

# Визуализация распределения яркости по сумеречному небосводу

В.П. Будаков<sup>1</sup>, П.А. Смирнов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ФГБОУ НИУ «МЭИ», ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1., Москва, 111250, Россия

## Аннотация

Визуализация сумеречного небосвода хорошее представление для задач анализа условий метеорологических и астрономических наблюдений, навигации, условий вождения, некоторых задач светодизайна и проектирования освещения. Качественное решение этой задачи требует расчёта координат цвета, а одной из основных компонент является яркость. Если для ситуации дневного неба моделирование этой компоненты признаётся достаточно достоверным и не представляет особых сложностей, то достоверная математическая модель на основе реальных физических характеристик атмосферы для ситуации сумерек требует значительных затрат вычислительных ресурсов. Проблему здесь составляет то, что метод независимого пикселя *IPA*, и упрощение модели до плоскостной среды для сумеречной зоны становятся не достоверными из-за особенностей направления падения лучей по отношению к границе атмосферы и входа излучения в особую область, где необходим учёт её сферической формы, т.е. точная трёхмерная модель этого участка. Предлагается решение этой проблемы с помощью выделения анизотропной части на основе малоугловой модификации метода сферических гармоник, и решения для гладкой части в диффузионном приближении в среде *Comsol Multiphysics*. Качественно полученная картина визуализации распределения яркости совпадает с данными монографии Г.В. Розенберга «Сумерки».

## Ключевые слова

Сумерки, визуализация распределения яркости, перенос излучения, приближение квадиффузии, *Comsol Multiphysics*.

# Luminance Distribution Visualization Across the Twilight Sky

V.P. Budakov<sup>1</sup>, P.A. Smirnov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> National Research University "MPEI", 14 Krasnokazarmennaya, Moscow, 11250, Russia

## Abstract

Visualization of the twilight sky is a good representation for the tasks of the meteorological conditions analysis, astronomical observations, navigation, driving conditions, some tasks of the lighting engineering and lighting design. A qualitative solution for this problem requires the calculation of the distribution of color coordinates, one of the main components of which is lightness. If for the daytime sky the modeling of this component is recognized as sufficiently good and does not have any particular difficulties, then for the twilight environment a reliable mathematical model based on the real physical characteristics of the atmosphere requires significant computational resources. The problem here is that the Independent Pixel Approximation (IPA) method and the simplification of the model to a flat layered medium for the twilight zone becomes inaccurate due to the peculiarities of the direction of incidence of the rays to the boundary of the atmosphere and the entry of radiation into a special region where it is necessary to consider its spherical shape, i.e., accurate 3D atmosphere model. A solution to this problem is proposed by extracting the anisotropic part based on a small-angle modification of the spherical harmonics method and solving the smooth part in diffusion approximation in the *Comsol Multiphysics*

ГрафиКон 2023: 33-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-21 сентября 2023 г., Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия

EMAIL: budakov@mpei.ru (В.П. Будаков); smirnovpa@mpei.ru (П.А. Смирнов)

ORCID: 0000-0003-4750-0160 (В.П. Будаков); 0009-0000-1971-7157 (П.А. Смирнов)



© 2023 Copyright for this paper by its authors.

Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

environment. The obtained picture of the luminance distribution visualization coincides qualitatively with G.V. Rosenberg's monograph "Twilight" data.

### Keywords

Twilight, luminance distribution visualization, radiative transfer, quasi-diffusion approximation, Comsol Multiphysics.

## 1. Введение

Визуализации сцен освещения, в которых в качестве источника необходимо сумеречное небо, имеет существенное значение при демонстрации, имитации и анализе условий освещения в утренние и вечерние часы [1], а также могут быть использованы для моделирования сумеречных наблюдений. Координата цвета  $Y$  базовой колориметрической системы  $XYZ$ , в моделях цветовосприятия является относительной яркостью [2], а остальные могут быть восстановлены на основе спектрального состава излучения. При допущении независимости длин волн для восстановления картины полного спектрального состава распределения можно использовать модель переноса излучения [3]. Для ускорения расчёта распределение координаты  $Y$  может быть получено сразу на основе световой яркости, после расчёта модели переноса излучения, а остальные координаты восстановлены на базе известного относительного спектрального распределения. Однако, получение достоверной модели распределения яркости, в условиях захода Солнца за горизонт весьма затруднительно. Приближение независимого пикселя Independent Pixel Approximation (IPA) [4] в расчётах, даёт достоверную картину только до  $88^\circ$  зенитных углов стояния Солнца. В работе [5] показано, что угловое распределение разницы между точным уравнением переноса излучения (УПИ) и приближенным методом сферических гармоник (МСГ) [6] является функцией близкой к изотропной. Это позволяет сформулировать метод решения УПИ для сумерек путем выделения анизотропной части решения на основе МСГ и нахождения оставшейся регулярной части решения в диффузионном приближении. Такой подход является развитием известного приближения квазидиффузии [7]. Тем самым метод является приближенным, однако с учетом сложностей краевых задач трехмерной (3М) геометрии такой путь представляется более эффективным и точным, чем вводить многочисленные допущения при численном решении [8].

Расчет и визуализация распределения с представлением его на 3М модели атмосферы Земли регулярной части решения удобно решается и в среде решения дифференциальных уравнений Comsol Multiphysics [9]. Далее мы развернём описание метода решения.

## 2. Расчёт переноса излучения в сферическом атмосферном слое

В случае сферического атмосферного слоя краевую задачу УПИ для поля яркости  $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})$  в точке  $\mathbf{r}$  по направлению  $\hat{\mathbf{I}}$  при освещении Земли Солнцем можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{I}}, \nabla) L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = -\varepsilon L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}') x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}', \\ L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\mathbf{r} \in \Sigma_T, (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{R}}) < 0} = S_0 \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0), \quad L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\mathbf{r} \in \Sigma_G, (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{R}}) > 0} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Sigma_T$  - верхняя граница атмосферы (ТОА, top of atmosphere),  $\Sigma_G$  - поверхность Земли,  $S_0$  – солнечная постоянная – нормальная освещенность от Солнца на ТОА,  $\hat{\mathbf{I}}_0$  - направление распространения солнечного излучения. Предполагается, что поверхность Земли полностью поглощает излучение. Параметры атмосферы:  $\varepsilon$  - показатель ослабления,  $\Lambda$  - альbedo однократного рассеяния,  $x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$  - индикатриса рассеяния.

Наибольшей проблемой решения краевой задачи (1) является наличие в решении  $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})$  сильной анизотропии в угловом распределении из-за наличия особенности в краевом условии

$S_0\delta(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}}_0)$  и малой оптической толщине атмосферы. Для устранения этого представим решение в форме [10]

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}), \quad (2)$$

где  $L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$  - анизотропная часть решения, для которой известно пусть приближенное решение, но включающее все особенности решения,  $L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$  - гладкая часть решения близкая изотропному.

Подстановка (2) в краевую задачу (1) модифицирует ее и приводит к виду

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{l}}, \nabla) L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = -\varepsilon L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi} \oint L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}') x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}' + q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}), \\ L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{r \in \Sigma_r, (\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{R}}) < 0} = 0, \quad L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{r \in \Sigma_G, (\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{R}}) > 0} = -L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}), \end{cases} \quad (3)$$

где функция источников в УПИ определяется выражением

$$q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = -(\hat{\mathbf{l}}, \nabla) L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) - \varepsilon L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi} \oint L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}') x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}' \quad (4)$$

и связана с невязкой УПИ для анизотропной части  $L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$  как приближенного решения.

Второе краевое условие объясняется приближенным характером  $L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$ , которое не может удовлетворить точным граничным условиям. Соответственно, краевая задача УПИ для анизотропной части имеет вид

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{l}}, \nabla) L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = -\varepsilon L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi} \oint L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}') x(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}', \\ L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = S_0\delta(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}}_0). \end{cases} \quad (5)$$

Для решения краевой задачи (5) воспользуемся МСГ. МСГ является наиболее общей формой малоугловых приближений [6], которые представляют собой обобщение параксиального приближения в оптике для случая мутных сред. Описывает локальное угловое распределение яркости в окрестности направления падения излучения  $\hat{\mathbf{l}}_0$ . При этом пренебрегается азимутальной асимметрией тела яркости  $\hat{\mathbf{l}}_0$ , а само тело яркости вследствие наличия особенностей считается сильно вытянутым вдоль  $\hat{\mathbf{l}}_0$ . Решение определяется [11] фундаментальными источниками краевой задачи (5). В случае сумеречного слоя таким источником является плоский мононаправленный источник (ПМ), распределение яркости которого имеет вид [6]:

$$L_a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \exp(-(1 - \Lambda x_k)\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}})) P_k(\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{l}}_0), \quad (6)$$

где  $\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}) = \int_0^{\xi_0} \varepsilon(\xi) d\xi$  - оптическая толщина по ослаблению вдоль луча:  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \xi \hat{\mathbf{l}}$ , причем

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi_0 \hat{\mathbf{l}}$ ;  $x_k$  - коэффициенты разложения индикатрисы по полиномам Лежандра:

$$x(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) x_k P_k(\cos \gamma), \quad (7)$$

$P_k(x)$  - полиномы Лежандра.

Расчеты световых полей яркости для ПМ источника [5] показали, что в этом случае угловое распределение  $L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$  близко к изотропному - см. рисунок 1.

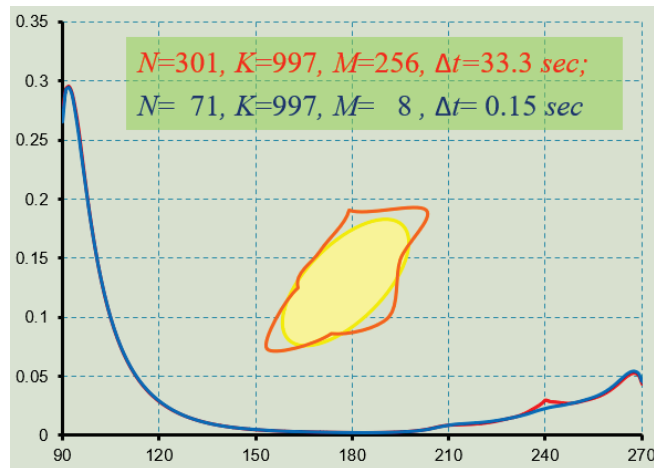
Это позволяет для ее нахождения воспользоваться диффузионным приближением [12]. Представим угловую зависимость регулярной части решения в виде разложения по сферическим функциям:

$$L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} C_k^m(\mathbf{r}) Y_k^m(\hat{\mathbf{I}}), \quad (8)$$

где сферическая функция

$$Y_k^m(\hat{\mathbf{I}}) \equiv Y_k^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!}} P_k^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (9)$$

$P_k^m(\mu)$  - присоединенные полиномы Лежандра,  $\hat{\mathbf{I}} = [\sin \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta]$  – вектор направления в некоторой сферической системе координат.



**Рисунок 1** – Угловое распределение тела яркости и его регулярной части

Сферические функции образуют на сфере направлений полную систему ортонормированных функций:

$$\oint Y_k^m(\hat{\mathbf{I}}) \bar{Y}_l^n(\hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = \delta_{kn} \delta_{mn}, \quad \bar{Y}_l^n(\hat{\mathbf{I}}) = (-1)^n Y_l^{-n}(\hat{\mathbf{I}}) \quad (10)$$

Из (8) с учетом (10) нетрудно получить выражение для пространственной облученности

$$E_{0r}(\mathbf{r}) = \oint L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = \sqrt{4\pi} \oint L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) Y_0^0(\hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = \sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} C_0^0(\mathbf{r}) = C_0^0(\mathbf{r}), \quad (11)$$

и светового вектора

$$\mathcal{E}_r(\mathbf{r}) = \oint L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) \hat{\mathbf{I}} d\hat{\mathbf{I}} = \oint \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} C_k^m(\mathbf{r}) Y_k^m(\hat{\mathbf{I}}) \right) \hat{\mathbf{I}} d\hat{\mathbf{I}}, \quad (12)$$

или, выполнив интегрирование, получим

$$\mathcal{E}_r(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{I}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left( C_1^{-1}(\mathbf{r}) Y_1^1(\hat{\mathbf{I}}) + C_1^1(\mathbf{r}) Y_1^{-1}(\hat{\mathbf{I}}) + C_1^0(\mathbf{r}) Y_1^0(\hat{\mathbf{I}}) \right) = \frac{4\pi}{3} \sum_{m=-1}^1 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} C_k^m(\mathbf{r}) Y_k^m(\hat{\mathbf{I}}). \quad (13)$$

Соответственно, из (12) и (13) выражение для яркости в диффузионном приближении приобретает вид:

$$L_r(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \sum_{k=0}^1 \sum_{m=-1}^1 \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} C_k^m(\mathbf{r}) Y_k^m(\hat{\mathbf{I}}) = \frac{1}{4\pi} E_{r0}(\mathbf{r}) + \frac{3}{4\pi} \mathcal{E}_r(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{I}}. \quad (14)$$

Подставим полученное выражение (14) в уравнение краевой задачи (3)

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{I}}, \nabla) (E_{r0}(\mathbf{r}) + 3\mathcal{E}_r(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{I}}) &= -\varepsilon (E_{r0}(\mathbf{r}) + 3\mathcal{E}_r(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{I}}) + \\ &+ \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint (E_{r0}(\mathbf{r}) + 3\mathcal{E}_r(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{I}}) x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}' + 4\pi q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) \end{aligned} \quad (15)$$

Для индикатрисы рассеяния справедлива нормировка

$$\frac{1}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}' = 1, \tag{16}$$

а интеграл

$$\frac{1}{4\pi} \oint \hat{\mathbf{I}}' x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}' = \bar{\mu}, \tag{17}$$

где  $\bar{\mu}$  – средний косинус угла рассеяния.

Соответственно, получим вместо (15)

$$\left( (\hat{\mathbf{I}}, \nabla) + \varepsilon(1 - \Lambda) \right) E_{r_0}(\mathbf{r}) + \left( (\hat{\mathbf{I}}, \nabla) + \varepsilon(1 - \Lambda\bar{\mu}) \right) 3\mathcal{E}_r(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{I}} = 4\pi q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}). \tag{18}$$

Проинтегрируем полученное уравнение (18) по телесному углу  $d\hat{\mathbf{I}}$ , что приведет к следующему уравнению

$$\varepsilon(1 - \Lambda)E_{r_0}(\mathbf{r}) + \nabla \mathcal{E}_r(\mathbf{r}) = q_0(\mathbf{r}), \tag{19}$$

где  $q_0(\mathbf{r})$  - нулевой член разложения функции источников по сферическим функциям.

Умножим (18) на  $\hat{\mathbf{I}}$  и проинтегрируем по полному телесному углу, что преобразует уравнение к виду:

$$\frac{1}{3} \nabla E_{r_0}(\mathbf{r}) + \varepsilon(1 - \Lambda\bar{\mu})\mathcal{E}_r(\mathbf{r}) = \mathbf{q}_1(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}). \tag{20}$$

При этом функция источников так же представляется в диффузионном приближении

$$q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{1}{4\pi} q_0(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) + \frac{3}{4\pi} \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{q}_1(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}). \tag{21}$$

Выразим  $\mathcal{E}_r(\mathbf{r})$  из (20)

$$\mathcal{E}_r(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon(1 - \Lambda\bar{\mu})} \left( \mathbf{q}_1(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) - \frac{1}{3} \nabla E_{r_0}(\mathbf{r}) \right), \tag{22}$$

и подставим в (19)

$$\varepsilon(1 - \Lambda)E_{r_0}(\mathbf{r}) - \nabla \left( \frac{1}{3\varepsilon(1 - \Lambda\bar{\mu})} \nabla E_{r_0}(\mathbf{r}) \right) = q_0(\mathbf{r}) - \nabla \frac{1}{\varepsilon(1 - \Lambda\bar{\mu})} \mathbf{q}_1(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}). \tag{23}$$

Допустим, что среда однородная  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ . Тогда (23) примет вид

$$\varepsilon(1 - \Lambda)E_{r_0}(\mathbf{r}) - \frac{1}{3\varepsilon(1 - \Lambda\bar{\mu})} \Delta E_{r_0}(\mathbf{r}) = q_0(\mathbf{r}) - \frac{1}{\varepsilon(1 - \Lambda\bar{\mu})} \nabla \mathbf{q}_1(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}). \tag{24}$$

Выражение для функции источников от определения анизотропной части в МСГ предложен в [5]:

$$q(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_0} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \frac{2k+1}{4\pi} \left( \Lambda x_k e^{-\tau/\mu_0} - d_k \tilde{Z}_k(\tau) \right) Q_k^m(\mu_0) Q_k^m(\mu) e^{im\varphi}, \tag{25}$$

где  $\tilde{Z}_k(\tau) = e^{-d_k \tau/\mu_0} - e^{-\tau/\mu_0}$ ,  $d_k = 1 - \Lambda x_k$ ,  $Q_k^m(\mu) = \sqrt{\frac{(k-m)!}{(k+m)!}} P_k^m(\mu)$  – перенормированные полиномы Лежандра, которые связаны со сферическими функциями

$$Y_k^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} Q_k^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \tag{26}$$

$\mu_0$  – косинус угла падения.

В нашем случае  $\mu_0 = 1$ , что приводит к тому, что

$$\begin{cases} \forall k, \text{ при } m = 0: P_k^m(\mu_0) = 1, \\ \forall m \neq 0: P_k^m(\mu_0) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

а формула (25)

$$q(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = (1 - \mu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} (\Lambda x_k e^{-\tau} - d_k \tilde{Z}_k(\tau)) P_k(\mu), \quad (28)$$

где  $P_k(\mu)$  – обычные полиномы Лежандра, для которых справедливо рекуррентное соотношение

$$\mu P_k(\mu) = \frac{k+1}{2k+1} P_{k+1}(\mu) + \frac{k}{2k+1} P_{k-1}(\mu). \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что все члены в (28) с множителем  $\mu$  преобразуются по (29). Поскольку в диффузионном приближении нас интересуют только члены с  $k = 0, 1$ , то сохраним только их:

$$q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{1}{4\pi} \Lambda (1 - x_1) e^{-(1-\Lambda x_1)\tau} + \frac{1}{4\pi} \left( (1 - \Lambda) e^{-(1-\Lambda)\tau} + 2(1 - \Lambda x_2) e^{-(1-\Lambda x_2)\tau} - 3(1 - \Lambda x_1) e^{-(1-\Lambda x_1)\tau} \right) \mu.$$

Прямые расчеты показывают, что  $q_0$  много больше  $q_1$ , и последней можно пренебречь, что приводит (24) к классическому уравнению диффузии:

$$\varepsilon(1 - \Lambda) E_{r_0}(\mathbf{r}) - \frac{1}{3\varepsilon(1 - \Lambda\bar{\mu})} \Delta E_{r_0}(\mathbf{r}) = q_0(\mathbf{r}). \quad (30)$$

### 3. Моделирование диффузионного приближения для среза атмосферы в Comsol Multiphysics

Среда *Comsol Multiphysics* удобна для численного моделирования разнообразного множества физических процессов, для чего предоставлены: среда трёхмерного моделирования и эффективные методы решений дифференциальных уравнений. В нашей задаче её выгодно использовать для моделирования диффузионного приближения регулярной части решения.

Объекту *3D* модели в *Comsol Multiphysics* можно присвоить материал среды из существующей библиотеки материалов. Для всех используемых материалов заданы базовые физические характеристики, позволяющие моделировать основной перечень возможных физических процессов, недостающие физические характеристики для моделирования можно задать дополнительно, в том числе их размерность в нужной системе величин и описание. Есть в базе данных и атмосферный воздух (*Air*), причём, присутствует он в разных разделах библиотеки, мы выберем его из оптического раздела, где для воздуха приведены основные характеристики применяемые для оптических расчётов, таких характеристик всего четыре, это: коэффициент поглощения –  $\kappa R$ , коэффициент рассеяния –  $\sigma S$ , действительная и мнимая части показателя преломления –  $n$  и  $ki$  соответственно. Причём, мы можем задать и нужные нам значения этих характеристик, т.е. определить тип и состояние атмосферы.

Как можно видеть, это основной набор характеристик входящих в уравнение переноса излучения, другие возможные могут быть представлены как комбинации базовых.

В среде *Comsol Multiphysics* выберем тип уравнения для решения в среде заданной системы объектов, для нас это сегмент атмосферы Земли.

Сегмент атмосферы моделируем путём вычитания друг из друга сферы радиусом  $R_z - h_a$  и цилиндра такого же радиуса и вдвое большей высоты, но смещённого на  $R_z + 2h_a$  ниже по оси  $Z$ , здесь  $R_z$  – радиус Земли,  $h_a$  – высота атмосферы. Получим по виду широкий и тонкий срез диаметр которого значительно больше высоты. Для такой модели мы и зададим уравнение диффузии излучения.

Граничные условия для решения зададим нулевые на всех граничных поверхностях из расчёта, что поверхность подложки этого сегмента полностью поглощающая.

В нашем случае удобным будет вариант выбора универсального дифференциального уравнения в частных производных в форме с коэффициентами – *Coefficient Form PDE*. Это уравнение выглядит следующим образом:

$$e_a \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla E - \alpha E + \gamma) + \beta \nabla E + a E = f. \quad (31)$$

Его левая часть состоит из динамической составляющей, в состав которой входят производные по времени –  $t$ , и статической составляющей, в состав которой они не входят. Нас

интересует статическая часть или статическая форма представления уравнения в частных производных:

$$\nabla \cdot (-c\nabla E - \alpha E + \gamma) + \beta \nabla E + aE = f, \quad (32)$$

для преобразования в такую форму коэффициенты  $e_a$  и  $d_a$  в выражении (31) приравниваются нулю.

Чтобы преобразовать оставшуюся часть в форму уравнения диффузии излучения:

$$\nabla \cdot (-c\nabla E) + aE = f, \quad (33)$$

приравниваются нулю также коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Оставшиеся коэффициенты:  $c$  – представляет коэффициент диффузии –  $D$ ;  $a$  – представляет коэффициент поглощения –  $k$ ;  $f$  – функция источников.

Для функции источников мы можем задать в *Comsol* собственное выражение, для которого задать и собственные параметры, которые также могут быть представлены в виде выражений на основе входящих заданных констант, они задаются в разделе *Definitions* компонента модели *Comsol*.

Выберем в качестве функции источников изотропную функцию Бугера:

$$\tilde{E}_a = E_0 e^{-kr_d} \quad (34)$$

$E_0$  – пространственная облучённость на границе атмосферы полученная на основе решения МСГ,  $r_d$  – длина пути луча, пройденного в среде.

Распределение коэффициентов поглощения и рассеяния также представим в виде экспоненциальной зависимости от высоты  $h$  над уровнем Земли:

$$k = k_0 e^{-a_k h}, \quad \sigma = \sigma_0 e^{-a_\sigma h} \quad (35)$$

$k_0$ ,  $\sigma_0$  – коэффициенты поглощения и рассеяния на уровне Земли.

Таким образом получаем уравнение диффузии излучения:

$$\nabla \cdot (-D\nabla E_o) + kE_o = \tilde{E}_a \quad (36)$$

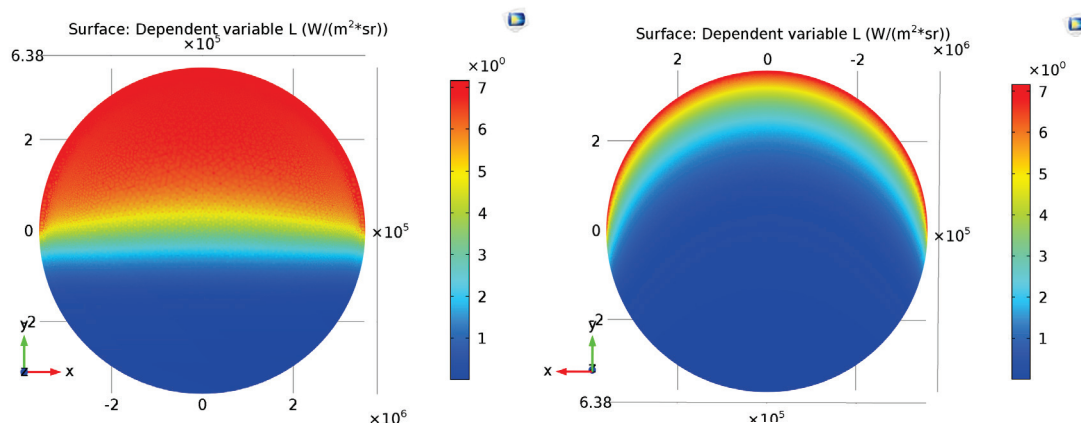
которое и будет решаться в среде *Comsol Multiphysics*.

Решатель и параметры решения, в том числе частоту разбиения объекта на сетку можно выбрать в зависимости от необходимой точности и возможностей оборудования. В результате мы получим регулярную часть решения или равномерную компоненту для представления визуализации распределения яркости сумеречного неба.

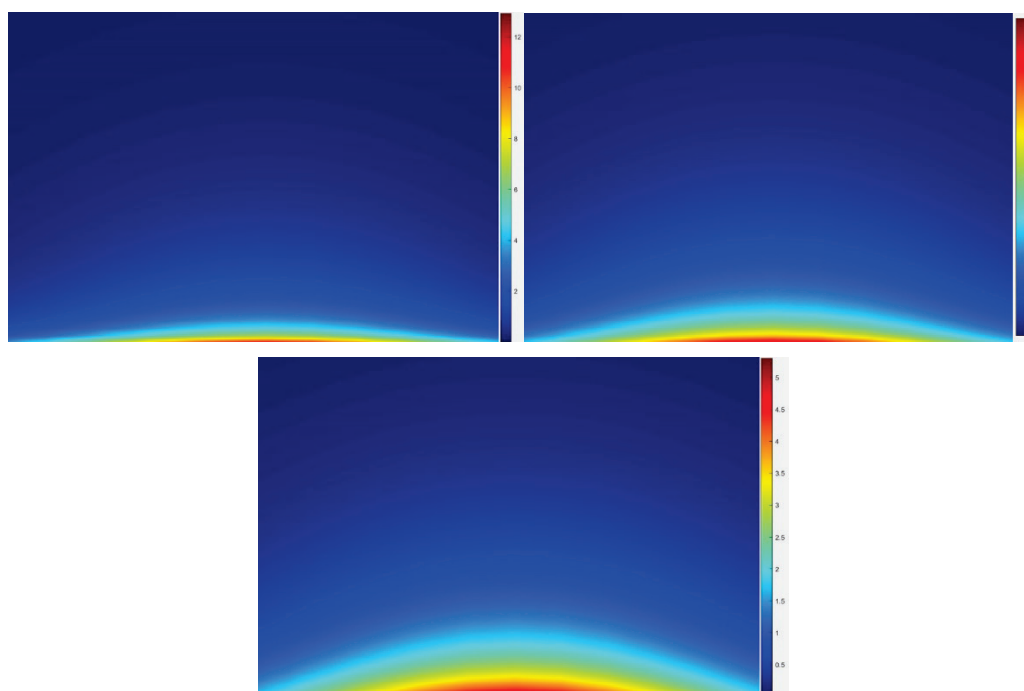
## 4. Результаты

На рисунке 2, мы видим распределение относительной яркости регулярной части решения по верхней границе атмосферы так, как если бы мы наблюдали её из космоса и распределение на нижней части атмосферного среза. Такие решения могут быть использованы в задачах дистанционного зондирования и космических наблюдений, однако для визуализации решений наблюдений с поверхности Земли мы выделяем нужную точку решения и преобразуем её на основе известной индикатрисы распределения яркости регулярной части для заданной точки, как правило, это центральная точка дна атмосферного среза. Затем складываем полученное решение с результатами метода МСГ.

В результате чего получаются визуализации распределений представленные на рисунке 3. В данном случае наблюдение ведётся в направлении захода Солнца. Можно видеть, что с удалением Солнца за горизонт максимальная яркость атмосферы падает, а распределение становится более равномерным. Высокую яркость у горизонта и отсутствие высоты максимума яркости в соответствии с результатами приведёнными в известной работе Г.В. Розенберга [13] можно объяснить ограниченностью модели, т.к. мы рассмотрели лишь вариант среза касающегося поверхности Земли лишь в точке наблюдения, однако расширение модели не составляет проблем.



**Рисунок 2**– Визуализация распределения яркости диффузионного приближения регулярной части решения на верхней (слева) и нижней (справа) границе среза атмосферы. Высота стояния Солнца  $0^\circ$



**Рисунок 3** – Слева на право и сверху вниз, визуализации распределений яркости для углов высоты стояния Солнца  $-1^\circ, -2^\circ, -4^\circ$

## 5. СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] Budak V., Emelianova E. Realistic Simulation of Synthetic Images on Computer Monitors Based on the Color Appearance Model CIECAM02. // GraphiCon 2021. №3027. P. 809-817.
- [2] Fairchild M.D. Color appearance model. N.-Y.: Wiley, 2013. 450 p.
- [3] Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосфере звезд и планет. М.: Гостехиздат. 1965. 394 с.
- [4] Independent pixel and Monte Carlo estimates of stratocumulus albedo / Cahalan, R. F., W. Ridgway, W. J. Wiscombe, S. Gollmer, and Harshvardhan // J. Atmos. Sci. V.51, N.24. P.3776-3790.
- [5] A Fast and accurate synthetic iteration-based algorithm for numerical simulation of radiative transfer in a turbid medium / Budak V.P., Zheltov V.S., Lubenchenko A.V., Freidlin K.S., and Shagalov O.V. // Atmospheric and Oceanic Optics. 2017. V. 30, N. 1. P.70–78.



- [6] Budak V.P., Korkin S.V. On the solution of a vectorial radiative transfer equation in an arbitrary three-dimensional turbid medium with anisotropic scattering // *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*. 2008. V.109. P. 220–234.
- [7] Гольдин В.Я. Квазидиффузный метод решения кинетического уравнения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1964. Т.4, № 6. С.1078–1087
- [8] Modified finite-volume method based on a cell vertex scheme for the solution of radiative transfer problems in complex 3D geometries / Trovalet L., Jeandel G., Coelho P.J., Asllanaj F. // *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*. 2011. V.112. P.2661–2675
- [9] Красников Г.Е., Нагорнов О.В., Старостин Н.В. Моделирование физических процессов с использованием пакета Comsol Multiphysics. М.: НИЯУ МИФИ, 2012. 184с.
- [10] Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering // *In Light Scattering Reviews 5: Single Light Scattering and Radiative Transfer* / Ed. A.A. Kokhanovsky. Springer Praxis Books. 2010. P.147-204.
- [11] Гермогенова Т.А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 272с.
- [12] Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: МИР. 1972. 384с.
- [13] Розенберг Г.В. Сумерки. М: Физматгиз, 1963. 380 с.