}_+(\tau_0)$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_-(0) \\ \tilde{C}_+(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_- \\ \tilde{\Phi}_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{T} \\ \tilde{T} & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_+(0) \\ \tilde{C}_-(\tau_0) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\text{где } \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_- \\ \tilde{\Phi}_+ \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -\tilde{u}_{11} & e^{\tilde{r}_- \tau_0} \tilde{u}_{12} \\ -e^{-\tilde{r}_+ \tau_0} \tilde{u}_{21} & \tilde{u}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{F}_- \\ \tilde{F}_+ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{T} \\ \tilde{T} & \tilde{R} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -\tilde{u}_{11} & e^{\tilde{r}_- \tau_0} \tilde{u}_{12} \\ -e^{-\tilde{r}_+ \tau_0} \tilde{u}_{21} & \tilde{u}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{12} & -e^{\tilde{r}_- \tau_0} \tilde{u}_{11} \\ e^{-\tilde{r}_+ \tau_0} \tilde{u}_{22} & -\tilde{u}_{21} \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение выражает выходящие потоки из слоя $\tilde{C}_-(0)$, $\tilde{C}_+(\tau_0)$ через падающие на него $\tilde{C}_-(0)$, $\tilde{C}_-(\tau_0)$, что позволяет его определить как матричное выражение углового спектра коэффициента яркости. Отметим наличие в уравнении источников $\tilde{\Phi}_{\pm}$, связанных с представлением решения в форме (3) и невязки АЧ $L_a(\tau, \hat{I})$ от точного решения УПИ.

Матрично-операторный метод

Полученная система в матричном виде (12) и (13) является системой из N уравнений с $2N$ неизвестными $\tilde{C}_-(0)$, $\tilde{C}_+(\tau_0)$, недостающие N условий дают граничные условия. Однако эти матричные соотношения открывают возможность для широкого обобщения. Если слой является неоднородным по глубине OZ, то его можно представить в дискретной форме в виде стопки плоских слоёв. Решения для каждого из слоев будут иметь форму матричного соотношения (12) или (13).

Рассмотрим случай двух смежных слоев:

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_-^1 \\ \tilde{C}_+^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_-^1 \\ \tilde{\Phi}_+^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{R}_{1-} & \tilde{T}_{1-} \\ \tilde{T}_{1+} & \tilde{R}_{1+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_-^1 \\ \tilde{C}_+^1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{C}_-^2 \\ \tilde{C}_+^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_-^2 \\ \tilde{\Phi}_+^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{R}_{2-} & \tilde{T}_{2-} \\ \tilde{T}_{2+} & \tilde{R}_{2+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_-^2 \\ \tilde{C}_+^2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где нижний индекс определяет принадлежность верхнему 1 или нижнему слою 2. Вертикальными стрелками обозначено падающее сверху или снизу на слой излучение.

Отметим, что поскольку слои соприкасаются друг с другом, то

$$\tilde{C}_+^1 = \tilde{C}_-^2 \equiv \tilde{C}_-^1, \quad \tilde{C}_-^2 = \tilde{C}_+^1 \equiv \tilde{C}_+^2, \quad (15)$$

и, разрешая систему (14) относительно отраженного \tilde{C}_-^1 и прошедшего \tilde{C}_+^2 излучений относительно падающего на систему излучения \tilde{C}_-^1 и \tilde{C}_+^2 , получим

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_-^1 \\ \tilde{C}_+^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_-^1 + \tilde{T}_{1-} \tilde{\alpha}_1 (\tilde{R}_{2-} \tilde{\Phi}_+^1 + \tilde{\Phi}_-^2) \\ \tilde{T}_{2+} \tilde{\alpha}_2 (\tilde{\Phi}_+^1 + \tilde{R}_{1+} \tilde{\Phi}_-^2) + \tilde{\Phi}_+^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{R}_{1-} + \tilde{T}_{1-} \tilde{\alpha}_1 \tilde{R}_{2-} \tilde{T}_{1+} & \tilde{T}_{1-} \tilde{\alpha}_1 \tilde{T}_{2-} \\ \tilde{T}_{2+} \tilde{\alpha}_2 \tilde{T}_{1+} & \tilde{R}_{2+} + \tilde{T}_{2+} \tilde{\alpha}_2 \tilde{R}_{1+} \tilde{T}_{2-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_-^1 \\ \tilde{C}_+^2 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\text{где } \tilde{\alpha}_1 = (\tilde{I} - \tilde{R}_{2-} \tilde{R}_{1+})^{-1}, \quad \tilde{\alpha}_2 = (\tilde{I} - \tilde{R}_{1+} \tilde{R}_{2-})^{-1}.$$

Данный подход в теории переноса получил название матрично-операторного метода (МОМ) [15] и позволяет рассчитывать перенос через любую стопу плоских слоев: как рассеивающих, так и отражающих/пропускающих. Наше выражение отличается от соответствующего в [15] тем, что мы представили решение в виде суммы АЧ и РЧ (3), что привело к появлению в (16) первого вектора, связанного с источниками. Уравнение (16) совпадет с [15], если в нем положить $\tilde{\Phi}_{\pm}^{1,2} \equiv 0$. Аналогичный метод решения был введен в [16] при исследовании решений уравнения Риккати, описывающего

распространение радиоволн в слоистых средах. Для анализа слоистых сред в [16] было введено операторное звёздное произведение (star product), позволяющее комбинировать матрицы рассеяния отдельных слоёв. В наших обозначениях звездное произведение можно записать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_{1-} & \tilde{T}_{1-} \\ \tilde{T}_{1+} & \tilde{R}_{1+} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \tilde{R}_{2-} & \tilde{T}_{2-} \\ \tilde{T}_{2+} & \tilde{R}_{2+} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{R}_{1-} + \tilde{T}_{1-} \tilde{\alpha}_1 \tilde{R}_{2-} \tilde{T}_{1+} & \tilde{T}_{1-} \tilde{\alpha}_1 \tilde{T}_{2-} \\ \tilde{T}_{2+} \tilde{\alpha}_2 \tilde{T}_{1+} & \tilde{R}_{2+} + \tilde{T}_{2+} \tilde{\alpha}_2 \tilde{R}_{1+} \tilde{T}_{2-} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Матрица, описывающая отражение и пропускание слоя, получила название матрицы рассеяния

$$\tilde{S} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{R}_- & \tilde{T}_- \\ \tilde{T}_+ & \tilde{R}_+ \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Тогда матрицу рассеяния системы из m слоев можно записать в виде последовательности звездных произведений

$$\tilde{S}_\Sigma = \tilde{S}_1 \otimes \tilde{S}_2 \dots \otimes \tilde{S}_m, \quad (19)$$

что является математической записью МОМ и позволяет перейти к расчету стратифицированных слоев.

В этом смысле наш подход является обобщением МОМ и звёздного произведения на случай выделения в решении АЧ или, в более общем случае, наличия источников в слоях.

Границные условия

Для нас существенно, что отражения на границах раздела можно включить в МОМ. Рассмотрим нижнюю ламбертовскую поверхность

$$L(\tau_0, \hat{I}) \Big|_{\mu < 0} = \frac{\rho_L}{\pi} \int_{(\mu > 0)} L(\tau_0, \hat{I}') \mu d\hat{I}', \quad (20)$$

что с учетом представления яркости через сумму анизотропной и регулярной частей примет вид

$$L(\tau_0, \hat{I}) \Big|_{\mu < 0} = \frac{\rho}{\pi} \int_{(\mu > 0)} \left(\tilde{L}_a(\tau, \mu, \varphi) + e^{-\tau/\mu_0} \delta(\hat{I} - \hat{I}_0) + \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) \right) \mu d\hat{I}'. \quad (21)$$

С переходом в дискретные ординаты получим

$$m = 0: \tilde{C}_-(\tau_0) = \tilde{F}_- + \tilde{R}_L \tilde{C}_+(\tau_0), \quad (22)$$

где матрица ламбертовского отражения \tilde{R}_L состоит из $N/2$ одинаковых строк $2\rho \{ \mu_j^+ w_j \}$.

Собирая все вместе, представим перенос излучения через ламбертовскую границу матрицей переноса:

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_-^r \\ \tilde{C}_+^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_- \\ \tilde{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{R}_L & \tilde{0} \\ \tilde{I} & \tilde{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_+^i \\ \tilde{C}_-^i \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где индекс i относится к падающему на ламбертовскую поверхность излучению, а r – отраженному.

Существенно сложнее обстоит дело с френелевским отражением на верхней границе. На френелевской границе происходит преломление, и направления ординат (лучей потоков) меняются на границе по закону Снеллиуса

$$n_o \sin \theta_o = n_a \sin \theta_a, \quad (24)$$

где n_o, n_a – показатели преломления среды, для определенности плоский слой будем называть океан, а среда сверху границы – атмосфера. Все, что относится к атмосфере, будем снабжать индексом a и положим ее $n_a=1$, а вторая среда – океан, индекс o .

Очевидно, в соответствии с нашими допущениями $n_o > n_a$. Косинусы лучей с осью OZ в обеих средах в соответствии с (24) будут связаны между собой

$$\mu_a = \sqrt{1 - n_o^2(1 - \mu_o^2)}. \quad (25)$$

Из (25) видно, что для $\mu_o < \mu_t \equiv \sqrt{1 - 1/n_o^2}$ в океане возникает область полного внутреннего отражения (ПВО), когда лучи не выходят из океана, а идеально отражаются опять в океан (рис. 1). При этом образуются три зоны направлений лучей: две области ПВО I и III, и в центре область II преломления лучей на границе атмосфера – океан.

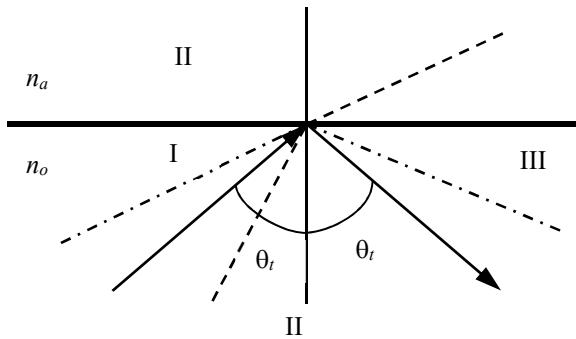


Рисунок 1. Области направлений лучей на границе раздела: лучи в области ПВО показаны штрих-пунктиром, а лучи в области преломления – пунктиром

Рассмотрим интеграл, входящий в оператор рассеяния (8) в соответствии с выделенными на рисунке 1 зонами углов:

$$\int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' = \int_{-1}^{-\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' + \int_{-\mu_t}^{\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' + \int_{\mu_t}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu'. \quad (26)$$

Первый и последний интегралы связаны с областью преломления, а второй относится к области ПВО. Для второго интеграла выполним преобразование

$$\int_{-\mu_t}^{\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' = \mu_t \int_{-1}^1 Q_k^m(v) C^m(\tau, v) dv, \quad \mu' = \mu_t v. \quad (27)$$

Для первого и последнего интегралов в (26) сделаем преобразование переменной интегрирования к μ_a по выражению (25)

$$\mu_o = \sqrt{1 - \frac{1 - \mu_a^2}{n_o^2}}, \quad d\mu_o = \frac{\mu_a d\mu_a}{\sqrt{n_o^2 - (1 - \mu_a^2)}}, \quad (28)$$

что преобразует интегралы к виду

$$\int_{-1}^{-\mu_t} Q_k^m(\mu_o) C^m(\tau, \mu_o) d\mu_o = \int_{-1}^0 Q_k^m(\mu_o) C^m(\tau, \mu_o) \frac{\mu_a d\mu_a}{\sqrt{n_o^2 - (1 - \mu_a^2)}}, \quad \mu_o = -\sqrt{1 - \frac{1 - \mu_a^2}{n_o^2}}, \quad (29)$$

$$\int_{\mu_t}^1 Q_k^m(\mu_2) C^m(\tau, \mu_2) d\mu_2 = \int_0^1 Q_k^m(\mu_o) C^m(\tau, \mu_o) \frac{\mu_a d\mu_a}{\sqrt{n_o^2 - (1 - \mu_a^2)}}, \quad \mu_o = \sqrt{1 - \frac{1 - \mu_a^2}{n_o^2}}. \quad (30)$$

Последние два интеграла (29) и (30) можно объединить, что позволяет для интеграла (26) записать следующее выражение:

$$\int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' = \int_{-1}^1 Q_k^m(\mu_o) C^m(\tau, \mu_o) \frac{\mu_a d\mu_a}{\sqrt{n_o^2 - (1 - \mu_a^2)}} + \mu_t \int_{-1}^1 Q_k^m(v) C^m(\tau, v) dv. \quad (31)$$

Соответственно, интеграл рассеяния будет представлен двумя интегралами (31), каждый из которых независимо дискретизируем методом гауссовых квадратур с различными выражениями из-за разницы в подынтегральных выражениях. Пусть значения $\{\mu_{ai}^\pm\}$ есть узлы квадратур для интеграла в атмосфере, упорядоченные по возрастанию модуля косинуса угла визирования. Атмосферные и океанские ординаты \vec{C}_+ , \vec{C}_- соответствуют друг другу по номерам, а углы связаны выражением (28). Второй интеграл в (31) позволяет применить двойную гауссову квадратуру с N_t узлами и впоследствии перейти в этой зоне к двум потокам ординат \vec{C}_+ , \vec{C}_- , которые на границе связаны идеальным зеркальным отражением.

Определим следующие матрицы:

$$\vec{X}_o = \frac{\Lambda}{4} \left[\sum_{k=m}^K (2k+1) x_k Q_k^m(\mu_i^\pm) Q_k^m(\mu_j^\pm) \quad \sum_{k=m}^K (2k+1) x_k Q_k^m(\mu_i^\pm) Q_k^m(\mu_j^-) \right]; \quad (32)$$

$$\tilde{X}_t = \frac{\Lambda}{4} \mu_t \left[\sum_{k=m}^K (2k+1) x_k Q_k^m(\mu_i^\pm) Q_k^m(\mu_l^\pm) \quad \sum_{k=m}^K (2k+1) x_k Q_k^m(\mu_i^\pm) Q_k^m(\mu_l^-) \right]; \quad (33)$$

$$\tilde{W}_o = \text{diag}(w_i^o), \quad \tilde{W}_t = \text{diag}(w_l), \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} \mu_i^+ & 0 \\ 0 & \mu_i^- \end{bmatrix}, \quad \mu_i^+ = \begin{bmatrix} \mu_o^+ & \mu_t^+ \end{bmatrix}, \quad \mu_i^- = \begin{bmatrix} \mu_t^- & \mu_o^- \end{bmatrix}, \quad (34)$$

где $\{\mu_j^\pm\}$, $j \in [1, N/2]$, $N_a = N_o \equiv N$; $\{\mu_l^\pm\}$, $l \in [1, N_t/2]$. Отметим, что $i \in [1, (N+N_t)/2]$, т.е. обе матрицы \tilde{X} прямоугольные. Определим новую матрицу (в формате MATLAB):

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_t \tilde{W}_t^- & \tilde{X}_o \tilde{W}_o^- & \tilde{X}_o^+ \tilde{W}_o^+ & \tilde{X}_t^+ \tilde{W}_t^+ \end{bmatrix}, \quad (35)$$

и введем вектор-столбцы

$$\vec{C}_+ = \begin{bmatrix} \vec{C}_o^+ \\ \vec{C}_t^+ \end{bmatrix}, \quad \vec{C}_- = \begin{bmatrix} \vec{C}_t^- \\ \vec{C}_o^- \end{bmatrix} \quad (36)$$

и аналогичные им для источников \vec{F} .

В этом случае матричное УПИ полностью сохранит вид (9), а решение (12). Для введенных векторов граничные условия на френелевской границе в зоне ПВО можно записать в следующем виде:

$$\vec{C}_t^+(0) = \vec{C}_t^-(0), \quad (37)$$

для зоны Френеля

$$\vec{C}_o^+(0) = \tilde{\rho}_F \vec{C}_o^-(0), \quad (38)$$

где $\tilde{\rho}_F = \text{diag}(\rho_F(\mu_i))$.

Объединяя выражения (37) и (38), граничное условие на верхней френелевской границе можно представить в виде

$$\vec{C}^+(0) = \tilde{\rho}_o \vec{C}^-(0), \quad \vec{C}^\pm = \begin{bmatrix} \vec{C}_t^\pm \\ \vec{C}_o^\pm \end{bmatrix}, \quad \tilde{\rho}_o = \begin{bmatrix} \tilde{1} & 0 \\ 0 & \tilde{\rho}_F \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Тем самым с разделением лучей в среде на преломленные и область ПВО, с учетом закона Снеллиуса, френелевское отражение также удалось свести к матрице рассеяния. Соответственно, описание переноса излучения в стопке рассеивающих и отражающих слоев сведено к совокупности обобщенных звездных произведений.

Анизотропная часть решения

Эффективность алгоритмов работы с матрицами – сложение, произведение, нахождение обратной матрицы – определяется размером матрицы, которая в нашем решении зависит от близости углового распределения РЧ к изотропному, что, в свою очередь, зависит от того, насколько близко АЧ к точному. Мы предлагаем в качестве АЧ выбрать малоугловую модификацию метода сферических гармоник (МСГ) [17, 18]. МСГ является наиболее общей формой малоуглового приближения [18], описывает все особенности точного решения в произвольной геометрии. Для случая плоского мононаправленного пучка АЧ в МСГ допускается, что азимутальная асимметрия пренебрежимо мала и решение представляется в виде разложения по полиномам Лежандра относительно направления падения пучка:

$$L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} l_k(\tau) P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}_0), \quad (40)$$

что в соответствии с методом сферических гармоник приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mu_0}{2k+1} \frac{d}{d\tau} [(k+1)l_{k+1}(\tau) + kl_{k-1}(\tau)] + (1 - \Lambda x_k)l_k(\tau) = 0, \quad \mu_0 = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}}). \quad (41)$$

Обычно систему (41) решают, делая ее конечной, положив $l_k(\tau) = 0$ для $\forall k$, большего некоторого N . Однако очевидно, что такой подход сглаживает анизотропию и устраниет все особенности решения.

Угловое распределение АЧ, включая особенности, сосредоточено в направлении источника $\hat{\mathbf{I}}_0$, что в соответствии со свойством масштабирования связи спектра и оригинала [19] позволяет предположить, что коэффициенты $l_k(\tau)$ медленно монотонно убывают от k . Это позволяет ввести

непрерывную функцию $l(k, \tau)$, которая в целочисленных точках $l_k(\tau) = l(k, \tau)$. Поскольку $l(k, \tau)$ медленно монотонно убывает, то ее можно разложить в ряд Тейлора, сохраняя два первых члена:

$$l(k \pm 1, \tau) \approx l(k, \tau) \pm \frac{\partial l(k, \tau)}{\partial k}. \quad (42)$$

Подстановка (42) в (41) приводит к уравнению в частных производных первого порядка

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial \tau} l_k(\tau) + \frac{1}{2k+1} \frac{\partial^2 l_k(\tau)}{\partial \tau \partial k} = -(1 - \Lambda x_k) l_k(\tau). \quad (43)$$

С учетом медленной монотонной зависимости $l_k(\tau)$ от k вторым членом в (43) можно пренебречь, что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, имеющему аналитическое решение

$$l_k(\tau) = \exp(-(1 - \Lambda x_k)\tau/\mu_0). \quad (44)$$

Рисунок 2 наглядно иллюстрирует гипотезу (42) – сравнение результатов численных расчетов $l_k(\tau)$ по методу сферических гармоник с решением (44) для оптической глубины $t=2$ среды с $L=0.8$ и индикатрисой Хенни-Гринстейна $g=0.97$.

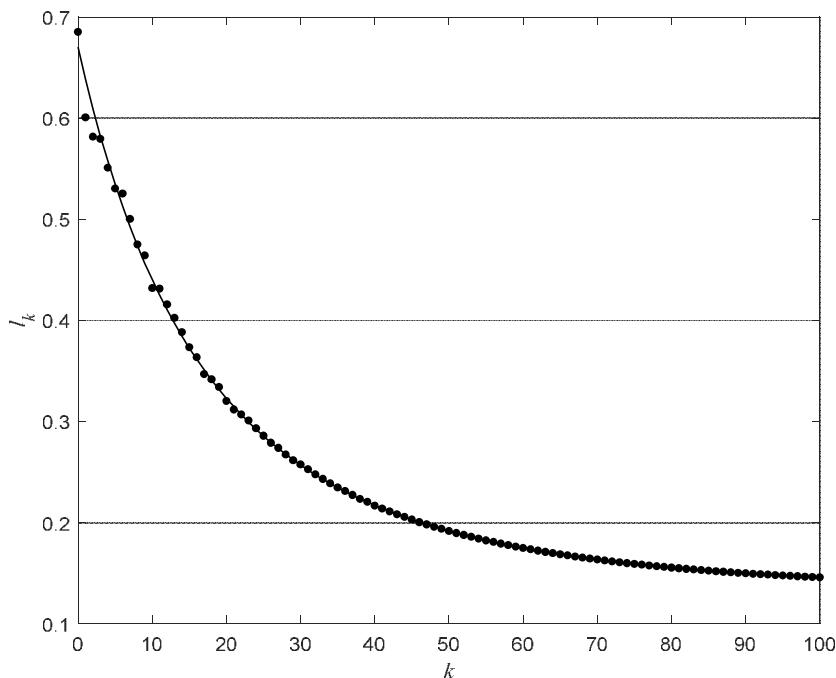


Рисунок 2. Сравнение коэффициентов разложения углового распределения яркости по полиномам Лежандра $l_k(\tau)$, вычисленных численно (точки) и в МСГ (сплошная линия)

В работе [20] исследованы свойства МСГ. Показано, что представление (42) позволяет получить в рамках МСГ решение в произвольной геометрии, а МСГ является наиболее общей формой малоугловых приближений.

Однако во все выражение в нашей модели входит не сама АЧ, а функция источников

$$F(\tau, \mu, \varphi) = -\mu \frac{dL_a(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} - L_a(\tau, \mu, \varphi) + \frac{\Lambda}{4\pi} \int x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L_a(\tau, \mu', \varphi') d\hat{\mathbf{l}}'. \quad (45)$$

Подставляя в (45) ряд (40) с учетом решения (44) и переходя в дискретное представление – разложение в ряд Фурье по азимуту и дискретным ординатам, получим

$$\bar{F}_m(\tau) = \left(\bar{M}/\mu_0 - \bar{1} \right) \sum_{k=m}^K \frac{2k+1}{4\pi} d_k q_k \bar{Z}_k(\tau_1 + \tau) \bar{Q}_k^m + \Lambda e^{-(\tau_1 + \tau)/\mu_0} \left(\bar{1} - \bar{M}/\mu_0 \right) \sum_{k=m}^K \frac{2k+1}{4\pi} x_k q_k \bar{Q}_k^m, \quad (46)$$

где $q_k \equiv Q_k^m(\mu_0)$, $\bar{Q}_k^m = [Q_k^m(\mu_i)]$, $\bar{Z}_k(\tau) = e^{-(1 - \Lambda x_k)\tau/\mu_0} - e^{-\tau/\mu_0}$.

Достоинством (46) является аналитическая простота – ряд по полиному Лежандра, что упрощает расчет всех выражений модели отражения. Количество членов ряда K определяется индикатрисой рассеяния, но поскольку суммирование ряда однократное, то любая степень анизотропии не усложняет расчет.

Для оценки точности и эффективности сформулированной модели отражения был проведен расчет сравнения угловых распределений яркости отраженного и прошедшего излучений для слоя без границ, разбитого на случайное количество слоев произвольной толщины с оптическими параметрами исходного слоя так, что их суммарная оптическая толщина не изменялась. Сравнение проводилось с расчетами аналогичных распределений для однородного слоя той же оптической толщины по известным и принятым в теории переноса программам [21]. При любом количестве слоев расчеты совпадали с машинной точностью. Отметим, что время счета программы по описанному в настоящей работе методу линейно зависело от числа слоев разбиения.

Для проверки учета границ рассмотрим прозрачную пластину с ламбертовским дном и френелевской границей сверху. Если подставить соответствующие значения матриц отражения и пропускания из раздела «Границные условия» в выражения (17), (19), то в результате несложных преобразований получим

$$\tilde{C}^+(0_+) = \tilde{\tau}_F \tilde{R}_L \tilde{F}_- + \tilde{\tau}_F \left(\tilde{I} - \tilde{\rho}_F \tilde{R}_L \right)^{-1} \tilde{\rho}_F \tilde{F}_-, \quad (47)$$

что полностью соответствует физике процесса переноса излучения в такой пластине – первый член соответствует отражению от ламбертовского дна, а второй – многократным переотражениям в пластине от границ.

Оценка точности метода сравнением с отражением реальных поверхностей вызывает существенные проблемы из-за отсутствия оптических параметров среды отражения. Подбор параметров среды дает точность сравнения для угловых распределений около 20 %.

Обсуждение результатов

В настоящей работе сформулирована комплексная модель отражения и пропускания плоскими поверхностями. Ключевое отличие от существующих аналогов – явное выделение анизотропной составляющей решения на основе малоугловой модификации метода сферических гармоник (МСГ). Это обеспечивает:

1) высокую эффективность – время расчёта полного углового распределения яркости отражённого и прошедшего излучения для плоского слоя среды с отражением на границах не превышает сотых долей секунды на стандартном ноутбуке;

2) отсутствие ограничений на степень анизотропии рассеяния (например, для частиц произвольного размера). Влияние формы частиц на распределение яркости несущественно, значительно проявляется в поляризации излучения [7], что представляется дальнейшим развитием модели [18].

Нерассмотренными остались шероховатости границ. Здесь необходимо выделить [22] два случая: малых шероховатостей (без затенения друг друга) и больших шероховатостей. Второй случай не соответствует предложенной модели и требует отдельного исследования. В случае малых шероховатостей они представляются набором микрограней, с функцией распределения $W(\hat{n})$ нормалей \hat{n} . В этом случае наша модель полностью сохраняет свою справедливость, но формулы Френеля (2) умножаются на $W(\hat{n})$.

Хотя модель обеспечивает высокую точность, её использование в компьютерной графике требует предварительной калибровки. Для упрощения предлагаются:

- 1) измерение отражательных характеристик реальных материалов;
- 2) подбор параметров модели по экспериментальным данным;
- 3) аппроксимация результатов упрощёнными BRDF-моделями для интеграции в рендереры.

Заключение

Сущность предложенной модели основана на представлении решения на АЧ и РЧ. Правильное определение АЧ существенно повышает эффективность модели, но приводит к появлению функции источников от невязки АЧ до точного. Наилучшим способом выделения АЧ является МСГ. Расчет многослойной модели возможен на основе МОМ, однако требует модификации операции звездного произведения.

Учет френелевского отражения на границе возможен в рамках МОМ при отдельном выделении в отраженном излучении зоны ПВО. В этом случае сохраняется схема МОМ. В ламбертовском отражении появляется функция источников, связанная с отражением АЧ.

Математическую модель отражения можно считать полностью завершенной. В развитие можно включить поляризацию, которая приводит к векторному УПИ, однако в соответствии с [18] вся схема сохраняется, но вектора и матрицы увеличиваются в 4 раза в соответствии с параметрами Стокса.

Разработанная модель, в случае ее реализации, имеет потенциальную возможность обеспечить эффективный и точный расчёт отражения и пропускания излучения, включая сложные случаи анизотропного рассеяния. Её ключевые преимущества:

- высокая скорость вычислений – с учетом ограниченности сравнений программы по точности все же можно предположить, что метод обеспечит высокую скорость вычислений (доли секунды для полного углового распределения);
- отсутствие принципиальных ограничений на степень анизотропии;
- гибкость (возможность расширения на векторный случай и многослойные системы).

Для внедрения в приложения (например, фотореалистичный рендеринг) требуется дальнейшая работа по параметризации модели на основе экспериментальных данных и, как следствие, разработка BRDF-аппроксимаций.

Таким образом, модель представляет собой законченный теоретический инструмент с широкими возможностями для практического применения.

Список литературы

1. Computer Graphics: Principles and Practice / Hughes J.F., van Dam A., McGuire M., et al. Reading, MA: Addison-Wesley, 2013. 1263 p.
2. Pharr M., Jakob W., Humphreys G. Physically Based Rendering: from theory to implementation. Cambridge, MA: Elsevier Inc., 2017. 1233 p.
3. Pokrowski G.I. Zur Theorie der diffusen Lichtreflexion // Zeit. f. Physik. 1924. B.30. S.66-72.
4. Thomas G.E., Stamnes K., Stamnes J.J. Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean. Cambridge: University Printing House, 2017. 512 p.
5. Stam J. An illumination model for a skin layer bounded by rough surfaces // Rendering Techniques. Proc. Eurographics Workshop, London, United Kingdom, June 25–27, 2001. P.39–52.
6. A comprehensive framework for rendering layered materials / Jakob W., d'Eon E., Jakob O., Marschner S. // ACM Transactions on Graphics. 2014. Vol. 33, no. 4. Article 118.
7. Дейрменджян Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. 165 с.
8. Harshvardhan Independent Pixel and Monte Carlo Estimates of Stratocumulus Albedo / Cahalan R.F., Ridgway W., Wiscombe W.J., Gollmer S. // Jour. Atm. Sci. 1994. Vol. 51, no. 24. P. 3776-3790.
9. Гермогенова Т.А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986. 272 с.
10. Канторович Л.В. О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей // Математический сборник. 1934. Т. 41, вып. 2. С. 235–245.
11. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Complete matrix solution of radiative transfer equation for pile of horizontally homogeneous slabs // Journ. Quan. Spec. Rad. Trans. 2011. Vol. 112. P.1141–1148.
12. Modelling reflection from real surfaces / Basov A., Boos G., Budak V., Grimalo A. // CEUR Workshop Proceedings. 2021. Vol. 3027. P. 800–808.
13. Analysis of the discrete theory of radiative transfer in the coupled “ocean–atmosphere” system: current status, problems, and development prospects / Afanas'ev V.P., Basov A.Yu., Budak V.P., Efremenko D.S., and Kokhanovsky A.A. // J. Mar. Sci. Eng. 2020. Vol. 8, 202.
14. Shettle E.P., Green A.E.S. Multiple scattering calculation of the middle ultraviolet reaching the ground. Appl. Opt. 1974. Vol. 13, no. 7. P. 1567-1581.
15. Plass G.N., Kattawar G.W., Catchings F.E. Matrix operator theory of radiative transfer // Appl. Opt., 1973. Vol. 12. P. 314-329.
16. Redheffer R.M. The relation of transmission-line theory to scattering and transfer // J. Math, and Phys. 1962. Vol. 41, no. 1. P. 1–41.
17. Будак В.П. Малоугловая модификация метода сферических гармоник для расчёта светового поля бесконечно широкого пучка в мутных средах // Сб. науч. трудов. № 106. М.: Моск. энерг. ин-т, 1986. С. 20-25.
18. Budak V.P., Korkin S.V. On the solution of a vectorial radiative transfer equation in an arbitrary three-dimensional turbid medium with anisotropic scattering // Journ. Quan. Spec. Rad. Trans. 2008. Vol. 109. P. 220–234.
19. Титчмарш Э.Ч. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. 418 с.

-
- 20. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering // Light Scattering Reviews 5: Single Light Scattering and Radiative Transfer / ed. A.A. Kokhanovsky. Springer Praxis Books, 2010. P.147-204.
 - 21. Benchmark results in vector atmospheric radiative transfer / Kokhanovsky A.A., et al. // Journ. Quan. Spec. Rad. Trans. 2010. Vol. 111. P. 1931–1946.
 - 22. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.