

# Автоматизированное моделирование рабочего пространства плоского двухзвенного манипулятора

Т.А. Шевелева<sup>1</sup>, А.А. Ляшков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Омский государственный технический университет, проспект Мира 11, город Омск, 644050, Россия

## Аннотация

Проведено исследование на плоскости облака точек, заданных аналитическими уравнениями и определяющими положение центра схвата двухмерного манипулятора. Установлено, что облако точек можно представить двумя семействами окружностей: эксцентрических и концентрических. Выполненное отображение этих окружностей в пространство позволило получить две  $U$  и  $V$  – поверхности. Установлено, что границами рабочего пространства механизма, в этом случае, являются дискриминанты  $U$  и  $V$  – поверхностей. Проведенный анализ таких поверхностей и их дискриминант предоставили возможность разработки алгоритмов и программ автоматизированного моделирования рабочего пространства манипулятора. Принципиальным отличием полученных результатов от известных является то, что предложенные алгоритмы и программы выполняют решение как прямой, так и обратной задачи кинематики данного механизма. Все этапы моделирования выполняются с необходимой точностью и визуализированы.

## Ключевые слова

Компьютерное моделирование, манипуляторы, рабочее пространство, границы рабочего пространства.

# Automated Modeling of the Workspace of a Two-Link Planar Manipulator

T.A. Sheveleva<sup>1</sup>, A.A. Lyashkov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Omsk State Technical University, Mira Avenue 11, Omsk, 644050, Russia

## Abstract

A study was carried out on the plane of a cloud of points specified by analytical equations that determine the position of the grip center of a two-dimensional manipulator. It has been established that a cloud of points can be represented by two families of circles: eccentric and concentric. The completed mapping of these circles into space made it possible to obtain two  $U$  and  $V$  surfaces. It has been established that the boundaries of the working space of the mechanism, in this case, are the discriminants of the  $U$  and  $V$  surfaces. The analysis of such surfaces and their discriminants provided the opportunity to develop algorithms and programs for automated modeling of the manipulator's workspace. The fundamental difference between the results obtained and the known ones is that the proposed algorithms and programs solve both the direct and inverse problems of the kinematics of a given mechanism. All modeling stages are performed with the required accuracy and visualized.

## Keywords

Computer modeling, manipulators, workspace, workspace boundaries.

ГрафиКон 2023: 33-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-21 сентября 2023 г., Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия

EMAIL: tatyana0781@mail.ru (Т.А. Шевелева); 3dogibmod@mail.ru (А.А. Ляшков)

ORCID: 0009-0002-2577-8348 (Т.А. Шевелева); 0000-0003-0100-8584 (А.А. Ляшков)



© 2023 Copyright for this paper by its authors.

Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

## 1. Введение

Рабочее пространство является одной из основных характеристик манипулятора.

В известных литературных источниках приводится несколько отличающихся друг от друга определений понятия рабочего пространства манипулятора.

В робототехнике наиболее распространенное определение понятия «рабочего пространства» дано Yi Cao и др. (2011): «Рабочее пространство робота-манипулятора определяется как множество точек, до которых может дотянуться его рабочий орган» [1].

С. Л. Зенкевич отмечает, что рабочее пространство – это «область, в которой может находиться схват в процессе работы» [2].

Но в то же время согласно ГОСТ 25686-85 рабочее пространство манипулятора – это «пространство, в котором может находиться исполнительное устройство при функционировании манипулятора (автооператора, промышленного робота)» [3], а под понятием «исполнительное устройство промышленного робота (автооператора)» понимают «устройство... выполняющее все его двигательные функции», то есть в данном случае рассматривается рабочее пространство всех подвижных звеньев робота.

В своих исследованиях мы понимаем под рабочим пространством двухзвенного манипулятора двухпараметрическое множество точек, заметаемое центром схвата.

Анализ рабочего пространства манипулятора представляет большой интерес, поскольку геометрия рабочего пространства может рассматриваться не только как фундаментальный вопрос для проектирования манипулятора, но и для размещения робота в рабочей среде, а также использоваться для исследования траектории перемещения точки схвата. Основными методами исследования рабочего пространства являются: аналитический, численный, геометро-графический и основанный на использовании инструментария компьютерной графики. В связи с развитием и совершенствованием компьютерных технологий последний метод является наиболее перспективным.

В этой связи актуальными являются исследования, направленные на развитие методов геометрического компьютерного моделирования рабочего пространства рычажных механизмов, применительно к их применению в среде интегрированных систем компьютерной графики.

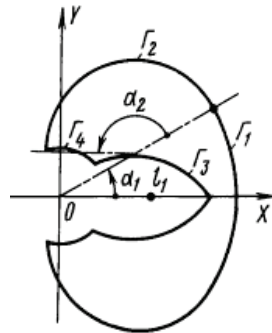
## 2. Постановка задачи

Целью настоящей работы является разработка геометрического обеспечения для автоматизированного моделирования рабочего пространства двухзвенных планарных манипуляторов средствами компьютерной графики.

## 3. Теория

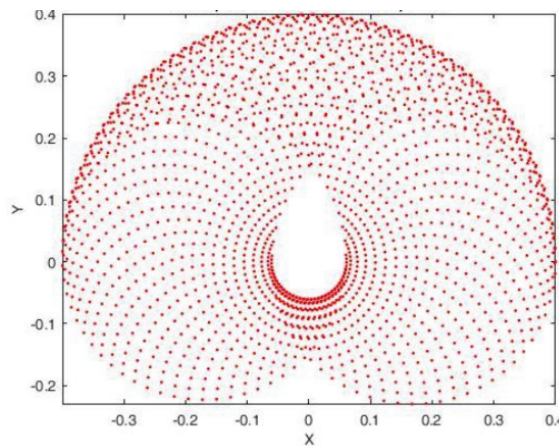
Двухзвенные планарные манипуляторы - это кинематические механизмы с двумя обобщенными координатами. Они полезны, потому что функционируют подобно человеческим рукам. Результаты их анализа позволяют исследовать более сложные движения, когда манипуляторы имеют число независимых параметров более двух.

Одни из первых геометро-графических исследований рабочего пространства заключались в построении границ этого пространства (рисунок 1) [2]. Дальнейшее совершенствование методов исследования направлено на использование средств компьютерной графики, в частности, компьютерной алгебры [4]. В этом случае выполняется моделирование области внутри границ рабочего пространства. Эта область изображается в виде облака точек (рисунок 2) [4]. Однако данные модели мало информативны: зная координаты точки внутри области  $(x, y)$ , нельзя определить значения обобщенных координат  $(u, v)$ , а также нельзя ответить на вопрос: одна или больше пар параметров  $(u, v)$  соответствуют положению точки  $(x, y)$  схвата.

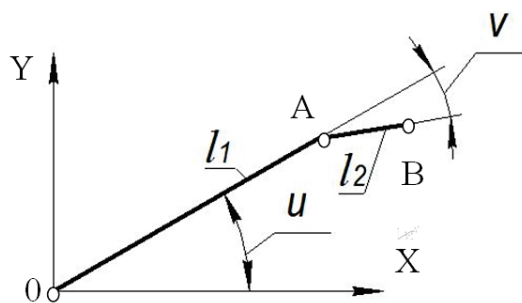


**Рисунок 1** – Границы рабочего пространства двухзвенного плоского манипулятора[2]

Для решения поставленной задачи выполним исследования кинематической схемы (рисунок 3) двухзвенного планарного манипулятора. На этом рисунке заданы длины звеньев  $l_1$  и  $l_2$ , а также углы поворота звеньев  $u$  и  $v$  (обобщенные координаты).



**Рисунок 2** – Геометрическая модель рабочего пространства[4]



**Рисунок 3-** Расчетная схема двухзвенного планарного манипулятора

Аналитические зависимости, связывающие координаты центра схвата с обобщенными координатами, определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos(u) + l_2 \cos(u + v), \\ y &= l_1 \sin(u) + l_2 \sin(u + v), \end{aligned} \tag{1}$$

Эти уравнения определяют двухпараметрическое множество точек (облако) на плоскости. В работе [5] показана возможность выделения из облака точек (1) двух семейств окружностей, которые в дальнейшем отображены в трехмерное пространство. В результате получены модели двух поверхностей. Каркасная модель U-поверхности (канальная винтовая поверхность) приведена на рисунке 4, а ее уравнения имеют вид

$$x = l_1 \cos(u) + l_2 \cos(u + v), \tag{2}$$

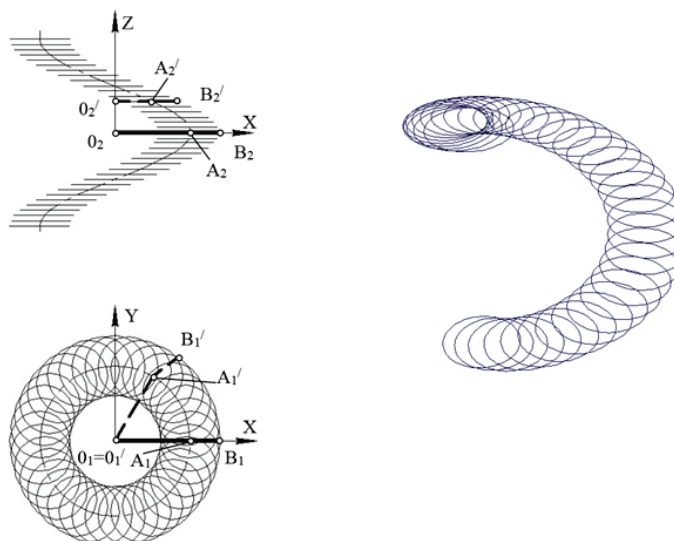
$$y = l_1 \sin(u) + l_2 \sin(u + v),$$

$$z_B = Pu$$

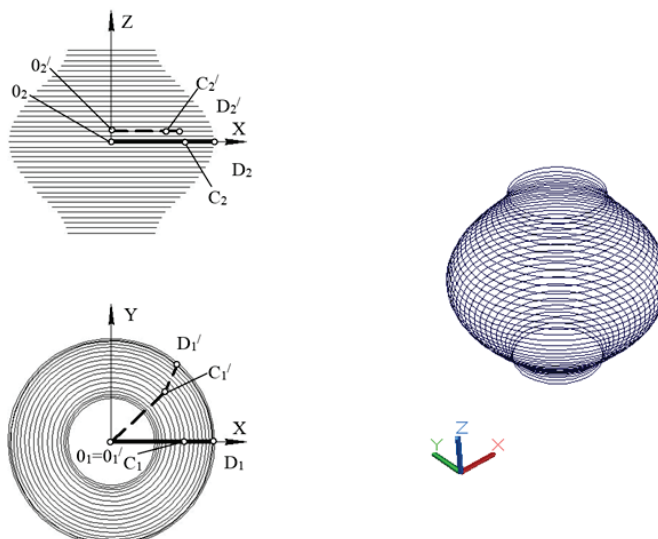
где  $P$  – некоторая константа.

Модель V-поверхности (поверхность вращения) приведена на рисунке 5, а ее уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos(u) + l_2 \cos(u + v), \\ y &= l_1 \sin(u) + l_2 \sin(u + v), \\ z_B &= Pv \end{aligned} \tag{3}$$



**Рисунок 4** - Каркасная модель U-поверхности  $-180^\circ \leq u \leq 180^\circ$ ,  $-180^\circ \leq v \leq 180^\circ$



**Рисунок 5** - Каркасная модель V-поверхности:  $-180^\circ \leq u \leq 180^\circ$ ,  $-180^\circ \leq v \leq 180^\circ$

Из рисунков 4 и 5 визуально следует, что геометрическим образом рабочего пространства являются два семейства окружностей (два диска) – эксцентрических и концентрических.

Границами семейств этих окружностей являются дискриминанты поверхностей, а соответствующие им линии на поверхности – криминанты.

В точках криминанты касательные плоскости к поверхности параллельны координатной оси OZ, что записывается в виде

$$\begin{vmatrix} f_{1u} & f_{2u} \\ f_{1v} & f_{2v} \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

или

$$F(u, v) = f_{1u} \cdot f_{2v} - f_{1v} \cdot f_{2u} = 0, x = (l_1 + l_2) \cos(u), \quad (5)$$

Для уравнений (2) получим:

$$f_{1u} = -l_1 \cdot \sin(u) - l_2 \cdot \sin(u + v),$$

$$f_{2u} = l_1 \cdot \cos(u) + l_2 \cdot \cos(u + v),$$

$$f_{1v} = -l_2 \cdot \sin(u + v),$$

$$f_{2v} = l_2 \cdot \cos(u + v).$$

После подстановки полученных зависимостей в уравнение (5) и преобразований, получим  $\sin(v) = 0$ ,

где  $v = \pi n$ , а  $n = -1, 0, 1$ .

Тогда для U-поверхности при  $v=0^\circ$  криминантой является цилиндрическая винтовая линия, уравнения которой имеют вид

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2) \cos(u), \\ y &= (l_1 + l_2) \sin(u), \\ z &= Pu \end{aligned} \quad (6)$$

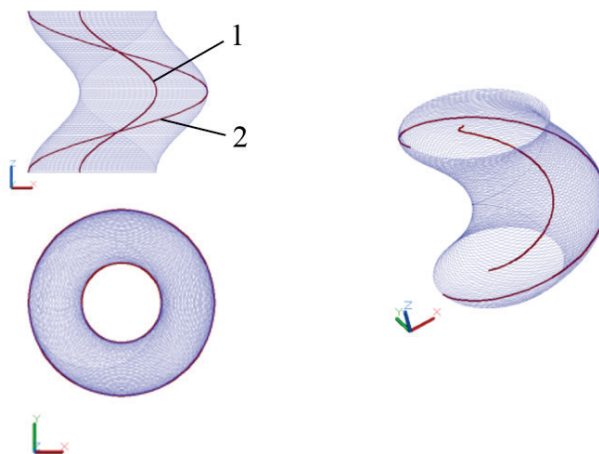
В результате, дискриминантой поверхности будет окружность радиуса  $l_1+l_2$ .

При  $v=\pm 180^\circ$  получаем уравнения еще одной винтовой линии

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2) \cos(u), \\ y &= (l_1 - l_2) \sin(u), \\ z &= Pu \end{aligned} \quad (7)$$

а её проекцией на координатной плоскости XY будет окружность радиуса  $l_1-l_2$ .

Модели U-поверхности, а также ее криминанты и дискриминанты, приведены на рисунке 6.



**Рисунок 6** - Криминантные линии на U-поверхности; 1 – винтовая линия при  $v=\pm 180^\circ$ ,

2 – винтовая линия при  $v=0^\circ$

Для V-поверхности при  $v=0^\circ$  получаем уравнения окружности радиуса  $(l_1+l_2)$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2) \cos(u), \\ y &= (l_1 + l_2) \sin(u), \\ z &= Pv \end{aligned} \quad (8)$$

а при  $v=\pm 180^\circ$  имеем уравнения двух окружностей радиуса  $(l_1 - l_2)$

$$\begin{aligned}x &= (l_1 - l_2) \cos(u), \\y &= (l_1 - l_2) \sin(u), \\z &= Pv\end{aligned}\quad (9)$$

Модели V-поверхности и ее кривантных линий показаны на рисунке 7.

Из рисунков 6 и 7, а также полученных аналитических зависимостей, следует, что рабочее пространство манипулятора представляет собой два диска, границами которого являются две окружности радиусов  $(l_1 - l_2)$  и  $(l_1 + l_2)$ . Если в известных литературных источниках такие диски представлены некоторыми облаками точек, то из полученных выше результатов следует, что это два семейства однопараметрических окружностей. Для U-поверхности – эксцентрических, а для V-поверхности – концентрических.

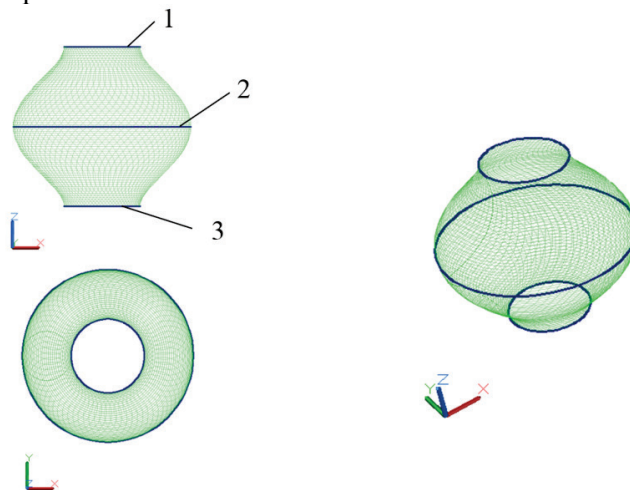
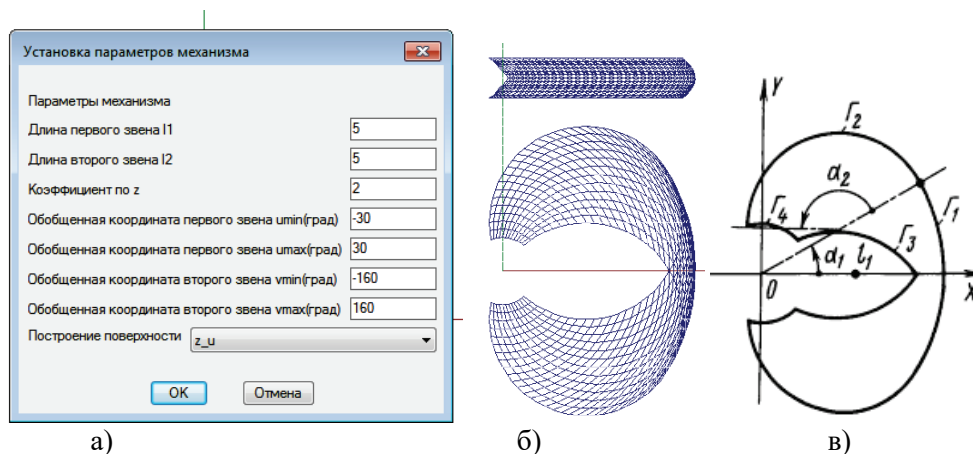


Рисунок 7 - Кривантные линии на V-поверхности; 1 – окружность при  $v=180^\circ$ , 2 – окружность при  $v=0^\circ$ , 3 – окружность при  $v=-180^\circ$

#### 4. Результаты экспериментов

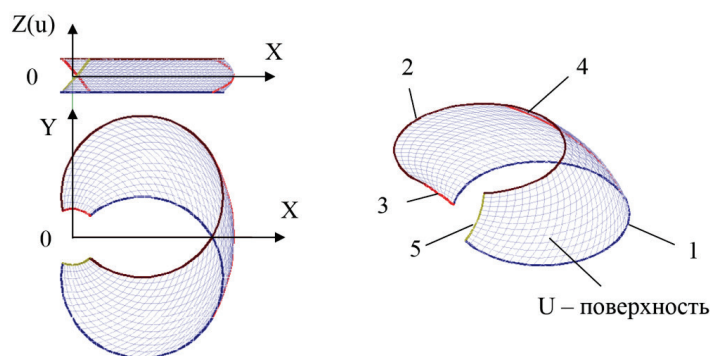
Как известно, в промышленных манипуляторах обобщенные координаты изменяются в определенных диапазонах. Изложенные выше результаты позволяют получать и анализировать компьютерные модели при задании необходимых границ изменения независимых параметров в автоматизированном режиме. Так, по разработанным алгоритмам и программам получены модели рабочего пространства манипулятора при изменении параметров  $u$  и  $v$ :  $-30^\circ \leq u \leq 30^\circ$ ,  $-160^\circ \leq v \leq 160^\circ$ . Эти модели показаны на рисунках 8-12. В процессе моделирования в начале в диалоговом окне задаются параметры манипулятора (рисунок 8а). Затем следует выбрать вид модели поверхности: U или V - поверхности. На рисунке 8б представлены проекции 3D модели U – поверхности. Для подтверждения достоверности полученных результатов на рисунке 8в приведены границы модели рабочего пространства манипулятора, известных из [2], для тех же значений обобщенных координат. Сравнивая известный результат с выполненным в настоящей работе, получаем, что границы рабочего пространства совпадают в обоих решениях. При этом 3D модель обладает существенной информативностью. Некоторые другие преимущества такого моделирования представлены на иллюстрациях, приведенных ниже.

Рисунки 9 и 10 визуализируют 3D-модели и U-поверхности и V-поверхности, соответственно, а также границы этих поверхностей. Рабочее пространство ограничено кривантными линиями поз. 4 и линиями, определяющими границы обобщенных координат поз. 1, 2, 3, 5.



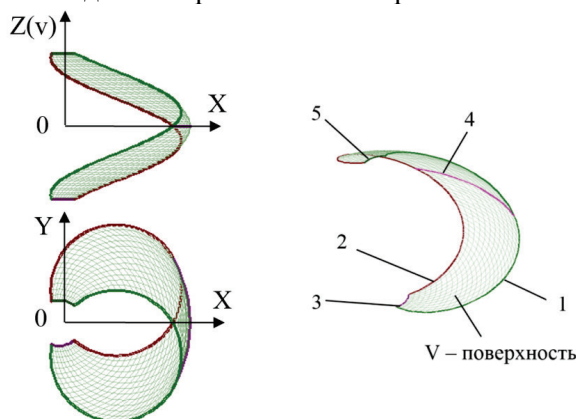
а) диалоговое окно программы для ввода данных; б) проекции 3D модели U – поверхности (результат выполнения программы); в) границы рабочего пространства [2]

**Рисунок 8** – Моделирование рабочего пространство манипулятора;

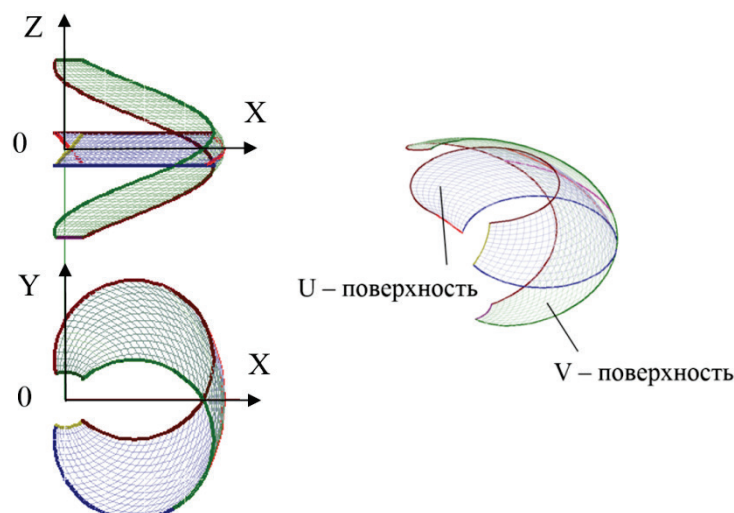


**Рисунок 9** – Рабочее пространство манипулятора при:  $-30^\circ \leq u \leq 30^\circ, -160^\circ \leq v \leq 160^\circ$ ; длины звеньев одинаковые; 1 -  $u=-30^\circ$ , 2 -  $u=30^\circ$ , 3 -  $v=160^\circ$ , 4 -  $v=0^\circ$ , 5 -  $v=-160^\circ$

На рисунке 11 показаны совмещенные 3D - модели U- и V- поверхностей, а также показаны границы дискриминант этих поверхностей. Из рисунка следует, что горизонтальные проекции линий этих поверхностей совпадают и представляют собой стыкованные дуги окружностей, что подтверждается исследованиями, приведенными в работе [2]. Фронтальные проекции этих линий не совпадают, так как находятся на различных поверхностях.

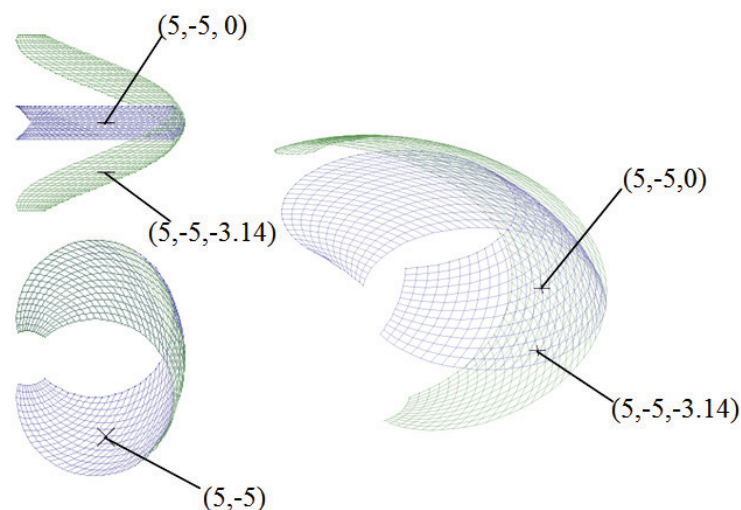


**Рисунок 10** - Рабочее пространство манипулятора при:  $-30^\circ \leq u \leq 30^\circ, -160^\circ \leq v \leq 160^\circ$ ; длины звеньев одинаковые; 1 -  $v=160^\circ$ , 2 -  $v=0^\circ$ , 3 -  $v=-160^\circ$ , 4 -  $u=30^\circ$ , 5 -  $u=-30^\circ$



**Рисунок 11** - Рабочее пространство манипулятора для:  $-30^\circ \leq u \leq 30^\circ$ ,  $-160^\circ \leq v \leq 160^\circ$ ; длины звеньев одинаковые; U- и V-поверхность совмещены

Принципиальным отличием полученных результатов от известных заключается в том, разработанные алгоритмы и программы позволяют решать и обратную задачу кинематики. Определение обобщенных координат (углов поворота звеньев) манипулятора по известным координатам  $(x, y)$  точки центра схвата, иллюстрируется рисунком 12. Так, задав точку центра схвата с координатами  $(x, y)$  на горизонтальных проекциях U- и V – поверхностей, на фронтальных проекциях этих поверхностей определяем обобщенные координаты  $u$  и  $v$ . И наоборот, зная  $(u, v)$ , можно определить  $(x, y)$ . Следует отметить, что для некоторых фрагментов поверхностей существует два решения  $(u, v)$  для одной и той же точки  $(x, y)$ . Для иллюстрации таких возможностей ниже приводится несколько примеров.



**Рисунок 12** – Определение обобщенных координат  $(u, v)$  на U- и V-поверхностях

На горизонтальной проекции моделей U- и V-поверхностей задав точку 1 (рисунок 12) с координатами  $(x, y) = (5, -5)$ , получим на U- и V-поверхностях третью координату  $z(u) = 0$ ,  $z(v) = -3.14$ , или  $u = 0^\circ$  и  $v = -90^\circ$ .

Аналогично определяются координаты точки 2, у которой  $(x, y) = (9.5, 0.1)$ , эта точка находится в области, где ей соответствуют две пары обобщенных координат:  $z(u) = 0.649$  и  $z(v) = 1.256$ ;  $z(u) = 0.6071$  и  $z(v) = -1.256$ . Для первой конфигурации на U-поверхности точка 2 имеет координаты  $(9.5, 0.1, 0.649)$ , а на V-поверхности –  $(9.5, 0.1, 1.256)$ ; для второй конфигурации на U-поверхности –  $(9.5, 0.1, 0.6071)$ ; на V-поверхности –  $(9.5, 0.1, -1.256)$ .



## 5. Выводы и заключение

Выполненные исследования  $U$  и  $V$  – поверхностей, полученных отображением двух семейств кривых на плоскости в пространство и определяющих облако точек, задающих положение центра схвата двухмерного манипулятора, позволили получить ряд новых результатов. Так, установлено, что границами рабочего пространства механизма, являются дискриминанты  $U$  и  $V$  – поверхностей. Проведенный анализ этих поверхностей и их дискриминант предоставили возможность разработки алгоритмов и программ автоматизированного моделирования рабочего пространства манипулятора. Принципиальным отличием полученных результатов от известных является то, что предложенные алгоритмы и программы выполняют решение как прямой, так и обратной задачи кинематики данного механизма. Все этапы моделирования выполняются с необходимой точностью и визуализированы.

## 6. Список источников

- [1] Зенкевич С. Л. Основы управления манипуляционными роботами: учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности "Роботы и робототехнические системы" / С. Л. Зенкевич, А. С. Ющенко. Москва: Изд-во МГТУ, 2004. 478 с.
- [2] Yi Cao, Ke Lu, and Yi Zang Accurate Numerical Methods for Computing 2D and 3D Robot Workspace First published online January 1, 2011.
- [3] ГОСТ 25686-85 Манипуляторы, автооператоры и промышленные роботы. Термины и определения.
- [4] Thu Zar, Phyo Wai Lin, Dr. Su Yin Win Workspace Analysis of Two-link Planar Manipulator //International Journal of Science and Engineering Applications Volume 8–Issue 08,380-383, 2019, ISSN:-2319–7560.
- [5] Lyashkov A.A., Sheveleva T.A. Geometric modeling in the problems of lever mechanism kinematics research // Journal of Physics: Conference Series. 14. Сер. "XIV International Scientific and Technical Conference "Applied Mechanics and Systems Dynamics", AMSD 2020" 2021. С. 012053.