Моделирование геометрических объектов путём расширения размерности пространства

Е.В. Конопацкий [1], С.И. Ротков [1], М.В. Лагунова [1]

[1] *Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, ул. Ильинская, 65, г. Нижний Новгород, 603950, Россия*

Аннотация

Рассмотрен метод определения точек выхода из плоскости в точечном исчислении, который является аналогом векторного произведения векторов в векторном исчислении. Выполнено его обобщение как в сторону уменьшения размерности пространства, так и в сторону его увеличения. Представлен математический аппарат определения точек выхода из пространства различной размерности. Предложен и реализован подход к моделированию геометрических объектов с помощью точек, расширяющих размерность пространства. В результате за счёт использования функции длины отрезка выхода из пространства различной размерности определены множество плоских кривых в одномерном симплексе и пространственных кривых в двумерном. Приведены примеры определения эллиптического цилиндра и пространственной линии на эллиптическом цилиндре в плоском симплексе.

Ключевые слова

Геометрическое моделирование, точечное исчисление, точка выхода из плоскости, расширение размерности пространства, проекции, реконструкция геометрических объектов.

Modeling Geometric Objects by Expanding the Dimensionality of Space

E.V. Konopatskiy [1], S.I. Rotkov [1], M.V. Lagunova [1]

[1] *Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Ilyinskaya Street, 65, Nizhny Novgorod, 603950, Russia*

Abstract

We consider the method of determining the exit points from the plane in the point calculus, which is analogous to the vector product of vectors in the vector calculus. It is generalized both in the direction of reducing the dimensionality of space, and in the direction of increasing it. The mathematical apparatus for determining the exit points from the space of different dimensionality is presented. The approach to modeling geometric objects with the help of points that expand the dimensionality of space has been proposed and implemented. As a result, by using the exit segment length function of different dimensionality the set of flat curves in one-dimensional simplex and spatial curves in two-dimensional ones are defined. Examples of definition of an elliptic cylinder and a spatial line on an elliptic cylinder in a planar simplex are given.

Keywords

Geometric modeling, point calculus, point out of plane, extension of space dimensionality, projections, reconstruction of geometric objects.

ГрафиКон 2022: 32-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-22 сентября 2022 г., Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина, Рязань, Россия
EMAIL: e.v.konopatskiy@mail.ru (Е.В. Конопацкий); rotkov@nngasu.ru (С.И. Ротков); mvlnn@mail.ru (М.В. Лагунова)
ORCID: 0000-0003-4798-7458 (Е.В. Конопацкий); 0000-0002-0662-7619 (С.И. Ротков); 0000-0002-0671-8609 (М.В. Лагунова)

1. Введение

Традиционно геометрические объекты определяются в пространстве равной или большей размерности. Например, кривая, как однопараметрическое множество точек, определяется в двумерном, трёхмерном или пространстве более высоких размерностей. Поверхность, как двухпараметрическое множество точек, определяется в трёхмерном или пространстве более высоких размерностей. Для отображения поверхностей в пространстве меньшей размерности используется специальная система плоскостей проекций (например, эпюр Монжа). Примером может служить обратная задача начертательной геометрии [1-4], которая заключается в реконструкции пространственного образа геометрического объекта по его изображениям на плоскости. При этом для реконструкции трёхмерного геометрического объекта необходимо наличие минимум двух плоскостей проекций, содержащих три оси проекций и формирующих трёхмерную систему координат. С учётом начала координат и единичных векторов (орт) формируется декартовый симплекс трёхмерного пространства (4 точки, не лежащих в одной плоскости). В точечном исчислении [5-8] эти точки используются в качестве базовых для описания геометрических объектов в трёхмерном пространстве. Вместе с тем, одну из точек симплекса можно заменить эквивалентным математическим выражением, что позволяет описывать трёхмерные геометрические объекты на основе одной плоской проекции, используя соответственно симплекс плоскости (3 точки, не лежащих на одной прямой). Такой подход имеет обобщение на многомерное пространство и получил в точечном исчислении название точек, расширяющих размерность пространства, или точек выхода из пространства меньшей размерности (например, точка выхода из плоскости для определения трёхмерного пространства).

2. Точки, расширяющие размерность пространства

Пусть заданы точки A и B в декартовой системе координат: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$. Построим две проекции прямой AB на координатные оси. На оси Ox имеем отрезок $x_A x_B$ с длиной $x_S = |x_A - x_B|$, на Oy – $y_A y_B$ с длиной $y_S = |y_A - y_B|$. Тогда $S(x_S, y_S)$ – точка выхода из прямой AB (рисунок 1) на длину $s = \sqrt{x_S^2 + y_S^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

$$\frac{OD}{OS} = \frac{O-D}{O-S} = \frac{d}{s} \to D = S\frac{d}{s}.$$

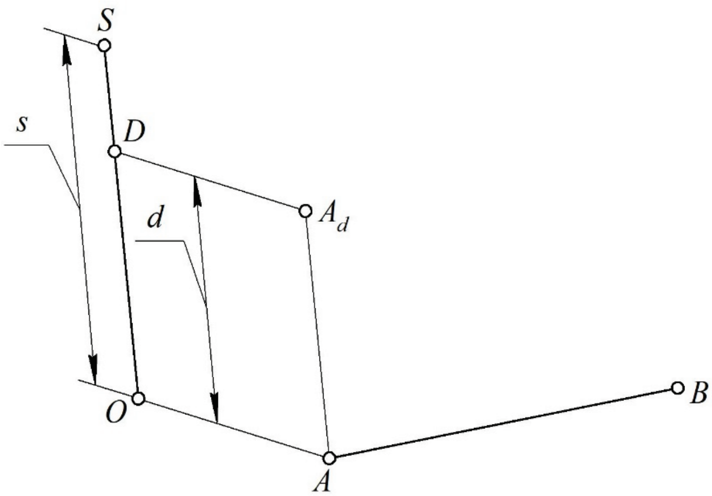

Рисунок 1 – Геометрическая схема точки выхода из прямой AB на расстояние d

Определение 1. Точка $S\left(x_S, y_S\right)$, где координаты в линейных единицах численно равны соответствующим длинам проекций отрезка на оси глобальной системы координат, называется точкой выхода из прямой AB.

Точка S расширяет одномерное пространство прямой AB до плоскости ABS, а с учётом наперёд заданной длины d – до плоскости ABD. Чтобы привязать точку D непосредственно к исходному отрезку AB необходимо выполнить его параллельный перенос:

$$A_d = D + A - O = S\frac{d}{s} + A = S\frac{d}{\sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2}} + A.$$

Следует отметить, что при $d = s$ получим равнобедренный треугольник ABA_d.

Анализируя полученный результат можно сделать вывод, что получено точечное уравнение плоскости, основой которого служит одномерный симплекс – отрезок прямой AB, поскольку третья точка симплекса A_d выражена через координаты точек A и B.

Рассмотрим случай выхода точки S из плоскости. Пусть заданы точки A, B, C в декартовой системе координат: $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$, $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$ и $C\left(x_C, y_C, z_C\right)$. Построим три проекции треугольника ABC на координатные плоскости. Для наглядности представим эти проекции на эпюре Г. Монжа (рисунок 2).

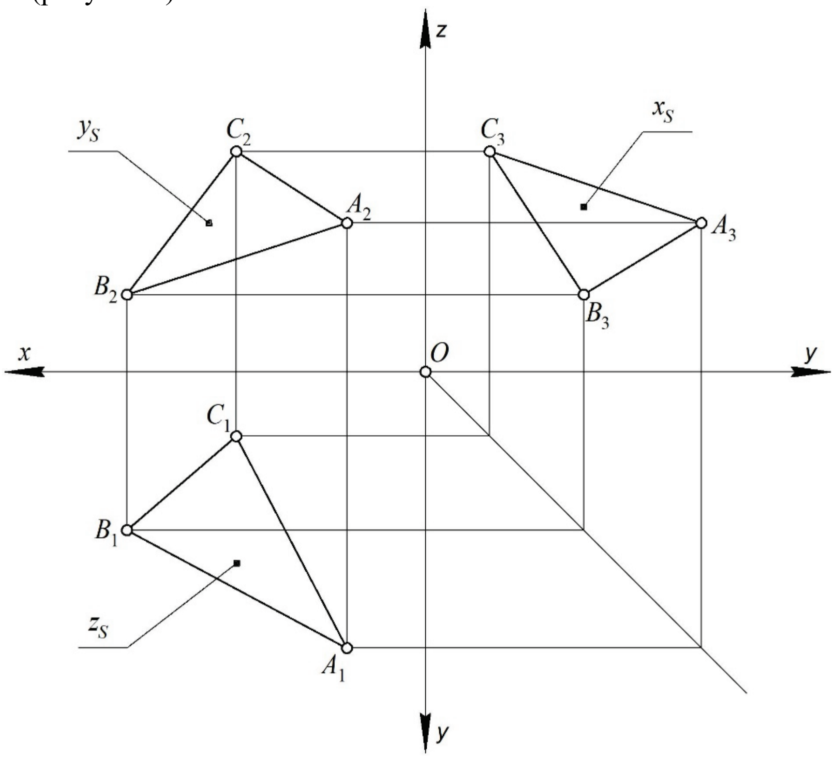

Рисунок 2 – Проекции треугольника ABC на эпюре Г. Монжа

На плоскости $П_1$ получим треугольник $A_1B_1C_1$ с площадью z_S, на $П_2$ – $A_2B_2C_2$ с площадью y_S, на $П_3$ – $A_3B_3C_3$ с площадью x_S. Через координаты точек плоскости эти площади определяются следующим способом:

$$x_S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix}, \quad y_S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_A & x_A & 1 \\ z_B & x_B & 1 \\ z_C & x_C & 1 \end{vmatrix}, \quad z_S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Определение 2. Точка $S\left(x_S, y_S, z_S\right)$, где координаты в линейных единицах численно равны соответствующим площадям проекций исходного треугольника на плоскости проекций, выраженным в квадратных единицах, называется точкой выхода из плоскости треугольника ABC.

Следует отметить, что точка выхода из плоскости в точечном исчислении является аналогом векторного произведения векторов в векторном исчислении.

Свойства точки $S\left(x_S, y_S, z_S\right)$ выхода из плоскости ABC и ее геометрическая интерпретация:

1. Прямая OS перпендикулярна плоскости ABC.

2. Длина отрезка OS равна площади треугольника ABC ($|OS| = s$, где $s = \sqrt{\left(x_S\right)^2 + \left(y_S\right)^2 + \left(z_S\right)^2}$).

Для практики построения геометрических объектов, расположенных над (под) плоскостью ABC удобно определить точку D выхода из плоскости на заданное расстояние d (рисунок 3):

$$\frac{OD}{OS} = \frac{O-D}{O-S} = \frac{d}{s} \Rightarrow D = \frac{d}{s}S.$$

Воспользовавшись точечной формулой параллельного переноса, определим точку A_d (рисунок 3):

$$A_d = D + A - O = A + \frac{d}{s}S.$$

Аналогичным образом можно выполнить параллельный перенос в любую точку плоскости ABC, выбирать которую можно в зависимости от конкретной практической задачи. Также можно выполнить параллельный перенос в текущую точку, что позволяет моделировать геометрические объекты из пространства меньшей в пространстве большей размерности.

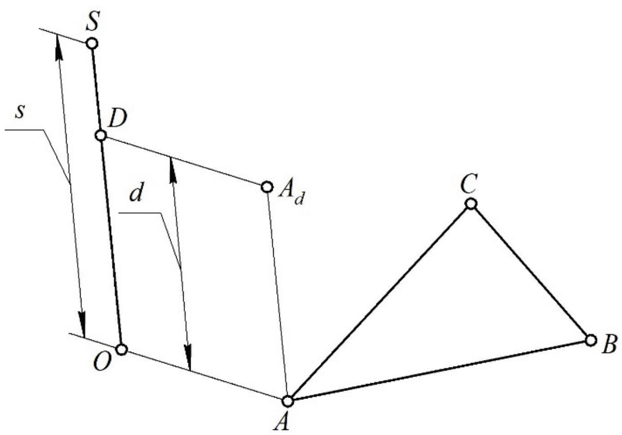

Рисунок 3 – Геометрическая схема определения точки выхода из плоскости на заданное расстояние

Для текущей точки плоскости $M = \left(A-C\right)p + \left(B-C\right)q + C$, точка M_d выхода из нее на величину d определяется точечной формулой:

$$M_d = M + D - O = \left(A-C\right)p + \left(B-C\right)q + \frac{d}{s}S + C.$$

Обобщая этот подход, определим точку выхода из 3-мерного пространства, заданного симплексом $TABC$, на величину d:

$$A_d = D + A - O = A + \frac{d}{s}S.$$

где $s = \sqrt{\left(x_S\right)^2 + \left(y_S\right)^2 + \left(z_S\right)^2 + \left(t_S\right)^2}$;

$$x_S = \begin{vmatrix} y_A & z_A & t_A & 1 \\ y_B & z_B & t_B & 1 \\ y_C & z_C & t_C & 1 \\ y_T & z_T & t_T & 1 \end{vmatrix},\ y_S = \begin{vmatrix} z_A & t_A & x_A & 1 \\ z_B & t_B & x_B & 1 \\ z_C & t_C & x_C & 1 \\ z_T & t_T & x_T & 1 \end{vmatrix},\ z_S = \begin{vmatrix} t_A & x_A & y_A & 1 \\ t_B & x_B & y_B & 1 \\ t_C & x_C & y_C & 1 \\ t_T & x_T & y_T & 1 \end{vmatrix},\ t_S = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_T & y_T & z_T & 1 \end{vmatrix}.$$

Аналогичным образом возможно дальнейшее обобщение точки выхода из пространства любой размерности и её использование для определения геометрических объектов из пространства меньшей размерности.

3. Моделирование геометрических объектов с помощью точек, расширяющих размерность пространства

Геометрическое моделирование кривых линий с помощью точек, расширяющих размерность пространства, не отличается от обычного определения геометрических объектов в точечном исчислении, но при этом появляется возможность их определения из пространства меньшей размерности. Например, плоские кривые можно определять в одномерном симплексе (на прямой), а пространственные кривые и поверхности – в двумерном (в плоскости). Для этого необходимо величину выхода из прямой (или плоскости) представить в виде функции от параметра, формируя однопараметрическое множество точек для определения кривой и двухпараметрическое – для поверхности.

Пусть задано одномерное пространство – прямая AB точечным уравнением: $M=(A-B)p(t)+B$. Используя точку выхода из прямой S (рисунок 1), можно определить множество плоских кривых точечным уравнением:

$$M_d=(A-B)p(t)+(S-B)q(t)+B,$$

где $p(t)$ и $q(t)$ – функции от параметра t, определяющие вид плоской кривой.

Такое определение плоской кривой в точечном исчислении является классическим. При этом точка выхода из прямой S остаётся строго фиксированной и определяется только значением длины отрезка OD (рисунок 1). Вместе с тем, эта точка может быть подвижной. Тогда точечное уравнение плоской кривой в симплексе AB будет иметь следующий вид:

$$M_d=(A-B)p(t)+\frac{d(t)}{s}S+B,$$

где $p(t)$ – функция, которая определяет скорость движения точки M по прямой AB;

$d(t)$ – функция, которая определяет характер изменения длины отрезка OD (рисунок 1) в плоскости ABS;

t – параметр точечного уравнения плоской кривой.

Полученный результат можно использовать, как один из возможных методов реконструкции кривых линий на основе проекции на прямую линию или, в частном случае, на координатную ось.

С увеличением размерности пространства появляется возможность расширения многообразий геометрических объектов. Так, используя точку выхода из прямой, можно определять плоские кривые, а используя точку выхода из плоскости – пространственные кривые и поверхности в трёхмерном пространстве.

Пусть в плоскости ABC задана плоская кривая:

$$M=(A-C)p(t)+(B-C)q(t)+C. \qquad (1)$$

Тогда точечное уравнение:

$$M_d=(A-C)p(t)+(B-C)q(t)+\frac{d(t)}{s}S+C$$

определяет пространственную кривую линию, проекцией которой на плоскость ABC служит линия с точечным уравнением (1).

Например, если в плоскости ABC задать эллипс с центром C и текущим параметром $\varphi\in[0;2\pi]$:

$$M=(A-C)\cos(\varphi)+(B-C)\sin(\varphi)+C,$$

то точечное уравнение

$$M_d = (A-C)\cos(\varphi) + (B-C)\sin(\varphi) + \frac{d(\varphi)}{s}S + C$$

определит линию на эллиптическом цилиндре.

Если ввести дополнительный параметр $v \in [0;1]$, то можно определить сам эллиптический цилиндр в симплексе ABC:

$$N = M\overline{v} + M_d v = (A-C)\cos(\varphi) + (B-C)\sin(\varphi) + \frac{d(\varphi)v}{s}S + C,$$

где $\overline{v} = 1 - v$ – дополнение параметра v до 1.

Следует отметить, что при $v = 0$ получим исходную линию – проекцию эллиптического цилиндра на плоскость ABC.

4. Заключение

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Рассмотренный подход определения точек выхода из пространства различной размерности расширяет возможности точечного исчисления и пополняет инструментарий геометрического моделирования объектов, процессов и явлений.
2. Он позволяет определять и исследовать многомерные геометрические объекты в пространстве меньшей размерности без использования специальной системы плоскостей проекций.
3. Получены в общем случае точечные уравнения плоских и пространственных кривых, полученных соответственно с помощью точки выхода из прямой и из плоскости.
4. Предложено использование точек выхода из плоскости для моделирования цилиндрических поверхностей. Приведен пример определения эллиптического цилиндра.
5. Практическим приложением предложенного подхода является реконструкция трёхмерных геометрических объектов [9-12] на основе одной из проекций, что является перспективой дальнейших исследований.

5. Список источников

[1] Анализ обратных задач в начертательной геометрии / М.М. Бадиев, Т.Р. Собиров, М.М. Авлиякулов, С.С. Азимов // Наука и образование сегодня. 2021. № 5(64). С. 76-77.

[2] Герасимов Р.В., Сидоренко С.А., Мелихова М.С. Разработка алгоритма автоматизации решения обратной задачи начертательной геометрии // Научный альманах. 2016. № 2-2(16). С. 344-348. DOI: 10.17117/na.2016.02.02.344.

[3] Алгоритм автоматизированного построения 3D-модели объекта по ортогональным проекциям с использованием системы КОМПАС-3D / Н.Д. Жилина, М.В. Лагунова, Т.В. Мошкова [и др.] // Приволжский научный журнал. 2014. № 4(32). С. 42-48.

[4] Автоматизация процесса чтения чертежа с использованием системы Компас-3D / Н.Д. Жилина, М.В. Лагунова, Т.В. Мошкова [и др.] // Графикон'2014 : Труды конференции, Ростов-на-Дону, 30 сентября – 03 2014 года / Академия архитектуры и искусств, Институт механики, математики и компьютерных наук, Южный федеральный университет. Ростов-на-Дону: Автономная некоммерческая организация Научное общество "Графикон", 2014. С. 17-19.

[5] Балюба И.Г., Конопацкий Е.В., Бумага А.И. Точечное исчисление: учебно-методическое пособие. Макеевка: Донбасская национальная академия строительства и архитектуры. 2020. 244 с.

[6] Введение в математический аппарат БН-исчисления / А.И. Бумага, Е.В. Конопацкий, А.А. Крысько, О.А. Чернышева // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. 2017. Т. 1. С. 76-82.

[7] Балюба И.Г., Конопацкий Е.В. Точечное исчисление. Историческая справка и основополагающие определения // Физико-техническая информатика (CPT2020):

Материалы 8-ой Международной конференции, Пущино, Московская обл., 09–13 ноября 2020 года. Нижний Новгород: Автономная некоммерческая организация в области информационных технологий "Научно-исследовательский центр физико-технической информатики", 2020. С. 321-327. DOI: 10.30987/conferencearticle_5fd755c0adb1d9.27038265.
[8] Конопацкий Е.В., Бездитный А.А. Точечные инструменты геометрического моделирования, инвариантные относительно параллельного проецирования // Геометрия и графика. 2022. Т.9. №4. С. 11-21. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-11-21.
[9] Клячин В.А., Григорьева Е.Г. Алгоритм 3d реконструкции поверхности вращения по её проекции // Сибирский журнал индустриальной математики. 2020. Т. 23. № 1. С. 84-92. DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.108.
[10] Захаров А.А. Алгоритм автоматической реконструкции трехмерных объектов по ортогональным видам чертежа для CAD-систем // Системы управления и информационные технологии. 2011. № 4(46). С. 78-82.
[11] Захаров А.А. Трехмерная реконструкция объектов по видам чертежа для задач информационной системы промышленного предприятия // Алгоритмы, методы и системы обработки данных. 2011. № 2(17). С. 8.
[12] Новожилов М.М. Реконструкция параметризованной поверхности по кривым в ортогональных сечениях // Графикон'2016: Труды 26-й Международной научной конференции, Нижний Новгород, 19–23 сентября 2016 года. Нижний Новгород: Автономная некоммерческая организация "Институт физико-технической информатики", 2016. С. 185-187.