

Практическое применение локальных оценок: устранение сингулярности в решении уравнения глобального освещения

В. П. Будак^{1,2}, А. В. Гримайло^{1,2}, В. С. Желтов^{1,2}, С. А. Якушев²

¹ НИУ «МЭИ», ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1, Москва, 111250, Россия

² Центр инновационных разработок МСК БЛ ГРУПП, 1-й Рижский пер., д. 6, стр. 2, пом. 10, Москва, 129626, Россия

Аннотация

Работа посвящена устранению сингулярности в решении уравнения глобального освещения с помощью локальных оценок, наличие которой препятствует практическому применению данного метода и созданию программ на его основе. Предложен способ устранения указанной проблемы путем усреднения искомой величины в некоторой окрестности исследуемой точки. Переход к усреднению происходит только при малых расстояниях между точкой столкновения и исследуемой точкой. В остальных случаях расчет проводится по обычному алгоритму локальной оценки. Приведены результаты моделирования светораспределения в модифицированной сцене Cornell box в виде визуализаций при различных значениях количества лучей, порога перехода к усреднению и радиуса сферы (окрестности) усреднения. Предложенный способ и полученные результаты открывают путь для практической программной реализации локальных оценок.

Ключевые слова

Уравнение глобального освещения, Монте-Карло, локальные оценки, сингулярность.

Practical Application of Local Estimations: Singularity Removal in the Solution of the Global Illumination Equation

V. P. Budak^{1,2}, A. V. Grimailo^{1,2}, V. S. Zheltov^{1,2}, S. A. Yakushev²

¹ NRU «MPEI», 14 building 1 Krasnokazarmennaya st, Moscow, 111250, Russia

² Innovation Development Centre ILIC BL GROUP, office 10, 6 building 2, 1st Riga lane, Moscow, 129626, Russia

Abstract

The work is devoted to the elimination of the singularity in the local-estimation-based solution of the global illumination equation. The presence of the singularity prevents the practical application of this method and the creation of software based on it. A method is proposed to eliminate this problem by averaging the sought value in a certain neighbourhood of the point of interest. The transition to averaging occurs only at small distances between the collision point and the point of interest. In other cases, the calculation is conducted according to the usual local estimation algorithm. The results of the light distribution modelling in the modified Cornell box scene are presented as visualizations for different values of the number of rays, threshold of transition to averaging and the averaging sphere (neighbourhood) radius. The proposed method and the results obtained open the way for the practical program realization of local estimations.

Keywords

Global illumination equation, Monte-Carlo, local estimations, singularity.

ГрафиКон 2023: 33-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-21 сентября 2023 г., Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия

EMAIL: BudakVP@gmail.com (В. П. Будак); GrimailoAV@gmail.com (А. В. Гримайло); Zheltov@list.ru (В. С. Желтов); YSA@bl-g.ru (С. А. Якушев)

ORCID: 0000-0003-4750-0160 (В. П. Будак); 0000-0002-1253-7687 (А. В. Гримайло)



© 2023 Copyright for this paper by its authors.

Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

1. Введение

Решение большого количества прикладных задач светотехники и компьютерной графики, таких как расчет оптических систем осветительных приборов, расчет многократных отражений при моделировании осветительных установок, моделирование отражения света от реальной поверхности, визуализация распределения яркости и др. сводится к решению уравнения глобального освещения (УГО), которое было получено в [1]. В данной работе авторы используют его в форме [2]:

$$L(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{l}}) = L_0(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{l}}) + \int_{\Sigma} \frac{1}{\pi} \rho(\mathbf{r}_s; \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') F(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s') L(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{l}}') d^2 r_s', \quad (1)$$

где $L(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{l}})$ — яркость в точке \mathbf{r}_s на поверхности сцены в направлении $\hat{\mathbf{l}}$; $L_0(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{l}})$ — яркость самосвечения; $\rho(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')$ — коэффициент яркости; $F(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s')$ — геометрический фактор, равный:

$$F(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s') = \frac{|\langle \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_s), \hat{\mathbf{l}}(\mathbf{r}_s \rightarrow \mathbf{r}_s') \rangle \langle \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_s'), \hat{\mathbf{l}}(\mathbf{r}_s' \rightarrow \mathbf{r}_s) \rangle|}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_s'|^2} = \frac{|\langle \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_s), (\mathbf{r}_s' - \mathbf{r}_s) \rangle \langle \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_s'), (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_s') \rangle|}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_s'|^4}, \quad (2)$$

где $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_s)$ — нормаль к поверхности Σ в точке \mathbf{r}_s .

Данное уравнение относится к типу интегральных уравнений Фредгольма второго рода и в общем случае не имеет аналитического решения, исключения составляют лишь случай фотометрической сферы и задача Соболева [3]. Поэтому на первый план выходит большое количество численных методов [4], которые были разработаны за годы развития компьютерной графики: прямое моделирование, прямая и обратная трассировка лучей, метод конечных элементов (radiosity), метод фотонных карт и т. д. При этом математически строгое обоснование решения УГО было получено только для метода конечных элементов, основанного на диффузном приближении. Остальные методы, относящиеся к группе методов Монте-Карло, носят преимущественно феноменологический характер.

На сегодняшний день наибольшее распространение получил метод фотонных карт [5], который имеет коммерческую реализацию в виде таких программ, как DIALux evo, ставшего своего рода стандартом светотехнической отрасли, а также V-Ray и Corona, широко применяемых в сферах, связанных с фотореалистической визуализацией трехмерных сцен.

Данный метод позволяет использовать произвольную модель отражения света от поверхности, и таким образом рассчитывать яркость — величину, несущую наиболее полную информацию о световом поле [6], однако DIALux evo ограничивается только диффузным приближением. Программы наподобие V-Ray и Corona позволяют получить за приемлемое время фотореалистическое изображение, т. е. распределение яркости. Такая возможность, тем не менее, достигается за счет использования различных приближений и допущений, из-за которых результат моделирования уже нельзя считать физически корректным.

Поскольку уравнение глобального освещения является частным случаем уравнения переноса излучения в отсутствие какой-либо среды, то для его решения можно применять те же методы, которые используются при решении задач переноса излучения. Одним из наиболее эффективных таких методов, по мнению авторов, являются локальные оценки, впервые предложенные в [7]. Алгоритм при этом сводится к построению марковской цепи блуждания луча по сцене и вычислению на каждой итерации ядра уравнения. Данный способ позволяет оценивать искомую величину сразу в интересующей нас точке, а также получать оценку в нескольких точках всего по одному первичному лучу.

Хотя аналогичный метод был предложен в [8,9], математически строгое обоснование применения локальных оценок для решения уравнения глобального освещения было дано в [10]; там же на примере задачи Соболева показано, что локальные оценки позволяют получать результат в 80-90 раз быстрее по сравнению с прямым моделированием.

Чтобы иметь возможность применять метод локальных оценок для решения УГО, необходимо его видоизменить. В уравнении (1) интегрирование ведется по пространству координат \mathbf{r}_s на поверхности Σ . Но яркость определяется точкой в фазовом пространстве

координат и направлений $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$, поэтому по аналогии с уравнением переноса излучения интегрирование в УГО должно также вестись и по координатам, и по направлениям.

Поскольку выбор точек \mathbf{r}_s и \mathbf{r}'_s однозначно определяет направление луча $\hat{\mathbf{l}}'$:

$$\hat{\mathbf{l}}' = \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s|}, \quad (3)$$

то уравнение (1) можно преобразовать путем ввода в ядро δ -функции, связывающей переменные $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}'_s, \hat{\mathbf{l}}'$. В таком случае уравнение глобального освещения примет вид [10]:

$$L(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{l}}) = L_0(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{l}}) + \int_V k(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}_s) L(\mathbf{r}'_s, \hat{\mathbf{l}}) d^3 r'_s, \quad (4)$$

$$k(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}_s) = \frac{1}{\pi} \rho(\mathbf{r}_s; \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') \frac{|\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{l}})|}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s|^2} \Theta(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}'_s) \delta\left(\hat{\mathbf{l}}' - \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s|}\right),$$

где V — объем сцены; $\Theta(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}'_s)$ — функция видимости точки \mathbf{r}'_s из \mathbf{r}_s .

Для уравнения в форме (4) уже можно математически строго применять метод локальных оценок. Так, в случае диффузного приближения, когда уравнение глобального освещения переходит в уравнение излучательности (radiosity), локальная оценка позволяет определять освещенность E в интересующих нас точках \mathbf{r} . Например, для точечного изотропного источника оценка освещенности, установившейся в результате многократных отражений, запишется следующим образом [10]:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{\pi N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^T Q_i F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{si}), \quad Q_i = \prod_{l=0}^i \rho_l, \quad \rho_0 = 1, \quad (5)$$

где Φ — световой поток источника; N — количество лучей; T — количество соударений в траектории; Q — вес луча; ρ — коэффициент отражения.

Для оценки яркости L в произвольной точке фазового пространства $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$ в общем случае необходим переход к двойной локальной оценке [10–12]. Для этого представим уравнение (4) в операторной форме:

$$L = L_0 + KL. \quad (6)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде ряда Неймана, что позволяет провести преобразование (6) к новому виду:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} K^n L_0 = L_0 + KL_0 + \sum_{n=2}^{\infty} K^n L_0 = L_0 + KL_0 + K^2 \sum_{n=0}^{\infty} K^n L_0 = L_0 + KL_0 + K^2 L. \quad (7)$$

Оценка, соответствующая последнему уравнению, называется двойной локальной и определяется формулой [10]:

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = M \sum_{i=0}^{\infty} Q_i k_1(\mathbf{r}_{si}, \mathbf{r}_s, \hat{\mathbf{l}}), \quad (8)$$

$$k_1 = \int_V k(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}''_s) k(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) d^3 r''_s,$$

где M — оператор среднего по траекториям. Последний интеграл берется всего по одному лучу $\mathbf{r}''_s = \mathbf{r} - \zeta \hat{\mathbf{l}}$.

Таким образом, двойная локальная оценка позволяет моделировать непосредственно уравнение глобального освещения (4) и определять значение яркости в произвольной точке объема сцены в произвольном направлении.

Описанный выше метод позволяет математически строго решать уравнение глобального освещения и открывает дорогу к созданию прикладных программ для физически корректного моделирования яркости в произвольных сценах. Авторы считают необходимым сопоставить локальные оценки и двунаправленное моделирование траекторий [4,8,9] — это одно и то же.

При этом локальной оценкой определяется реакция любого приемника с конечной апертурой, а двойная позволяет определить яркость. Возможно также построение способом, аналогичным (7), тройных, четверных и т. д. оценок, хотя их применение не очевидно.

Тем не менее, практическая реализация локальных оценок сталкивается с трудностями, которые вытекают из наличия сингулярности в ядре УГО. Она обусловлена присутствием $|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s|^2$ в знаменателе выражения (2) геометрического фактора $F(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}'_s)$: если очередная точка столкновения луча с поверхностью \mathbf{r}'_s находится очень близко к точке оценки искомой величины \mathbf{r}_s , возникает «всплеск», который вносит существенные искажения в оценку.

Такие столкновения возможны вблизи ребер соседних граней при сеточном представлении объектов сцены. В результате прямая реализация метода локальных оценок в виде программы для моделирования переноса яркости в произвольных сценах освещения теряет смысл, потому что вероятность возникновения «всплесков» увеличивается с ростом сложности сцены. Следующие разделы настоящей работы посвящены способу решения этой проблемы.

2. Устранение сингулярности в решении уравнения глобального освещения

Последствия, возникающие из-за наличия сингулярности в ядре УГО, можно устранить путем [11,13] усреднения искомой величины по некоторой окрестности исследуемой точки $\mathbf{r}^* = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| < \varepsilon\}$. Рассмотрим данный способ на примере точечного изотропного источника при диффузном приближении. В этом случае локальная оценка освещенности в точке \mathbf{r} имеет вид (5). Тогда среднее значение освещенности в некоторой окрестности исследуемой точки равно по определению:

$$\bar{E}(\mathbf{r}^*) = \frac{1}{V} \int_V E(\mathbf{r}) dV = \frac{\Phi}{\pi N V} \int_V \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^T Q_i \rho_i \frac{|(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_{si})) (\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_{si}), \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{r}_{si} \rightarrow \mathbf{r}))|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{si}|^2} dV, \quad (9)$$

где V — объем окрестности \mathbf{r}^* . Поскольку N и T конечны, выражение (9) можно записать в форме:

$$\bar{E}(\mathbf{r}^*) = \frac{\Phi}{\pi N V} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^T Q_i \rho_i \int_V \frac{|(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_{si})) (\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_{si}), \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{r}_{si} \rightarrow \mathbf{r}))|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{si}|^2} dV. \quad (10)$$

Значение интеграла здесь будем искать методом статистических испытаний. Поскольку $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{si}|^2 \geq 0$, и можно показать, что выполняется условие нормировки:

$$\frac{1}{C} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{si}|^2} dV = 1, \quad (11)$$

то функцию

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{C |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{si}|^2} \quad (12)$$

будем рассматривать в качестве плотности вероятности. Тогда оценка искомого интеграла в (10) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{|(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_{si})) (\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_{si}), \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{r}_{si} \rightarrow \mathbf{r}))|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{si}|^2} dV &= C \int_V p(\mathbf{r}) |(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_{si})) (\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_{si}), \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{r}_{si} \rightarrow \mathbf{r}))| dV \approx \\ &\approx \frac{C}{M} \sum_{m=1}^M |(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_m), \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{r}_m \rightarrow \mathbf{r}_{si})) (\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_{si}), \hat{\mathbf{I}}'(\mathbf{r}_{si} \rightarrow \mathbf{r}_m))|. \end{aligned} \quad (13)$$

Перейдем в сферическую систему координат с центром в точке \mathbf{r}_i , зенитный угол θ отсчитывается от направления $\hat{\mathbf{l}}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_{si})$. При этом возможны два варианта: $\Delta r > \varepsilon$ и $\Delta r < \varepsilon$, $\Delta r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{si}|$. Рассмотрим сначала случай $\Delta r > \varepsilon$ (рисунок 1), тогда из условия нормировки (12) получим:

$$C = \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{si}|^2} dV = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_{\max}} \int_{\rho=\Delta r-\varepsilon}^{\rho=\Delta r+\varepsilon} \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho = 4\pi\varepsilon(1 - \cos \theta_{\max}), \quad (14)$$

причем

$$\cos \theta_{\max} = \sqrt{1 - \varepsilon^2 / \Delta r^2}, \quad V = \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta_{\max}) [(\Delta r + \varepsilon)^3 - (\Delta r - \varepsilon)^3]. \quad (15)$$

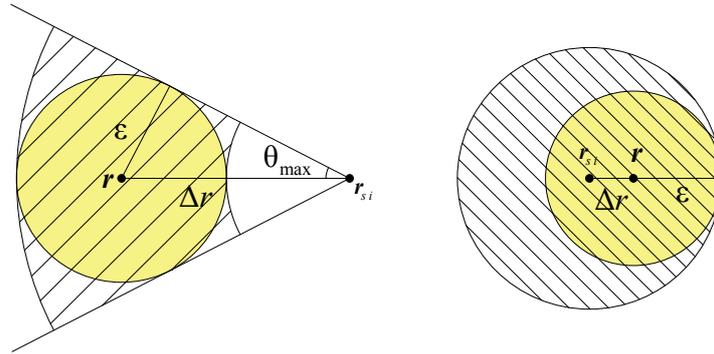


Рисунок 1 – Случай $\Delta r > \varepsilon$ (слева) и $\Delta r < \varepsilon$ (справа)

Отсюда формулы для розыгрыша точек в рассматриваемой окрестности при $\Delta r > \varepsilon$:

$$\varphi = 2\pi\gamma_1, \quad \cos \theta = 1 - \gamma_2(1 - \cos \theta_{\max}), \quad \rho = \Delta r + \varepsilon(1 - 2\gamma_3), \quad (16)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — независимые случайные числа в интервале $(0, 1)$. Заметим, что пределы интегрирования в (14) задают область, которая выходит за границы рассматриваемой ε -окрестности (заштрихована на рисунке 1). Поэтому при розыгрыше точек необходимо [11] выполнять проверку $|\mathbf{r}_{si} - \mathbf{r}_m| < \varepsilon$.

В случае $\Delta r < \varepsilon$ из условия нормировки (12) получаем:

$$C = \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{si}|^2} dV = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=\Delta r+\varepsilon} \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho = 4\pi(\Delta r + \varepsilon), \quad (17)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi (\Delta r + \varepsilon)^3. \quad (18)$$

Тогда формулы розыгрыша точек в рассматриваемой окрестности при $\Delta r < \varepsilon$:

$$\varphi = 2\pi\gamma_1, \quad \cos \theta = 1 - 2\gamma_2, \quad \rho = \gamma_3(\Delta r + \varepsilon). \quad (19)$$

Здесь также необходимо выполнять указанную выше проверку (см. рисунок 1).

3. Результаты моделирования с учетом усреднения

Алгоритм метода локальных оценок Монте-Карло с учетом усреднения искомой величины по некоторой ε -окрестности исследуемой точки был реализован в рамках работы над программой Light-in-Night Pro, предназначенной для моделирования светораспределения в произвольных сценах освещения.

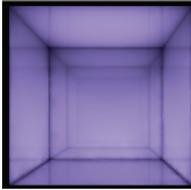
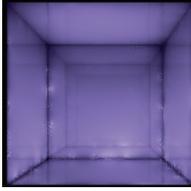
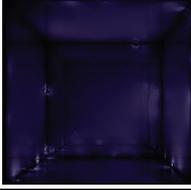
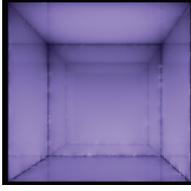
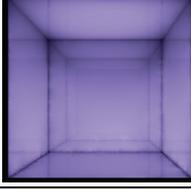
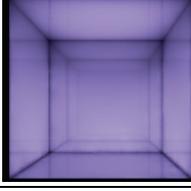
Накопление результата производилось по обычному алгоритму локальной оценки, а усреднение использовалось только в случае $\Delta r < \delta$. Причем оценка усредненного по

окрестности значения проводилась всего по одной точке, выбранной в соответствии с формулами из предыдущего раздела.

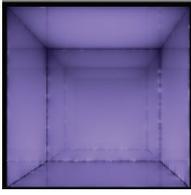
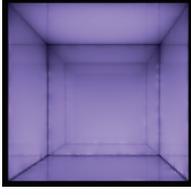
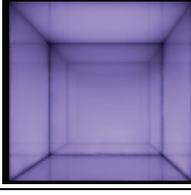
В таблице 1 приведены результаты расчетов в виде визуализаций отраженной составляющей яркости в модифицированной сцене Cornell box (см. таблицу 1) с размерами $5 \times 5 \times 5$ при различных значениях параметров: N — количество лучей, δ — радиус перехода к интегрированию по сфере, ε — радиус сферы (окрестности) усреднения.

В качестве источника выбран диффузный точечный светильник, расположенный в центре «потолка» комнаты. Для наглядной демонстрации возникающих «всплесков» грани сцены имеют смешанный характер отражения. Яркость пикселей каждого изображения нормирована относительно максимального значения яркости, полученного в результате вычислений.

Таблица 1 — Результаты моделирования

N	δ	ε	Визуализация
Изменение N , остальные параметры фиксированы			
10 000	0,25	0,15	
1 000	0,25	0,15	
100	0,25	0,15	
Изменение ε , остальные параметры фиксированы			
10 000	0,25	0,05	
10 000	0,25	0,10	
10 000	0,25	0,15	

Продолжение таблицы 1

Изменение δ , остальные параметры фиксированы			
10 000	0,01	0,15	
10 000	0,05	0,15	
10 000	0,10	0,15	
10 000	0,25	0,15	

Как видно из таблицы 1, переход к усреднению искомого значения по некоторой ε -окрестности сглаживает «всплески», которые образуются в углах сцены. Основное значение имеют количество лучей N и радиус перехода к усреднению δ . Причем при неудачно выбранном значении δ изображение может вообще не нести никакой информации из-за «всплесков» яркости. Также стоит отметить, что приемлемое качество изображения достигается уже при 10 000 лучей, что довольно мало по сравнению тем количеством, которое обычно требуется при прямом моделировании.

Предложенный в настоящей работе способ устранения сингулярности в решении уравнения глобального освещения открывает дорогу для дальнейшего развития локальных оценок Монте-Карло применительно к данному уравнению и практической реализации метода в виде полноценных программ для моделирования переноса яркости в произвольных сценах.

Данную работу можно продолжить путем исследования влияния параметров N , δ и ε на получаемый результат. Очевидно, например, что в сценах со сложной геометрией необходимо будет устанавливать большие значения δ , поскольку с ростом сложности сцены увеличится и количество «опасных» столкновений, вызывающих «всплески» яркости. Однако для определения конкретных значений требуется провести моделирование с помощью предложенного в работе метода на большем количестве примеров.

4. СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] Kajiya J.T. The rendering equation // Proc. 13th Annu. Conf. Comput. Graph. Interact. Tech. SIGGRAPH 1986. 1986. С. 143–150.
- [2] Будак В.П., Макаров Д.Н. Компьютерная графика с приложением в светодизайн: Учебник для высших учебных заведений. М.: Редакция журнала «Светотехника», 2022. 264 с.
- [3] Соболев В.В. Точечный источник света между параллельными плоскостями // Доклады Академии Наук СССР. 1944. Т. XLII, № 4. С. 175–176.

- [4] Frolov V. и др. The current state of the methods for calculating global illumination in tasks of realistic computer graphics // Proc. Inst. Syst. Program. RAS. 2021. Т. 33, № 2. С. 7–48.
- [5] Jensen H.W. Global Illumination using Photon Maps // In Rendering Techniques'96. Springer-Verlag, 1996. С. 21–30.
- [6] Апресян Л.А., Кравцов Ю.А. Теория переноса излучения: статистические и волновые аспекты. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 216 с.
- [7] Kalos M.H. On the Estimation of Flux at a Point by Monte Carlo // Nucl. Sci. Eng. 1963. Т. 16, № 1. С. 111–117.
- [8] Veach E., Guibas L. Bidirectional Estimators for Light Transport // Photorealistic Render. Tech. 1995. С. 145–167.
- [9] Veach E. Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation. Ph.D. Dissertation, Stanford University, 1998. 406 с.
- [10] Будак В.П., Желтов В.С., Калатуцкий Т.К. Локальные оценки метода Монте-Карло в решении уравнения глобального освещения с учетом спектрального представления объектов // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т. 4, № 1. С. 75–84.
- [11] Марчук Г.И. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Издательство «Наука». Сибирское отделение, 1976. 283 с.
- [12] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. 320 с.
- [13] Будак В.П. Метод расчета переноса оптического изображения в мутных средах с анизотропным рассеянием: диссертация ... канд. техн. наук: 05.09.07. М.: Моск. энерг. ин-т, 1984. 188 с.