

Применение разрывного метода частиц к задачам с вязкостью и его визуализация

С.В. Богомолов¹, А.Е. Кувшинников²

¹ Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д.1, стр. 52, Москва, 119991 ГСП-1, Россия

² ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл., д.4, г. Москва, 125047, Россия

Аннотация

В прошлых работах было показано, что разрывный метод частиц хорошо справляется с задачами вычислительной гидродинамики, имеющими сильный градиент, в качестве примера можно привести задачу об образовании косоугольного скачка напряжения. В настоящей статье рассматривается применение разрывного метода частиц к задачам с вязкостью. В ходе исследования была взята одномерная уравнения Бюргерса с начальным условием в виде сглаженной волны и двумерная задача Блазиуса. Численные эксперименты показали соответствие полученного решения аналитическому, но в двумерном случае сильно падает производительность алгоритма из-за необходимости определять соседей частицы. Сделан вывод, что разрывный метод частиц может решать задачи с вязкостью в одномерном случае, но для случаев большей размерности требуется модификация существующего алгоритма. Изучение применения разрывного метода частиц к вязким задачам проводилось в рамках общего комплексного исследования сравнительной точности численных методов на референтных решениях.

Ключевые слова

Разрывный метод частиц, уравнение Бюргерса, вычислительная газовая динамика, задача Блазиуса.

Application of Discontinuous Particle Method to Problems with Viscosity and Its Visualization

S.V. Bogomolov¹, A.E. Kuvshinnikov²

¹ Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, d. 1, str. 52, Moscow, 119991 GSP-1, Russia

² Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Miusskaya sq., d. 4, Moscow, 125047, Russia

Abstract

In past papers it has been shown that the discontinuous particle method copes well with computational fluid dynamics problems having a strong gradient, the problem of oblique stress jump formation being an example. This paper deals with the application of the discontinuous particle method to viscosity problems. In the study, a one-dimensional Burgers equation with an initial condition in the form of a smoothed wave and a two-dimensional Blasius problem were taken. Numerical experiments showed the correspondence of the obtained solution to the analytical one, but in the two-dimensional case the performance of the algorithm drops strongly due to the necessity to determine the neighbours of the particle. It is concluded that the discontinuous particle method can solve viscosity problems in the one-dimensional case, but modifications of the existing algorithm are required for higher dimensional cases. The application of the discontinuous particle method to viscous problems was studied as part of a general comprehensive study of the comparative accuracy of numerical methods on reference solution.

ГрафиКон 2023: 33-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-21 сентября 2023 г., Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия

EMAIL: bogomo@cs.msu.su (С.В. Богомолов); kuvsh90@yandex.ru (А.Е. Кувшинников)

ORCID: 0000-0002-5414-6019 (С.В. Богомолов); 0000-0003-1667-6307 (А.Е. Кувшинников)



© 2023 Copyright for this paper by its authors.

Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Keywords

Discontinuous particle method, Burgers' equation, computational gas dynamics, Blasius boundary layer.

1. Введение

В последние годы методы частиц стали полезным инструментом для численного решения уравнений в частных производных и успешно применяются для широкого класса задач, возникающих в астрофизике, физике плазмы, физике твердого тела, медицинской физике и гидродинамике [1–4]. В этих методах решение ищется как линейная комбинация δ -функций, позиции и коэффициенты которых представляют собой местоположение и веса частиц соответственно. Затем решение находится путем отслеживания временной эволюции местоположений и весов частиц в соответствии с системой ОДУ, полученной при рассмотрении слабой постановки задачи. Для того чтобы восстановить точечные значения вычисленного решения при некотором времени $t > 0$, необходимо регуляризовать решение с частицами, поэтому эффективность метода частиц зависит от качества процедур регуляризации, позволяющих восстановить приближенное решение по распределению частиц. Обычно регуляризация решения с частицами осуществляется путем свертки с так называемой отсекающей функцией, которая играет роль гладкой аппроксимации δ -функции и после соответствующего масштабирования учитывает тесноту дискретизации частиц.

Методы частиц имеют много преимуществ по сравнению с конечно-разностными методами. Величина численной вязкости, вносимая дискретизацией конвективных членов большинства конечно-разностных методов, может серьезно ухудшить точность расчетного метода, особенно если приходится использовать грубую сетку. Методы лагранжевого типа, напротив, могут смягчить большинство проблем, связанных с наличием численной вязкости, поскольку частицы обеспечивают недиссипативную аппроксимацию конвекции. Кроме того, в некоторых научных приложениях, таких как, например, кинетическая теория, конечно-разностными методами не могут быть применены к реалистичному случаю из-за размерности задачи [5], в то время как в схемах с частицами частицы концентрируются в соответствующей области фазового пространства, что позволяет оптимизировать объем памяти компьютера. Будучи бессеточными, методы частиц также являются очень гибкими и, следовательно, выгодными при рассмотрении задач с очень сложной геометрией и/или подвижными границами.

Однако следует учитывать, что самоадаптация положений частиц к локальной карте течения происходит в ущерб регулярности распределения частиц: расстояния между частицами могут меняться во времени, и так же, как частицы могут группироваться в непосредственной области разрыва, они могут слишком сильно удаляться друг от друга вблизи негладких фронтов. Это может привести не только к плохому разрешению вычисляемого решения, но и к крайне низкой эффективности методов. Последнее связано с тем, что временной шаг ODE-решателя, используемого для эволюции системы частиц во времени, в общем случае зависит от расстояния между частицами. Таким образом, успех различных методов с частицами зависит не только от точности процедур реконструкции, позволяющих восстановить точечные значения численного решения по его распределению частиц, но и от точных и эффективных алгоритмов перераспределения, обеспечивающих адекватное разрешение различных областей вычислительной области. Изучение применения разрывного метода частиц к вязким задачам проводилось в рамках общего комплексного исследования сравнительной точности численных методов на референтных решениях. Данное исследование проводилось ранее для невязких задач газовой динамики, имеющих референтные решения. Результаты представлены в работах [6–8]. В настоящее время ведутся исследования по сравнительному определению точности численных методов для вязких задач на референтных решениях. Особый интерес здесь представляет применение разрывного метода частиц, так как он существенно отличается по своей природе от распространенных численных методов.

2. Основные уравнения метода частиц

Пусть существует N материальных точек, находящихся в начальный момент времени в координатах x_i^0 и движущихся со скоростями $v_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, N$). Данная словесная формулировка соответствует задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = v(x_i(t), t), \\ x_i(0) = x_i^0, i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

В статье [9, 10] показан переход от (1) к уравнению переноса в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)u(x, t)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (2)$$

То есть, если координаты точек изменяются в соответствии с системой уравнений (1), то плотность $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи Коши для уравнения переноса (2).

Опишем модификацию разрывного метода с иным вариантом коррекции плотности. Выбранные для коррекции частицы будем называть взаимодействующими, а процесс коррекции — взаимодействием. Введём равномерную сетку по времени с шагом τ . Рассматриваем систему как набор N макрочастиц. Для описания частиц введём следующие обозначения: x_i^k — координата центра i -й частицы в k -й момент времени, v_i^k — скорость частицы, H_i^k — высота (плотность) частицы.

Также у каждой частицы есть неизменяемая во времени масса, что говорит о консервативности метода. Новый алгоритм основан на сохранении массы, находящейся между частицами. Масса, находящаяся между координатами частиц, равна полусумме масс частиц, и, в отсутствие диффузии, она также должна оставаться постоянной. Введём обозначение S_i — масса, находящаяся между частицы $(i-1)$ -ой частицы и i -ой частицами. Массу S_i вычисляем как площадь трапеций:

$$S_i = \frac{H_i + H_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}).$$

В отсутствие диффузии масса между частицами не изменяется со временем. Запомним значения S_i^0 в начальный момент времени $t = 0$. Проведём процедуру инициализации параметров частиц в начальный момент времени. Пусть дана начальная плотность $u_0(x)$. Координаты частиц x_i^0 можно равномерно расположить на расчетной области, где $i = 1, \dots, N$.

$$\begin{aligned} H_i^0 &= u_0(x_i^0), i = 1, \dots, N; \\ S_i^0 &= \frac{1}{2}(H_{i-1}^0 + H_i^0)(x_i^0 - x_{i-1}^0), i = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Координаты частиц при решении уравнения Хопфа должны удовлетворять системе уравнений [11]:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{1}{2}H_i, i = 1, \dots, N; \\ x_i(0) = x_i^0. \end{cases}$$

Напомним, что алгоритм метода частиц строится как предиктор-корректор. Сначала решаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений явным методом Эйлера:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{2}\tau H_i^k.$$

После сдвига частиц расстояние между ними изменяется, что приводит к изменению площадей трапеции. Поэтому на этапе корректора нужно изменять высоты частиц так, чтобы масса между частицами оставалась постоянной. Рассмотрим возможные случаи взаимодействия частиц:

1. Частица с большей плотностью наезжает на частицу с меньшей плотностью, что приводит к уменьшению площади трапеции между частицами. В этом случае для сохранения площади трапеции будем увеличивать высоту частицы с меньшей плотностью.

2. Частица с большей плотностью удаляется от частицы с меньшей плотностью, что приводит к увеличению площади трапеции между частицами. В этом случае для сохранения площади трапеции будем уменьшать высоту частицы с большей плотностью.

При использовании указанных правил перестройки частиц и критериев отбора и результате взаимодействия частицы с одним из соседей может поменяться площадь трапеции с другим соседом, для которого уже проведена коррекция, что говорит о погрешности алгоритма. Взаимодействия частиц, возникшие таким образом, не учитываем.

Корректор изменяет высоту i -й ($i = 2, \dots, N$) частицы таким образом, чтобы площадь трапеции между частицами оставалась постоянной:

$$\frac{1}{2}(H_i^{k+1} + H_{i-1}^k)(x_i^{k+1} - x_{i-1}^{k+1}) = S_i^0. \quad (3)$$

Следовательно, высота i -й частицы на новом ($k + 1$) шаге по времени определяется как:

$$H_i^{k+1} = \frac{2S_i^0}{x_i^{k+1} - x_{i-1}^{k+1}} - H_{i-1}^k.$$

3. Диффузия для одномерного метода частиц

Рассмотрим уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

где μ — коэффициент диффузии. Это уравнение описывает квазилинейный перенос с диффузией. На первом этапе решаем уравнение переноса без учёта диффузии:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{2}\tau H_i^k, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\tilde{H}_i^k = \frac{2S_i^0}{x_i^{k+1} - x_{i-1}^{k+1}} - H_{i-1}^k.$$

где S_i^k — масса, находящаяся между $(i-1)$ -ой и i -ой частицами на k -м временном слое, \tilde{H}_i^k — промежуточное значение высоты частицы. Координаты частиц образуют неравномерную сетку. Введём следующие обозначения:

$$h_i = x_i^{k+1} - x_i^k, \\ \tilde{h}_i = \frac{h_{i+1} + h_i}{2},$$

Выпишем разностную аппроксимацию второй производной на неравномерной сетке и получим значение H_i^{k+1} на новом временном слое:

$$H_i^{k+1} = \tilde{H}_i^k + \tau \frac{\mu}{\tilde{h}_i} \left(\frac{\tilde{H}_{i+1}^k - \tilde{H}_i^k}{h_{i+1}} - \frac{\tilde{H}_i^k - \tilde{H}_{i-1}^k}{h_i} \right). \quad (4)$$

Также из-за диффузии изменится масса между частицами, поэтому требуется найти новые площади трапеций. Рассмотрим i -ю трапецию между $(i-1)$ -й и i -й частицами. Вычислим плотность потока на границах трапеций по закону Фика:

$$j = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Плотность потока на правой границе i -й трапеции определяется выражением:

$$j_2 = -\mu \frac{\tilde{H}_{i+1}^k - \tilde{H}_i^k}{x_{i+1}^{k+1} - x_{i-1}^{k+1}}.$$

Для плотности потока на левой границе i -й трапеции аналогично имеем:

$$j_1 = -\mu \frac{\tilde{H}_i^k - \tilde{H}_{i-2}^k}{x_i^{k+1} - x_{i-2}^{k+1}}.$$

Масса, перетекшая за шаг времени τ из $(i+1)$ -й трапеции в i -ю равна $-\tau j_2$. Масса, перетекшая из $(i-1)$ -й в i -ю равна τj_1 . Новая масса трапеции равна:

$$S_i^{k+1} = S_i^k - \tau(j_2 - j_1) = S_i^k + \tau\mu \left(\frac{\tilde{H}_{i+1}^k - \tilde{H}_{i-1}^k}{x_{i+1}^{k+1} - x_{i-1}^{k+1}} - \frac{\tilde{H}_i^k - \tilde{H}_{i-2}^k}{x_i^{k+1} - x_{i-2}^{k+1}} \right). \quad (5)$$

Среди решений уравнения Бюргера есть сглаженная волна:

$$u(x, t) = \frac{a + b \exp(\lambda(x - x_0 - Dt))}{1 + \exp(\lambda(x - x_0 - Dt))},$$

где $D = \frac{1}{2}(a + b)$, $\lambda = \frac{1}{2}(a - b)/\mu$. Пусть $a = 1$, $b = 0.2$, $x_0 = 5$, $\mu = 0.15$. В качестве начального условия возьмем $u_0 = u(x, 0)$. Сравнение численного и аналитического решения представлено на рисунке 1. Слева изображено решение в начальный момент времени $T = 0$, справа решение в момент времени $T = 10.0$.

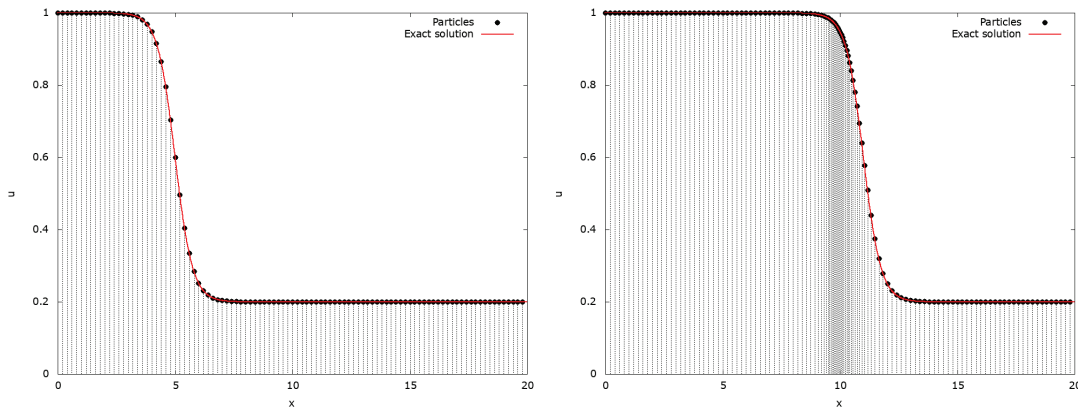


Рисунок 1 – Применение метода частиц к уравнению Бюргера

Видно, что метод частиц можно применять к задачам с диффузией, также наблюдается сгущение частиц в правой части области изменения величины.

4. Увеличение точности метода частиц на примере задачи для двумерного линейного уравнения переноса

Рассмотрим тестовую задачу для двумерного линейного уравнения переноса [12]:

$$\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, y) \psi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y) \psi(x, y, t)}{\partial y} = 0,$$

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y).$$

где $u(x, y) = -(y - y_0)/25$, $v(x, y) = -(x - x_0)/25$. При таком задании скоростей начальный профиль ψ_0 должен вращаться вокруг точки (x_0, y_0) не меняя свою форму. Сравним два численных решения, полученных описанный методом частиц, но на этапе предиктора используются метод Эйлера первого порядка аппроксимации и модифицированный метод Эйлера второго порядка.

Используем модифицированный метод Эйлера второго порядка. Сначала делаем шаг по времени $\frac{1}{2}\tau$.

$$x_i^{k+1/2} = x_i^k + \frac{1}{2}\tau u(x_i^k, y_i^k),$$

$$y_i^{k+1/2} = y_i^k + \frac{1}{2}\tau v(x_i^k, y_i^k).$$

На втором шаге получаем координаты центра частицы x_i^{k+1} , y_i^{k+1} на новом шаге по времени с использованием значений $x_i^{k+1/2}$, $y_i^{k+1/2}$:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \tau u(x_i^{k+1/2}, y_i^{k+1/2}),$$

$$y_i^{k+1} = y_i^k + \tau v(x_i^{k+1/2}, y_i^{k+1/2}).$$

Возьмём начальную функцию $\psi_0(x, y)$ в виде прямого кругового конуса с радиусом 5 и высотой 1, чей центр располагается в точке с координатами (25, 10):

$$\psi_0(x, y) = \begin{cases} -\frac{(x - 25)^2}{25} - \frac{(y - 10)^2}{25} + 1, & (x - 25)^2 + (y - 10)^2 \leq 25; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На рисунке 2 изображено начальное условие. На рисунках 3 и 4 решения двумя методами после трёх оборотов. Видно, что решение модифицированным методом лучше сохраняет форму начального профиля.

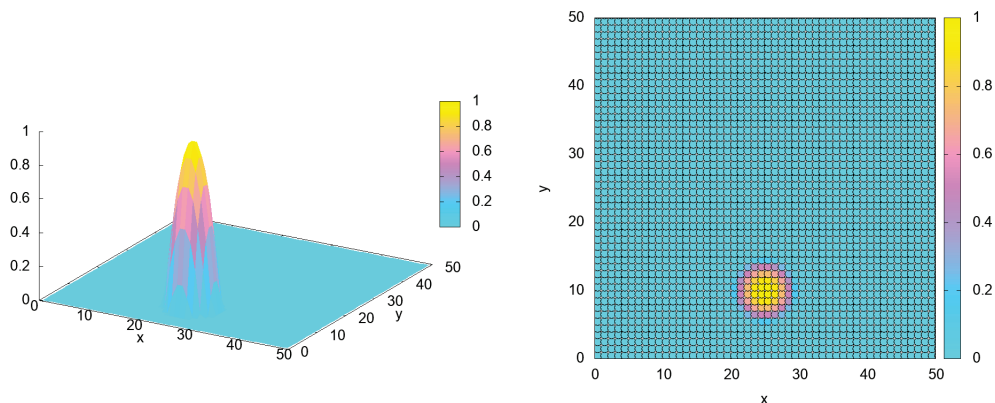


Рисунок 2 – Начальное условие

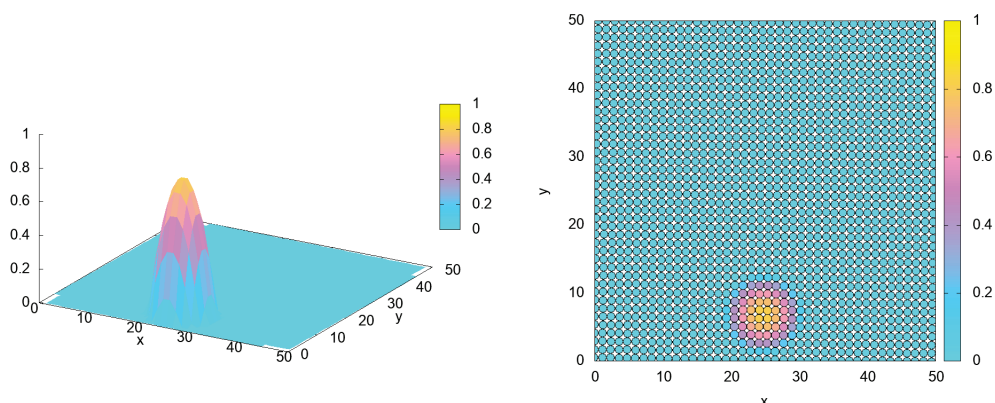


Рисунок 3 – Численное решение методом частиц с использованием метода Эйлера

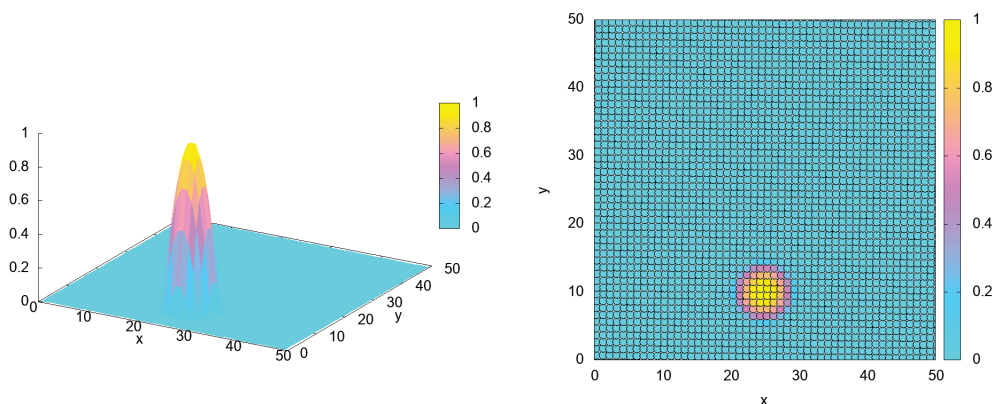


Рисунок 4 – Численное решение методом частиц с использованием модифицированного метода Эйлера

5. Метод частиц для вязкого газа

Уравнения газовой динамики представляют собой выражения общих законов массы, импульса и энергии. Следуя [13, 14] запишем систему уравнений для двумерного случая в переменных Эйлера:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (uE)}{\partial x} + \frac{\partial (vE)}{\partial y} = -\frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} \\ p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right) \end{array} \right.$$

Идеальный газ, $\gamma = 1.4$. ρ , u , v , p , E , τ — плотность, x и y -компоненты скорости, давление, полная энергия и тензор напряжений.

Алгоритм решения двумерной задачи похож на одномерный случай. Расчетная область делится на конечное число областей, служащих основаниями частиц. Высоты частиц находятся из начального условия — функций $\rho(x, y, 0)$, $\rho u(x, y, 0)$, $\rho v(x, y, 0)$, $E(x, y, 0)$ вычисленным в центрах оснований частиц (точках $x_i(0)$, $y_i(0)$). Радиус оснований частиц всех типов полагается одинаковым.

Сначала, как и в одномерном случае, решаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений для координат 4 типов частиц методом Эйлера.

В двумерном случае партнёр для взаимодействия выбирается с помощью минимизации «прицельного» параметра — угла между вектором относительной скорости и вектором, соединяющим центры частиц (алгоритмически — максимизация косинуса этого угла). Выбрав j -ю частицу для взаимодействия, переходим к одномерной задаче. Далее, с помощью корректора изменяем высоту i -й частицы аналогично (3), чтобы площадь трапеции между частицами оставалась постоянной:

$$\frac{1}{2}(H_i^{k+1} + H_j^k) \sqrt{(x_i^{k+1} - x_j^{k+1})^2 + (y_i^{k+1} - y_j^{k+1})^2} = S_{ij}^0.$$

Отсюда находим предварительную высоту (пока без учета сил давления):

$$H_i^{k+1} = \frac{2S_{ij}^0}{\sqrt{(x_i^{k+1} - x_j^{k+1})^2 + (y_i^{k+1} - y_j^{k+1})^2}} - H_j^k.$$

Следующим этапом алгоритма является учет сил давления. Разница давлений слева и справа от частицы приводит к изменению импульса и энергии частицы, то есть, к увеличению объёма соответствующих частиц. Аналогично [8], приходим к расчетным формулам:

$$\begin{aligned} V_{\rho u_i}(t_{j+1}) &= V_{\rho u_i}(t_j) + \tau (p_{1i}^-(t_j) - p_{1i}^+(t_j)) \\ V_{\rho v_i}(t_{j+1}) &= V_{\rho v_i}(t_j) + \tau (p_{2i}^-(t_j) - p_{2i}^+(t_j)) \\ V_{E_i}(t_{j+1}) &= V_{E_i}(t_j) + \tau (p_{1i}^-(t_j) u_{1i}^-(t_j) - p_{1i}^+(t_j) u_{1i}^+(t_j)) \\ &\quad + \tau (p_{2i}^-(t_j) v_{2i}^-(t_j) - p_{2i}^+(t_j) v_{2i}^+(t_j)) \end{aligned}$$

Вычисленные на предыдущем шаге значения плотности, импульса, и энергии позволяют определить давление в центре частицы. Для этого необходимо воспользоваться уравнением состояния.

Для определения значений давления и скорости на границе частицы используется схема учёта давления, основанная на «взаимодействии» частиц. Если на шаге по времени на одной из границ

частицы происходило взаимодействие (в соответствии с описанными выше для одномерной конфигурации критериями), то значение давления и скорости на этой границе полагались равными давлению и скорости той частицы, которая явилась причиной перестройки. Если же взаимодействия не произошло, то давление на границе полагалось равным давлению в центре частицы. Тем самым, объём частиц ρu , ρv и E дополнительно увеличивается.

Далее необходимо учесть диффузионную часть. Возьмём частицу i и выберем все соседние частицы j_i в некоем радиусе взаимодействия R . Для каждой пары (i, j_i) сведем задачу к одномерной и воспользуемся формулами (4) и (5). Стоит отметить, что текущий алгоритм требует нахождения соседей каждый шаг по времени, что сильно ухудшает производительность метода и убирает одно из преимуществ по сравнению с традиционными разностными методами, где узлы сетки стационарны и соседи всегда известны.

В качестве тестовой задачи для развития возможностей метода частиц рассматривается задача об обтекании пластины сжимаемым потоком газа. Граничные условия на пластине — стандартное условие прилипания ($u=v=0$). Существенное отличие задачи Блазиуса в том, что на носике пластины образуется сингулярность.

Для ламинарного пограничного слоя толщина слоя для несжимаемого случая определяется соотношением [15]:

$$\delta_H = 5.0 \frac{x}{\sqrt{Re}}$$

Из чего можно вычислить толщину пограничного слоя для сжимаемого газа:

$$\delta_{сж} = \delta_H \left(1 + 0.72r \frac{\gamma - 1}{2} M_w^2 \right)^{0.85}.$$

Рисунок 5 показывает установившееся решение для поля скорости. Число Маха $M = 2$.

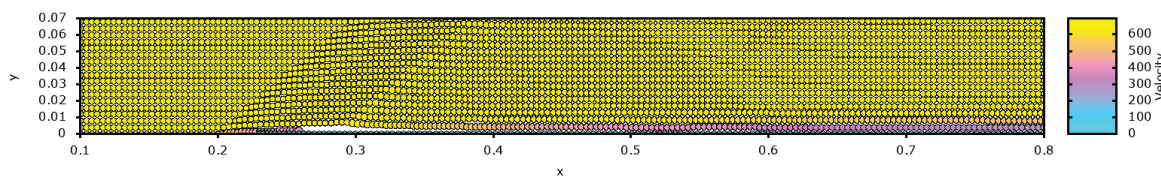


Рисунок 5 – Распределение скорости

Рисунок показывает, что в результате установления получена качественная картина течения.

6. Заключение

С помощью разрывного метода частиц без учета формы решены две задачи с диффузией: одномерная задача для уравнения Бюргера и двумерная задача Блазиуса. Также установлено, что использование на этапе корректора схемы повышенной точности увеличивает и итоговую точность метода частиц. Разработанный подход обеспечивает участие разрывного метода частиц в общем сравнительном анализе точности численных методов на референтных решениях для вязких задач.

7. Благодарности

Вычисления проведены с помощью гибридного суперкомпьютера К-100, установленного в Центре коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

8. Список источников

- [1] Harlow F.H. The Particle-in-Cell Computing Method for Fluid Dynamics // Methods in Computational Physics. Vol. 3, ed. B Alder, S Fernbach, M Rotenberg. New York: Academic Press. 1964. С. 319–343.

- [2] Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 640 с.
- [3] Choquin J.P., Huberson S. Particle simulation of viscous flow // *Comput. & Fluids*. 1989 Т. 17 № 2. С. 397–410. doi:10.1016/0045-7930(89)90049-2
- [4] Hermeline F. A deterministic particle method for transport diffusion equations: Application to the Fokker-Planck equation // *J. Comput. Phys.* 1989. Т. 82. № 1. С. 122–146. doi:10.1016/0021-9991(89)90038-7
- [5] Dimarco G., Pareschi L. Numerical methods for kinetic equations // *Acta Numerica*. 2014. Т. 23. С. 369–520. doi:10.1017/S0962492914000063
- [6] Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E. Comparative analysis of the accuracy of OpenFOAM solvers for the oblique shock wave problem // *Mathematica Montisnigri*. 2019. Т. XLV. С. 95–105. doi:10.20948/mathmontis-2019-45-8
- [7] Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E. On uncertainty quantification via the ensemble of independent numerical solutions // *Journal of Computational Science* 2020. Т. 42. 101114. doi:10.1016/j.jocs.2020.101114
- [8] Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E. Analysis and Visualization of the Computational Experiments Results on the Comparative Assessment of OpenFOAM Solvers Accuracy for a Rarefaction Wave Problem // *Scientific Visualization*. 2021. Т. 13. № 3. С. 34–46. doi:10.26583/sv.13.3.04
- [9] Богомолов С.В., Кувшинников А.Е. Разрывный метод частиц на газодинамических примерах // *Матем. моделирование*. 2019. Т. 31. №2. С. 63–77. doi:10.1134/S0234087919020059
- [10] Bogomolov S.V., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E. Comparative Verification of Numerical Methods Involving the Discontinuous Shapeless Particle Method// *Scientific Visualization*. 2022. Т. 14. № 4. С. 97–109. doi:10.26583/sv.14.4.09
- [11] Богомолов С.В., Звенков Д.С. Явный метод частиц, несглаживающий газодинамические разрывы // *Математическое моделирование*. 2007. Т. 19. № 3. С. 74–86.
- [12] Crowley W.P. Numerical advection experiments // *Monthly Weather Rev.* 1968. Т. 96. №1. С. 1–11. doi:10.1175/1520-0493(1968)096<0001:NAE>2.0.CO;2
- [13] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2015. 728 с.
- [15] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.