

Оптимизированное размещение объектов нерегулярной формы на основе выбора наилучших вариантов ориентации ортогональных многогранников

В.А. Чеканин^{1,2}

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Профсоюзная ул., 65, Москва, 117997, Россия

² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Вадковский пер., 1, Москва, 127994, Россия

Аннотация

Статья посвящена вопросу повышения качества решений NP-трудных задач оптимизированной расстановки плоских и объёмных объектов нерегулярной формы. Для быстрого построения компоновки большого числа объектов сложной формы решается задача расстановки ортогональных многогранников, полученных посредством вокселизации исходных объектов произвольной геометрии с последующим объединением полученного набора вокселей. Предложена жадная эвристика размещения ортогональных многогранников, реализующая выбор наилучшего варианта ориентации текущего объекта, при котором формируемая компоновка будет наиболее плотной в сравнении с прочими доступными вариантами ориентации. Проведен анализ эффективности применения жадной эвристики размещения на задачах плоского фигурного раскроя и упаковки трехмерных объектов нерегулярной формы. Показано, что предложенная жадная эвристика обеспечивает очень быстрое получение решений высокого качества. Представлены результаты тестирования жадной эвристики размещения при её использовании в составе генетического алгоритма для оптимизации решений задачи компоновки.

Ключевые слова

Задача упаковки, вокселизация, ортогональный многогранник, жадная эвристика, генетический алгоритм.

Optimized Placement of Irregular Shapes Based on the Selection of the Best Orientation Variants for the of Orthogonal Polyhedra

V.A. Chekanin^{1,2}

¹ V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (ICS RAS), 65 Profsoyuznaya street, Moscow, 117997, Russia

² Moscow State University of Technology «STANKIN», 3a Vadkovsky lane, Moscow, 127055, Russia

Abstract

The article is devoted to improving the quality of solutions to NP-hard problems of optimized placement of flat and three-dimensional objects. To quickly build a layout of a large number of objects of irregular shape, the problem of packing orthogonal polyhedra obtained by voxelization of the original objects. A greedy heuristic is proposed that implements the choice of the best orientation variant for the object, in which the resulting layout will be the densest in comparison with other available orientation variants. An analysis of the effectiveness of applying the greedy heuristic on the problems of flat figured cutting and packing of three-dimensional objects of

ГрафиКон 2023: 33-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-21 сентября 2023 г., Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия

EMAIL: vladchekanin@rambler.ru (В.А. Чеканин)

ORCID: 0000-0001-9448-0583 (В.А. Чеканин)



© 2023 Copyright for this paper by its authors.

Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

irregular shape is carried out. It is shown that the proposed greedy heuristic provides very fast high quality solutions. The results of testing the greedy placement heuristic when used as part of a genetic algorithm for optimizing solutions to the layout problem are presented.

Keywords

Packing problem, voxelization, orthogonal polyhedron, greedy heuristic, genetic algorithm.

1. Введение

Задачи оптимизированной расстановки объектов имеют множество практических приложений при решении большого числа задач распределения ресурсов, возникающих при автоматизации процессов в различных отраслях промышленности и производства. Среди наиболее известных областей практического применения решений задач расстановки можно выделить следующие: промышленный раскрой материалов, составление расписаний, распределение памяти и вычислительных ресурсов в многопроцессорных системах, проектирование печатных плат и интегральных схем, моделирование компоновок технологического и бортового оборудования, проектирование компоновок деталей на платформе 3D-принтера, моделирование композиционных материалов и др. [1–4].

Оптимизационные задачи, заключающиеся в поиске наиболее рационального способа размещения некоторого ограниченного набора ресурсов одного вида (объектов) среди ресурсов другого вида (контейнеров), относятся к классу NP-трудных задач раскроя-упаковки, для которых неизвестны точные методы решения полиномиальной сложности [5, 6]. Применение переборных методов точного решения задач дискретной оптимизации на практике оказывается крайне неэффективным из-за значительных затрат вычислительных ресурсов. Поэтому в условиях мелкосерийного и единичного производства наилучший компромисс между качеством получаемого решения и скоростью его нахождения обеспечивают эвристические и метаэвристические методы оптимизации [7–9].

Очевидно, что при размещении объектов нерегулярной формы сложность решения задачи расстановки будет повышена из-за необходимости применения трудоёмких методов анализа геометрии размещаемых объектов и частично сформированной схемы размещения ряда других объектов. Наиболее точное описание расстановки объектов будет получено при использовании ϕ -функций для контроля взаимного расположения размещаемых объектов [10, 11], а также при использовании методов компоновки, основанных на построении годографа вектор-функции плотного размещения [12–14]. Однако их практическое применение сопряжено с проблемой разработки специализированных ϕ -функций для аналитического описания геометрии объектов нестандартной формы, а также ограничено необходимостью применения трудоёмких методов нелинейной оптимизации [10, 15, 16].

Для быстрого получения приближённых решений задач компоновки большого числа плоских и объёмных объектов хорошо зарекомендовали себя алгоритмы размещения, основанные на анализе геометрии дискретизированных объектов, полученных в результате вокселизации аналитически заданных фигур [17] и полигональных моделей [12, 18, 19]. Для повышения скорости размещения вокселизированных объектов выполняется их декомпозиция [20] с получением ортогональных многогранников (ОМ), которые представляют собой составные объекты, образованные из ортогональных объектов в форме параллелепипедов заданной размерности [21], имеющих фиксированное расположение друг относительно друга [22, 23].

Если при решении задачи расстановки допускается поворот объектов, то возникает вопрос выбора наилучшего варианта ориентации каждого объекта внутри пространства размещения, при котором формируемая компоновка будет характеризоваться наибольшей плотностью. В данной работе предлагается жадная эвристика размещения, предложенная для оптимизированной компоновки ОМ.

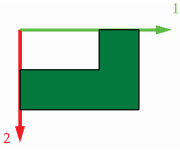
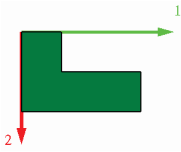
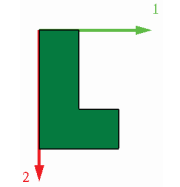
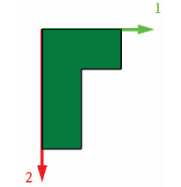
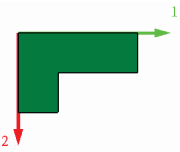
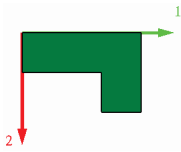
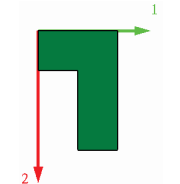
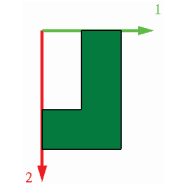
2. Оптимизированное размещение ОМ

2.1. Эвристика оптимизированного размещения ОМ

Для быстрого получения плотной упаковки разработана жадная эвристика (ЖЭ), которая для каждого размещаемого ОМ осуществляет выбор наилучшего варианта его ориентации. При этом под наилучшим вариантом ориентации понимается такой вариант, для которого упаковка, содержащая размещенный объект, будет иметь наименьшую высоту (длину).

Для плоского ОМ, составленного из ортогональных объектов, возможно задание четырёх вариантов ориентации, получаемых в результате его последовательного поворота на углы, кратные 90° . При этом если для ОМ разрешено его отражение относительно горизонтальной или вертикальной оси, то общее число уникальных вариантов ориентации становится равным восьми (таблица 1).

Таблица 1 – Варианты ориентации двухмерного ОМ

Номер	Выполняемая операция	Иллюстрация	Номер	Выполняемая операция	Иллюстрация
1	Отсутствие поворота (ОМ в исходной ориентации)		5	Отражение относительно оси 2	
2	Поворот по часовой стрелке на угол 90°		6	Отражение относительно оси 2 и поворот по часовой стрелке на угол 90°	
3	Поворот по часовой стрелке на угол 180°		7	Отражение относительно оси 2 и поворот по часовой стрелке на угол 180°	
4	Поворот по часовой стрелке на угол 270°		8	Отражение относительно оси 2 и поворот по часовой стрелке на угол 270°	

В результате применения одного или нескольких поворотов трёхмерного ОМ на углы, кратные 90° , общее число возможных вариантов положения его первой оси будет равно шести (рисунок 1, а). При выборе некоторого варианта положения первой оси ОМ, положение его второй оси будет определяться одним из четырёх вариантов (рисунок 1, б), а положение его третьей оси будет найдено однозначно. Таким образом, трёхмерный ОМ без потери формы может принимать один из 24 уникальных вариантов ориентации.

Для задания требуемого варианта ориентации трёхмерного ОМ необходимо осуществить последовательную серию его поворотов относительно координатных осей. Следует отметить, что один и тот же вариант ориентации ОМ может быть получен в результате применения различных последовательных серий поворотов. Для описания серии поворотов используется строка, в которой последовательно перечислены углы поворота вокруг каждой из трёх координатных осей. Например, строка $\{0, -90, 180\}$ означает, что ОМ необходимо повернуть на 90° против часовой стрелки вокруг оси 2 и на 180° по часовой стрелке вокруг оси 3. Этот же вариант ориентации ОМ также будет получен в результате применения следующих серий поворотов: $\{90, -90, 90\}$, $\{180, -90, 0\}$ и $\{-90, -90, -90\}$.

Возможные варианты ориентации трёхмерного ОМ показаны на рисунке 2.

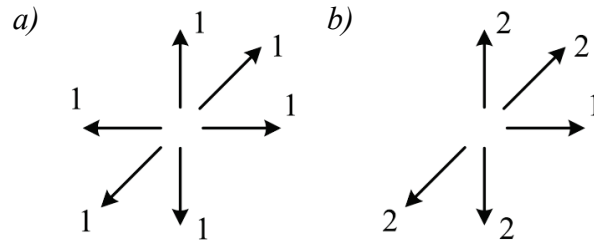


Рисунок 1 – Возможные варианты положения осей трёхмерного ОМ: а) варианты положения оси 1; б) варианты положения оси 2 для выбранного положения оси 1

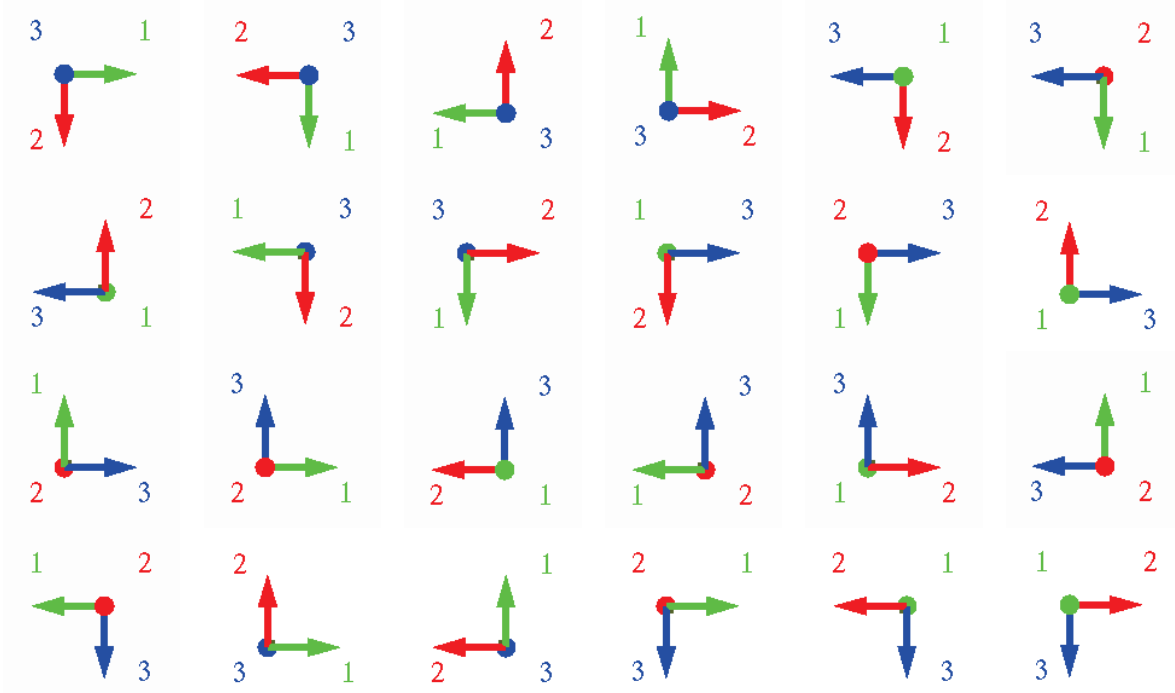


Рисунок 2 – Варианты ориентации осей при повороте трёхмерного ОМ

Алгоритм работы жадной эвристики при размещении некоторого ОМ содержит следующие шаги.

Шаг 1. Установить номер наилучшего варианта ориентации K равным 1.

Шаг 2. Установить номер текущего рассматриваемого варианта ориентации k равным 1.

Шаг 3. Применить к ОМ вариант ориентации k и разместить повернутый ОМ в контейнере.

Шаг 4. Если получена более плотная упаковка в сравнении с вариантом ориентации K при условии $k > 1$, то в переменную K записать значение k .

Шаг 5. Исключить ОМ из контейнера и перейти к следующему текущему варианту ориентации ($k := k + 1$). Если значение k не превышает заданного числа допустимых вариантов ориентации ОМ, то перейти к шагу 3, иначе перейти к шагу 6.


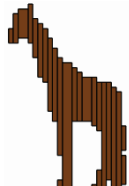







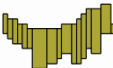



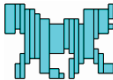



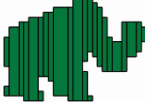

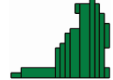
Шаг 6. Применить к ОМ вариант ориентации K и разместить повернутый ОМ в контейнере. Завершить работу алгоритма.

2.2. Вычислительные эксперименты

Тестирование ЖЭ для размещения плоских ОМ проводилось на примере решения задачи фигурного раскроя (плотной упаковки) набора из 100 объектов сложной геометрии десяти

различных типов (каждый вид объекта представлен в решаемой задаче десятью экземплярами), заданных в формате DXF. В таблице 2 приведены типы размещаемых объектов, а также ОМ, полученные в результате вокселизации (растеризации) исходных объектов (в качестве примера показаны ОМ, сформированные при растеризации вокселями двойного размера) и последующей декомпозиции полученных объектов [19]. Область размещения представлена прямоугольником, имеющим фиксированную высоту 300 и максимальную длину 700. Минимизируемой целевой функцией является длина формируемой упаковки.

Таблица 2 – Размещаемые плоские объекты

№ п/п	Исходный объект	Внешние размеры	ОМ	№ п/п	Исходный объект	Внешние размеры	ОМ
1		47×75		6		61×32	
2		21×36		7		42×33	
3		46×25		8		24×30	
4		44×29		9		33×28	
5		57×41		10		40×31	

Результаты тестирования ЖЭ на плоских ОМ, усреднённые по 20 запускам для случайных последовательностей объектов, приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Средняя длина полученной упаковки

Размер вокселя	Размещение без поворотов (N=0)	ЖЭ (N=2)	ЖЭ (N=4)	ЖЭ (N=8 для ОМ, N=2 для ААВВ)	ГА (N=8 для ОМ, N=2 для ААВВ)	ГА+ЖЭ (N=8 для ОМ, N=2 для ААВВ)
1	470,35	441,40	426,65	417,70	446,00	404,00
2	498,00	466,60	450,80	443,30	460,00	420,00
3	508,65	479,85	462,00	456,60	462,00	438,00
4	532,60	504,00	490,40	478,80	492,00	456,00
5	545,75	520,75	499,75	495,75	510,00	475,00
6	548,40	524,10	510,00	498,30	516,00	486,00
7	585,90	575,40	555,80	549,15	567,00	525,00
8	604,40	580,80	565,60	558,40	572,80	536,00
9	636,75	605,70	589,05	584,55	594,00	549,00
10	646,50	614,50	593,00	588,00	600,00	570,00
ААВВ	604,50	588,40	–	–	544,05	–

В эту таблицу также включены результаты тестирования генетического алгоритма (ГА), оптимизирующего последовательность выбора размещаемых объектов, выбранного со следующими параметрами: размер популяции равен 20, параметр стагнации равен 20, максимальная глубина поколений равна 100. В столбце «ГА+ЖЭ» представлены результаты тестирования ГА, применяющего ЖЭ для размещения объектов, полученные за время,

совпадающее со временем работы ГА без использования этой эвристики. В строке «AABB» содержатся результаты решения задачи упаковки минимально ограничивающих ОМ прямоугольников, описанных вокруг исходных объектов. Усреднённые показатели скорости решения задач представлены в таблице 4 (для ГА указано максимальное время, отводимое на решение задачи).

Таблица 4 – Среднее время решения (в секундах)

Размер воксела	Размещение без поворотов ($N=0$)	ЖЭ ($N=2$)	ЖЭ ($N=4$)	ЖЭ ($N=8$ для ОМ, $N=2$ для AABB)	ГА ($N=8$ для ОМ, $N=2$ для AABB)
1	102,72	207,69	348,59	581,79	12000,00
2	4,29	6,83	13,00	20,74	1800,00
3	0,95	1,67	2,67	4,22	1200,00
4	0,49	0,72	1,01	1,48	300,00
5	0,41	0,73	0,70	0,97	300,00
6	0,37	0,47	0,57	0,72	300,00
7	0,32	0,60	0,63	0,83	300,00
8	0,37	0,60	0,61	0,69	300,00
9	0,43	0,47	0,53	0,81	300,00
10	0,48	0,72	0,52	0,68	150,00
AABB	0,09	0,17	–	–	100,00

На рисунке 3 представлена диаграмма, показывающая степень повышения плотности формируемой упаковки при использовании ЖЭ в сравнении с решениями без поворота ОМ. Из диаграммы видно, что увеличение числа анализируемых вариантов ориентации ОМ приводит к гарантированному повышению плотности формируемой упаковки. При этом в среднем анализ двух вариантов ориентации ОМ приводит к увеличению времени решения задачи в 1,6 раз; анализ четырёх вариантов – в 2,0 раз; анализ восьми вариантов – в 3,0 раз.

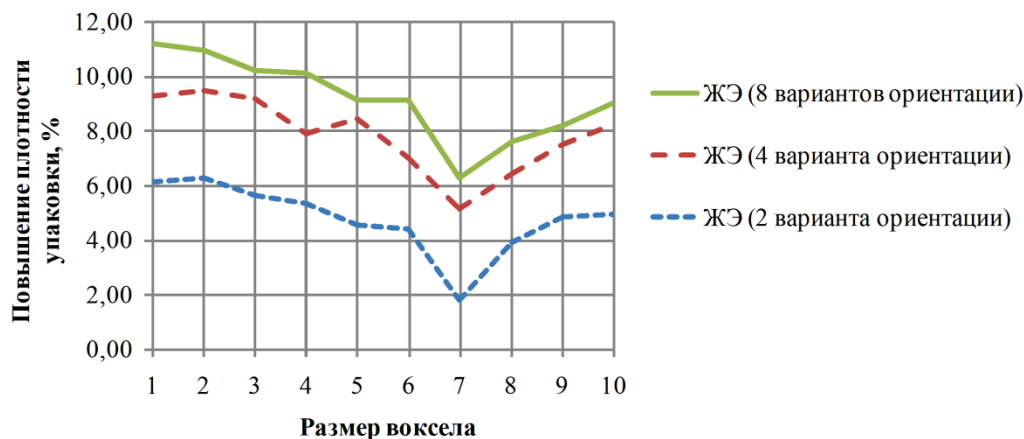


Рисунок 3 – Повышение плотности размещения объектов при использовании ЖЭ

На рисунке 4 представлен пример решения рассмотренной задачи упаковки плоских объектов, полученные ГА и жадной эвристикой при выборе наилучшего из восьми вариантов ориентации ОМ, которые были сформированы при растеризации векторных моделей вокселами единичного размера.

Тестирование ЖЭ для размещения трёхмерных объектов было проведено на тестовой задаче плотной упаковки ОМ, состоящих из четырёх ортогональных объектов (рисунок 5, а), координаты $\{x_1; x_2; x_3\}$ и габаритные размеры $\{w_1; w_2; w_3\}$ которых приведены в таблице 5 (v – параметр, определяющий масштабирование ОМ). Задача содержит набор из 100 ОМ десяти типов, отличающихся значением параметра v , который для каждого последовательно принимает значения от 1 до 10. Каждый тип ОМ в задаче представлен десятью экземплярами. В качестве

области размещения (контейнера) используется прямоугольный параллелепипед с габаритными размерами $\{80; 80; 100\}$. Минимизируемой целевой функцией является высота формируемой упаковки, измеряемая вдоль третьей оси контейнера. Пример полученной упаковки приведен на рисунке 5, *b* (высота упаковки: 89).

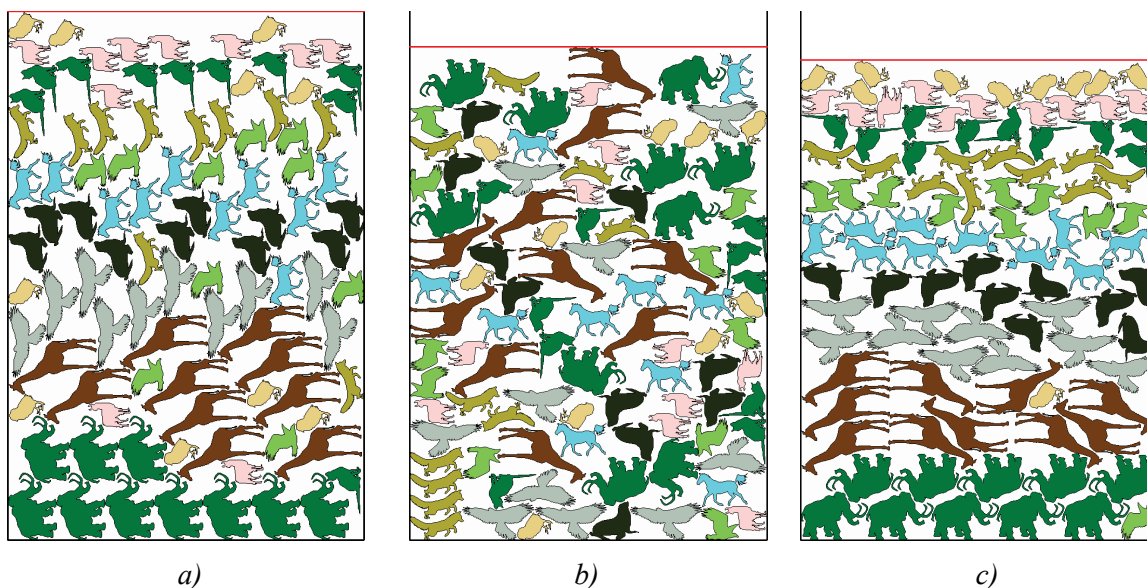


Рисунок 4 – Результаты размещения плоских ОМ, полученные различными алгоритмами: *a*) ГА (высота: 446,0); *b*) ЖЭ (высота: 417,7); *c*) ГА+ЖЭ (высота: 404,0)

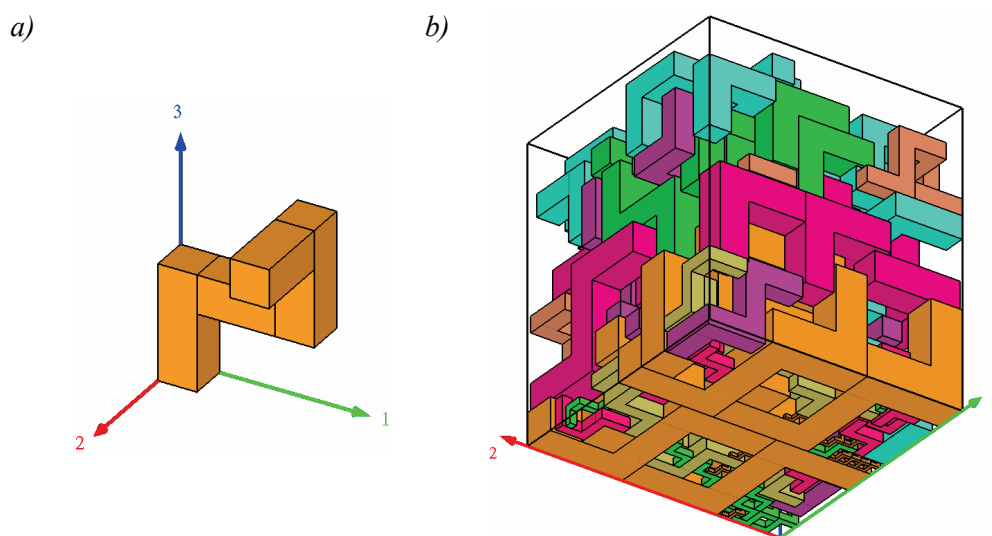


Рисунок 5 – Тестовая задача трёхмерной упаковки ОМ: *a*) тип размещаемого ОМ; *b*) пример сформированной упаковки

Таблица 5 – Параметры трёхмерных ОМ

№ объекта в ОМ	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3
1	0	0	0	v	v	$3v$
2	v	0	$2v$	$2v$	v	v
3	$3v$	0	$2v$	v	v	$3v$
4	$3v$	v	$4v$	v	$2v$	v

Полученные результаты тестирования, усреднённые по 100 запускам для случайных последовательностей трёхмерных ОМ, приведены в таблице 6 (для ГА в таблице представлено

максимальное время, отводимое на решение задачи и приведены результаты решения, усреднённые по 10 запускам).

Таблица 6 – Результаты тестирования ЖЭ на задаче трёхмерной упаковки

Алгоритм	Высота упаковки	Время, с
Размещение без поворотов	184,37	1,57
ЖЭ (6 вариантов ориентации)	128,98	2,69
ЖЭ (12 вариантов ориентации)	113,45	3,80
ЖЭ (24 варианта ориентации)	106,91	6,30
ГА (24 варианта ориентации)	127,10	1800,00
ГА+ЖЭ (24 варианта ориентации)	87,4	1800,00

Вычислительные эксперименты показали, что ЖЭ обеспечивает быстрое получение решений высокого качества. Для плоских ОМ при анализе четырёх и восьми вариантов ориентации ЖЭ обеспечивает получение схем размещения, не уступающим по качеству наилучшим решениям, получаемым с помощью ГА, при этом скорость работы ЖЭ на два порядка выше. Это означает, что для быстрого оптимизированного размещения объектов нерегулярной формы может быть применена ЖЭ без дополнительной оптимизации полученного решения с помощью ГА. Тем не менее, показано, что наилучшие решения получаются в результате совместного применения ГА (для поиска последовательности размещения объектов) и ЖЭ (для выбора наилучшего варианта ориентации каждого размещаемого объекта).

3. Заключение

Предложенная жадная эвристика размещения реализует выбор наилучшего варианта ориентации ОМ при решении задач оптимизированной расстановки объектов сложной геометрии. Показано, что применение жадной эвристики при анализе максимального числа вариантов ориентации ОМ (как двухмерного, так и трёхмерного) обеспечивает формирование в среднем более плотных компоновок в сравнении с компоновками, получаемыми при оптимизации на основе ГА, при этом рассмотренная эвристика затрачивает на решение задачи время, меньшее на два порядка в сравнении с ГА.

Отдельно следует отметить, что при размещении ОМ число возможных вариантов его ориентации является ограниченным, поскольку вокруг каждой из его координатных осей возможны повороты только на углы, кратные 90° . В связи с этим, следует отметить, что перспективное направление исследований в рассмотренной области связано с разработкой алгоритма, определяющего комбинации углов поворота из непрерывного множества на основе анализа исходной геометрии размещаемого векторного (полигонального) объекта и частично сформированной расстановки с последующей дискретизацией (растеризацией) повернутого объекта и размещением полученного ОМ.

4. Благодарности

Исследование выполнено в рамках научной программы национального центра физики и математики, направление №9 «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах».

5. Список источников

- [1] Analysis of irregular three-dimensional packing problems in additive manufacturing: a new taxonomy and dataset / L.J. Araújo, E. Özcan, J.A. Atkin, M. Baumers // International Journal of Production Research. 2019. Vol. 57. No. 18. P. 5920–5934.
- [2] Byholm T., Toivakka M., Westerholm J. Effective packing of 3-dimensional voxel-based arbitrarily shaped particles // Powder Technology. 2009. Vol. 196. No. 2. P. 139–146.

- [3] Irregular packing problems: a review of mathematical models / A.A. Leao, F.M. Toledo, J.F. Oliveira, M.A. Carravilla, R. Alvarez-Valdés // *European Journal of Operational Research*. 2020. Vol. 282. No. 3. P. 803–822.
- [4] Cutting irregular objects from the rectangular metal sheet / S. Plankovskyy, Y. Tsegelnyk, O. Shypul, A. Pankratov, T. Romanova (2020) / In: Nechyporuk M, Pavlikov V, Kritskiy D (eds.) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. 2020. Vol. 1113. P. 150–157.
- [5] Johnson D.S. A brief history of NP-completeness, 1954–2012 // *Documenta Mathematica*. 2012. Extra Volume ISMP. P. 359–376.
- [6] Валиахметова Ю.И., Филиппова А.С. Теория оптимального использования ресурсов Л.В. Канторовича в задачах раскроя-упаковки: обзор и история развития методов решения // *Вестник УГАТУ*. 2014. Т. 18. № 1 (62). С. 186–197.
- [7] Alvarez-Valdes R., Carravilla M.A., Oliveira J.F. Cutting and packing // *Handbook of Heuristics*. Springer, Cham. 2018. P. 931–977.
- [8] Zhao Y., Rausch C., Haas C. Optimizing 3D irregular object packing from 3D scans using metaheuristics // *Advanced Engineering Informatics*. 2021. Vol. 47. P. 101234.
- [9] Matheuristics for the irregular bin packing problem with free rotations / A. Martinez-Sykora, R. Alvarez-Valdés, J.A. Bennell, R. Ruiz, J.M. Tamarit // *European Journal of Operational Research*. 2017. Vol. 258. No. 2. P. 440–455.
- [10] Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // *Computational Geometry*. 2010. Vol. 43. No. 5. P. 535–553.
- [11] Стоян Ю.Г., Семкин В.В., Чугай А.М. Моделирование плотной упаковки 3D-объектов // *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 52 (2). С. 137–146.
- [12] Упаковка сложных трёхмерных объектов в прямоугольный контейнер на базе дискретно-логического представления информации / М.А. Верхотуров, Г.Н. Верхотурова, К.В. Данилов, Р.Р. Ягудин // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2014. Т. 16. № 4 (2). С. 378–383.
- [13] Ягудин Р.Р. Оптимизация компоновки трёхмерных геометрических объектов на основе годографа вектор-функции плотного размещения // *Инженерный вестник Дона*. 2012. Т. 21. № 3. С. 206–217.
- [14] Быков С.В., Чеканин В.А. Полигонизация невыпуклых геометрических объектов при решении задачи фигурного раскроя // 3-й Международный научный Форум профессорско-преподавательского состава и молодых ученых «Цифровые технологии: наука, образование, инновации» (Москва, 09 ноября 2020 г.) / М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2021. С. 12–15.
- [15] Packing of concave polyhedra with continuous rotations using nonlinear optimization / T. Romanova, J. Bennell, Y. Stoyan, A. Pankratov // *European Journal of Operational Research*. 2018. Vol. 268. No. 1. P. 37–53.
- [16] Lebedev P.D., Ushakov V.N., Uspenskii A.A. Numerical methods for constructing suboptimal packings of nonconvex domains with curved boundary // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2020. Vol. 14. No. 4. P. 681–692.
- [17] Tolok A.V., Tolok N.B. Mathematical Programming Problems Solving by Functional Voxel Method // *Automation and Remote Control*. 2018. Vol. 79. No. 9. P. 1703–1712.
- [18] Lamas Fernandez C., Bennell J., Martinez Sykora A. Voxel-Based Solution Approaches to the Three-Dimensional Irregular Packing Problem // *Operations Research*. 2021. P. 1–20.
- [19] Е Вин Тун, Маркин Л.В. Построение рецепторных геометрических моделей объектов сложных технических форм // *Геометрия и графика*. 2019. № 7 (4). С. 44–56.
- [20] Chekanin V.A., Chekanin A.V. Solving the problem of decomposition of an orthogonal polyhedron of arbitrary dimension // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. 2021. P. 52–59.
- [21] Чеканин В.А. Алгоритмы размещения и удаления ортогональных многогранников произвольной размерности в задачах раскроя и упаковки // *Вестник МГТУ «Станкин»*. 2019. № 3 (50). С. 77–81.
- [22] Chekanin V., Chekanin A. Investigation of the Possibilities of Optimizing the Model of Potential Containers to Increase the Speed of Placement of Orthogonal Polyhedra // *GraphiCon 2022: труды*

32-й Междунар. конф. по компьютерной графике и машинному зрению (Рязань, 19–22 сентября 2022 г.). – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2022. С. 826–835.

- [23] Chekanin V., Chekanin A. Algorithms for Working with Orthogonal Polyhedrons in Solving Cutting and Packing Problems. CEUR Workshop Proceedings. 2021. Vol. 3027. P. 656–665.