

Особенности твердотельного моделирования в точечном исчислении

А.А. Бездитный¹

¹Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Севастопольский филиал, Вакуленчука 29, Севастополь, 299053, Российская Федерация

Аннотация

На основании алгоритмов, реализованных в точечном исчислении, описаны основные операции построения твердотельных геометрических объектов в виде организованного трехпараметрического множества точек в трёхмерном пространстве: формообразующие операции выдавливания и вращения, кинематическая операция с возможностью осевого вращения плоскости сечения. Для кинематической операции и операции выдавливания приведены алгоритмы в общем виде без привязки к конкретным примерам. Причем, благодаря использованию точечного исчисления, предложенные алгоритмы могут быть обобщены на многомерное пространство и позволят проводить аналитическое описание многомерных твердотельных моделей. Особое внимание было уделено построению поверхности вращения с образующей полуциклоидой в различных параметризациях, приведены примеры построенных кривых и поверхностей, получен алгоритм построения тела вращения. Твердотельные модели на данный момент широко используются в имитационном моделировании и отличаются от геометрического моделирования и компьютерной графики максимальным приближением модели к ее физическому прообразу. Применение методов твердотельного моделирования позволяет проводить сложные инженерные расчеты, выполняемые в процессе проектирования, в полуавтоматическом режиме. В работе приведены примеры использования полученных геометрических алгоритмов, дано обоснование использования точечного исчисления как основного инструмента реализации трехмерных твердотельных моделей.

Ключевые слова

Твердотельное моделирование, точечное исчисление, геометрическое моделирование, системы автоматизированного проектирования, формообразующие операции.

Features of Solid Modeling in Exact Terms

A.A. Bezditnyi¹

¹Sevastopol branch of «Plekhanov Russian University of Economics», Vakulenchuk Street, 29, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Abstract

The basic operations of constructing solid-state geometric objects in the form of an organized three-parameter set of points in three-dimensional space are described based on algorithms implemented in point calculus. These include shaping operations of extrusion and rotation and a kinematic operation with the possibility of axial rotation of the section plane. For the kinematic operation and the extrusion operation, algorithms are given in a general form without reference to specific examples. Moreover, due to the use of point calculus, the proposed algorithms can be generalized to a multidimensional space and allow for an analytical description of multidimensional solid models. Particular attention was paid to the construction of a surface of revolution with a generatrix of a semicycloid in various parametrizations, examples of constructed curves and surfaces were

ГрафиКон 2022: 32-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-22 сентября 2022 г., Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина, Рязань, Россия

EMAIL: pereverten85@mail.com (А.А. Бездитный)

ORCID: 0000-0003-0528-9731 (А.А. Бездитный)



© 2022. Copyright for this paper by its authors.
Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

given, and an algorithm for constructing a body of revolution was obtained. Solid models are currently widely used in simulation modeling and differ from geometric modeling and computer graphics by the maximum approximation of the model to its physical prototype. The use of solid modeling methods makes it possible to carry out complex engineering calculations performed during the design process in a semi-automatic mode. The paper gives examples of the use of the obtained geometric algorithms, justifies the use of point calculus as the main tool for the implementation of three-dimensional solid models.

Keywords

Solid modeling, point calculus, geometric modeling, computer-aided design systems, shaping operations.

1. Введение

С момента создания компьютерной графики, большое внимание уделялось отображению геометрических объектов и корректности их формы. Но со временем требования к трехмерным цифровым моделям повышались, что привело к формированию запроса на построение цифровых прототипов реальных объектов, которые бы обладали сходными с прообразом не только геометрическими, но и физическими свойствами. Это было обусловлено появлением целого класса инженерных САЕ-систем, предназначенных для решения различных типов задач: расчёта, анализа и симуляции физических процессов. Основой для решения таких задач часто выступают твердотельные модели и конструкции. Как правило, для проведения расчетов в САЕ-системах за основу берется стандартная для САПР поверхностная модель, которая уже при импорте в систему условно преобразуется в твердотельную, а дополнительные физические параметры для этой модели настраиваются внутри системы. Такой подход позволяет справиться с большинством поставленных задач, кроме тех, где требуется воссоздать, например, анизотропные свойства тела. Даже неравномерная плотность среды внутри тела может вызвать существенные сложности при моделировании такого тела.

Большой проблемой существующих методов построения твердотельных моделей в тех или иных системах автоматизированного проектирования является практическая невозможность их оценки, так как в большинстве случаев эта информация является коммерческой тайной, а в описании и справочниках программных продуктов можно встретить только обрывки необходимых для проведения оценки данных. Можно привести ряд работ, посвященных твердотельному моделированию и компьютерной графике, где содержится математическое описание и алгоритмы построения [1-4], но установить взаимосвязь этих источников с какими-либо программными продуктами не представляется возможным.

Твердотельные компьютерные модели в настоящее время являются одной из основных составляющих систем автоматизированного проектирования (САПР) и всевозможных вычислительных алгоритмов расчёта во многих отраслях науки и техники. Они нашли широкое применение в системах числового программного управления, разработке информационных систем в строительстве и расчётах напряженно-деформированного состояния строительных конструкций, моделировании поведения жидкости и газа, расчётах деталей и сборок на прочность и устойчивость в машиностроении и т.д. Целью твердотельного моделирования является обеспечение геометрически правильной формы каждого моделируемого объекта. Это считается наиболее сложно реализуемым аспектом, поскольку требует программного обеспечения САПР для моделирования объекта изнутри и снаружи.

2. Формообразующая операция выдавливания

Подробно операция выдавливания с примерами была рассмотрена в [5]. Точечное исчисление построено на инвариантах аффинной геометрии, и операция выдавливания может быть представлена как перемещение эскиза перпендикулярно его плоскости. Аналитически операция определяется с помощью точечной формулы параллельного переноса на основе свойства параллелограмма, по которому диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся

пополам [6-8]. Таким образом четвертая вершина параллелограмма определена в точечном исчислении, как сумма двух смежных вершин минус противоположная вершина. Далее применяется метод подвижного симплекса [9-12], который является обобщением кинематического метода моделирования геометрических объектов на многомерное пространство в точечном исчислении.

В большинстве случаев алгоритм операции сводится к поиску опорных точек подвижного симплекса через координаты точек исходного симплекса, после чего находятся все характерные точки эскиза, движение которого заполняет пространство геометрического тела.

В общем виде этот алгоритм можно представить следующим образом:

1. Выбор пространственного симплекса $ABCD$ (рисунок 1) таким образом, чтобы все точки плоского симплекса ABC принадлежали плоскому контуру, подлежащему выдавливанию, а точка D находилась от плоского симплекса ABC на расстоянии, соответствующем высоте выдавливания.
2. Определение точек B_1 и C_1 по правилу параллелограмма ($B_1 = D + B - A$ и $C_1 = C + D - A$)
3. $C_1 = C + D - A$
4. Определение текущих точек P, Q, R на прямых AD, BB_1 и CC_1 соответственно.
5. Определение всех точек эскиза контура выдавливания в подвижном симплексе PQR .
6. Заполнение точками контура эскиза.
7. Получение системы параметрических уравнений после подстановки всех найденных точек.

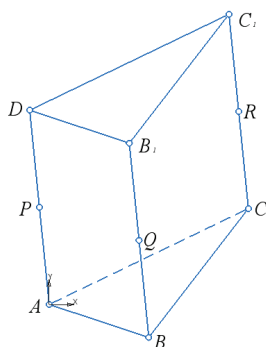


Рисунок 1 – Пространственный симплекс

Таким образом, наибольшую сложность при реализации приведенного алгоритма и получения конечных параметрических уравнений представляет корректное определение контура выдавливания через точки плоского симплекса. Случай, когда выдавливание происходит под углом, также рассмотрен в [5] и существенного влияния на сложность алгоритма не оказывает.

3. Формообразующая операция вращения

Рассмотрим формообразующую операцию вращения на основанные полуциклоиды. Сначала определим полуциклоиду в точечном исчислении.

SAB – прямоугольный симплекс (рисунок 2), $FK = r$ – радиус образующей окружности, $AC = 2r$, $BC = \pi r$, φ – параметр, MT – касательная, MK – нормаль, $BK = \varphi r$, $\theta = \frac{\varphi}{2}$

Находим (рисунок 2):

$$\begin{aligned} \frac{CQ}{CB} &= \frac{CK + KQ}{CB} = \frac{CB - KB + r \sin \varphi}{CB} = \frac{\pi r - \varphi r + r \sin \varphi}{\pi r} = \frac{\pi - \varphi + \sin \varphi}{\pi}, \\ \frac{C-Q}{C-B} &= \frac{\pi - \varphi + \sin \varphi}{\pi} \Rightarrow Q = (B - C) \frac{\pi - \varphi + \sin \varphi}{\pi} + C, \\ \frac{CQ}{CB} &= \frac{\pi r - \varphi r + r \sin \varphi}{\pi r} = \frac{\pi - \varphi + \sin \varphi}{\pi}. \end{aligned}$$

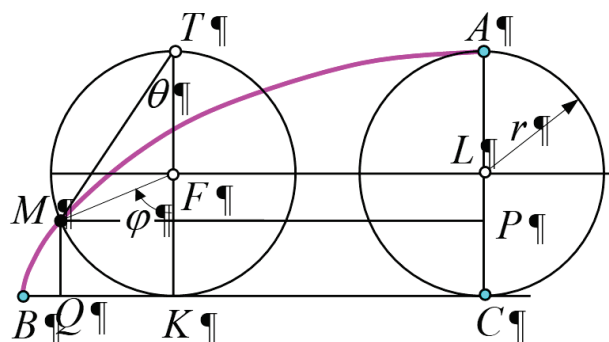


Рисунок 2 – Геометрическая схема полуциклоиды

Откуда имеем: $Q = (B - C) \frac{\pi - \varphi + \sin \varphi}{\pi} + C$.

Аналогично находим:

$$\begin{aligned} \frac{CP}{CA} &= \frac{r - \cos \varphi}{2r} \rightarrow P = (A - C) \frac{r - \cos \varphi}{2r} + C. \\ \frac{CP}{CA} &= \frac{CL - PL}{CA} = \frac{r - r \cos \varphi}{2r} = \frac{1 - \cos \varphi}{2}. \\ \frac{C - P}{C - A} &= \frac{1 - \cos \varphi}{2} \Rightarrow P = (A - C) \frac{1 - \cos \varphi}{2} + C. \end{aligned}$$

Точечное уравнение полуциклоиды имеет вид (визуализация представлена на рисунок 3а):

$$\begin{aligned} M = P + Q - C &= (A - C) \frac{1 - \cos \varphi}{2} + C + (B - C) \frac{\pi - \varphi + \sin \varphi}{\pi} + C - C = \\ &= (A - C) \frac{1 - \cos \varphi}{2} + (B - C) \frac{\pi - \varphi + \sin \varphi}{\pi} + C = \\ &= (A - C) \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + (B - C) \frac{\pi - 2\theta + \sin 2\theta}{\pi} + C, \end{aligned} \quad (1)$$

где $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Для вогнутой кривой уравнение полуциклоиды примет следующий вид (визуализация представлена на рисунок 3б):

$$M = (A - C) \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} + (B - C) \frac{1 + \cos \varphi}{2} + C, \quad (2)$$

где $0 \leq \varphi \leq \pi$.

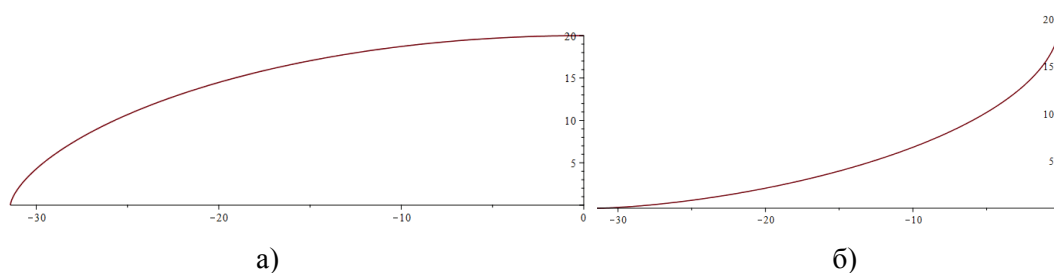


Рисунок 3 – Визуализация дуги полуциклоиды

Теперь определим поверхность вращения полуциклоиды на основании уравнения (2) в общем виде. Для этого необходимо определить в пространственном симплексе $ABCD$ (рисунок 4) точки K, T, Q и в полученном симплексе KTQ задать полуциклоиду.

Зададим направляющие эллиптические кривые AQB и A_1TB_1 следующими точечными уравнениями:

$$Q = (A - D) \cos \lambda + (B - D) \sin \lambda + D, \quad (3)$$

$$T = (A_1 - C) \cos \lambda + (B_1 - C) \sin \lambda + C, \quad (4)$$

где λ – текущий угловой параметр точечного уравнения, который изменяется от 0 до 2π .

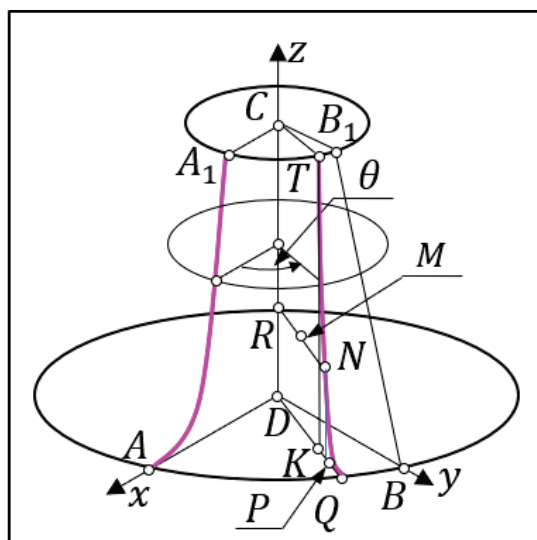


Рисунок 4 – Геометрическая схема поверхности вращения с образующей полуциклоидой

Определим точку K как четвертую точку параллелограмма $DCTK$, после чего подставим в полученное выражение уравнения (3) и (4):

$$K = D + T - C.$$

$$\downarrow$$

$$K = (A_1 - C) \cos \lambda + (B_1 - C) \sin \lambda + D, \quad (5)$$

где $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ – угловой параметр.

Запишем уравнение полуциклоиды (2) в симплексе TQK :

$$N = (Q - K) \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} + (T - K) \frac{1 + \cos \varphi}{2} + K, \quad (6)$$

где $0 \leq \varphi \leq \pi$ – угловой параметр.

Если подставить (3), (4) и (5) в (6), то получится уравнение поверхности вращения полуциклоиды вокруг оси CD . Но приводить его в рамках статьи нет смысла, так как оно достаточно громоздкое. Результат работы этого уравнения можно увидеть на рис.5.

Частные случаи поверхности вращения (6) для вогнутой и выпуклой кривой с нулевым радиусом верхней окружности можно записать следующим образом (на основании уравнений 1 и 2):

$$N = (A - D) \cos \lambda \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + (B - D) \sin \lambda \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + (C - D) \frac{\pi - 2\theta + \sin 2\theta}{2} + D,$$

$$N = (A - D) \cos \lambda \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} + (B - D) \sin \lambda \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} + (C - D) \frac{1 + \cos \varphi}{2} + D,$$

где $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ – угловые параметры.

Примеры визуализации этих поверхностей можно представить на рисунках 6а и 6б.

Теперь необходимо получить уравнение тела вращения полуциклоиды. Для этого следует определить текущую точку M прямой RN (рисунок 4), соединяющей текущую точку поверхности с осью вращения. Эта точка при своем движении будет заполнять внутреннюю часть тела вращения. Точка N уже определена в (6). По правилу параллелограмма:

$$R = D + N - P, \quad (7)$$

где P – проекция текущей точки N на радиус нижнего основания QD . Отсюда:

$$P = (T - K) \frac{1 + \cos \varphi}{2}. \quad (8)$$

Подставляя (6) и (8) в (7), получим:

$$R = D + N - P = D + (Q - K) \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} + K. \quad (9)$$

Точка M на прямой RN определяется как:

$$\begin{aligned}
 M &= R\bar{w} + Nw = \left(D + (Q - K) \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} + K \right) \bar{w} + \\
 &+ \left((Q - K) \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} + (T - K) \frac{1 + \cos \varphi}{2} \right) w + K = \\
 &= D\bar{w} + (Q - K) \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} + (T - K) w \frac{1 + \cos \varphi}{2} + K,
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

где $0 \leq \varphi \leq \pi$, а точки Q, T, K были определены ранее в (3), (4) и (5) соответственно.

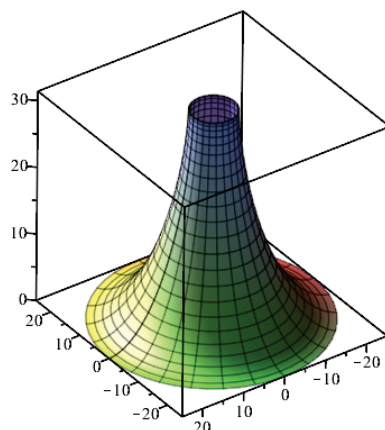


Рисунок 5 – Визуализация поверхностей вращения с образующей полуциклоидой

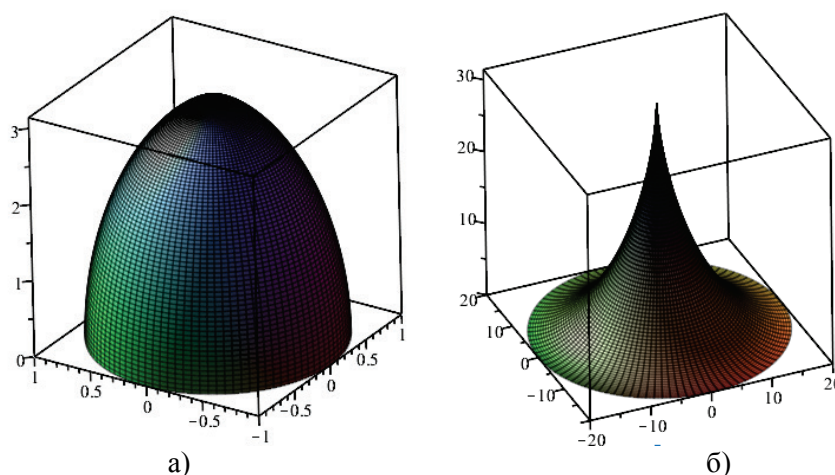


Рисунок 6 – Визуализация частных случаев поверхности вращения

Уравнение (10) описывает тело вращения с образующей полуциклоидой, полностью заполненного точками. Вариант построения тела со стенкой заданной толщины был подробно изложен в [12].

Также следует привести общий алгоритм построения тела вращения в точечном исчислении (см. геометрическую схему на рисунке 4):

1. Определение пространственного симплекса $ABCD$ таким образом, чтобы точки C и D совпадали с центрами направляющих эллиптических кривых тела вращения (параметры направляющих будут зависеть от формы и размеров образующего контура).
2. Определение направляющих эллиптических кривых в двухмерных симплексах ADB и A_1DB_1 (точки A_1 и B_1 легко найти, зная соотношение между двумя эллиптическими направляющими).
3. Нахождение точки K как четвертой точки параллелограмма $DCTK$ с последующей подстановкой в уравнение текущих точек направляющих кривых из пункта 2.
4. Таким образом, получаем все точки подвижного симплекса TQK .

5. Построение в симплексе TQK образующей. В качестве образующей можно использовать любую кривую или замкнутый контур.
6. Заполнение тела вращения точками при помощи текущей точки M прямой RN , которая соединяет текущую точку поверхности вращения из пункта 5 с осью вращения CD .

4. Формообразующая кинематическая операция

Формообразующая кинематическая операция с криволинейной направляющей была подробно рассмотрена в [12] на примере построения каналовой поверхности. Алгоритм построения таких поверхностей сводится к определению касательных к направляющей в ее текущей точке, построению нормалей и бинормалей. На основании полученных бинормалей становится возможным получения симплекса в текущей точке направляющей кривой, что дает возможность строить образующие для моделируемой поверхности, в качестве которых могут быть использованы любые плоские замкнутые линии (рисунок 7).

В общем виде этот алгоритм можно представить следующим образом:

1. Определение направляющей кривой ANB в симплексе $ABCD$, параметризованной при помощи трех любых непрерывных и дифференцируемых функций p, q, r , зависящих от параметра u (изменяется от 0 до 1).

$$N = (A - D)p + (B - D)q + (C - D)r + D,$$

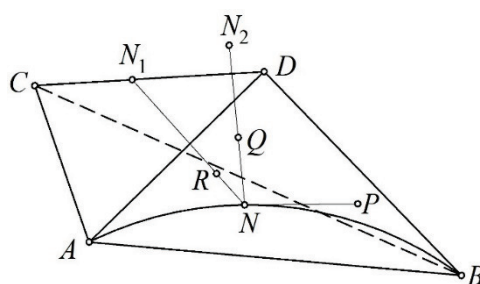


Рисунок 7 – Геометрическая схема формообразующей кинематической операции

2. Определение касательной NP кривой ANB при помощи производной кривой [7,13] (дифференцирование функций производится по параметру u).
3. $P = N + \dot{N}$.
4. Задание точки N_1 на прямой CD при помощи параметра t .
5. $N_1 = (D - C)t + C$.
6. Определение параметра t из условия, что $\angle N_1NP = 90^\circ$ при помощи метрического оператора трех точек [2] $\Sigma_{N_1P}^N = 0$.
7. Подстановка найденного значения параметра t в уравнение точки N_1 и получение плоского подвижного симплекса N_1NP (R – текущая точка N_1N).
8. Определение точки N_2 как точки выхода из плоскости N_1NP [2] (Q – текущая точка N_2N). Формирование бинормали N_2N . В итоге получаем все точки пространственного подвижного симплекса $QRPN$.
9. Выполнить построение образующей в пространственном подвижном симплексе $QRPN$, в качестве чего могут быть использованы любые плоские замкнутые линии, которые можно моделировать различными методами [14-16].

5. Заключение

Данная работа продолжает цикл работ [8,12,17], посвященных развитию аппарата геометрического твердотельного моделирования в точечном исчислении. Реализация такого

подхода в компьютерных системах проектирования может существенно расширить их возможности за счет преимуществ, которыми обладает точечное исчисление при компьютерной реализации, одним из которых является использование покоординатного расчёта в точечном исчислении. Это свойство открывает возможность автоматически распараллеливать расчёты всех координат точек, причем вычислительная нагрузка между потоками будет примерно одинаковой за счет идентичности уравнений для всех координатных осей.

Получен расчетный алгоритм построения поверхности вращения и тела вращения с образующей полуциклоидой в различных параметризациях, приведены примеры визуализации полученных объектов. Это расширяет базу кривых и поверхностей, реализованных в точечном исчислении, и позволяет в дальнейшем продолжить работу с этой кривой, которая обладает достаточно интересными геометрическими и физическими свойствами. В общем виде представлены алгоритмы построения твердотельных моделей при помощи кинематической формообразующей операции и операций выдавливания и вращения.

Таким образом, ставится цель получения полноценного математического аппарата создания твердотельных моделей, учитывающих внутренние геометрические особенности моделируемого объекта. Работа в этом направлении будет продолжена и в ближайшей перспективе будет реализована последняя из формообразующих операций – операция по сечениям.

6. Список источников

- [1] De Berg M., Cheong O., Van Kreveld M., Overmars M. Computational Geometry: Algorithms and Applications / Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – p. 386. – DOI: 10.1007/978-3-540-77974-2.
- [2] Devadoss S.L., O'Rourke J. Discrete and Computational Geometry / Princeton University Press, 2011. – p. 255.
- [3] Um D. Solid Modeling and Application: Rapid Prototyping, CAD and CAE Theory / Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2016. – p. 298. – DOI: 10.1007/978-3-319-21822-9.
- [4] Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование / М.: ИНФРА-М, 2019. – 400 с.
- [5] Konopatskiy, E. Solid modeling of geometric objects in point calculus / E. Konopatskiy, A. Bezditnyi // CEUR Workshop Proceedings: 31, Nizhny Novgorod, 27–30 сентября 2021 года. – Nizhny Novgorod, 2021. – P. 666-672. – EDN FPBPVC.
- [6] Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01. – Киев, 1995. – 227 с.
- [7] Балюба И.Г., Конопацкий Е.В., Бумага А.И. Точечное исчисление: учебно-методическое пособие / Макеевка: ДОННАСА, 2020. – 244 с.
- [8] Балюба И.Г., Конопацкий Е.В. Точечное исчисление. Историческая справка и основополагающие определения / Тр. 8-й Междунар. науч. конф. «Физико-техническая информатика», 09-13 ноября 2020 г. – Нижний-Новгород, 2020. – Ч. 2. – С. 321-327. – DOI: 10.30987/conferencearticle_5fd755c0adb1d9.27038265.
- [9] Давиденко И. П. конструирование поверхностей пространственных форм методом подвижного симплекса: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01. Мелитополь, 2012. 23 с.
- [10] Балюба И.Г., Конопацкий Е.В., Бумага А.И. Точечное исчисление. Макеевка: ДОН-НАСА, 2020. 244 с.
- [11] Балюба И.Г. Метод подвижного симплекса при конструировании 2-поверхностей многомерного пространства / И.Г. Балюба [и др.] // Моделювання та інформаційні технології: Збірник наукових праць. – К.: Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. – Т.1. – С.310-318.
- [12] Конопацкий Е.В. Моделирование каналовых поверхностей и тел в точечном исчислении [Электронный ресурс] / Е.В. Конопацкий, А.А. Бездитный // Строительство и техногенная безопасность. — 2022. — № 24(76). — с.97-106.

- [13] Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A., Litvinov A.I. Geometric modeling of torse surfaces in BN-calculus // IoP conference series: Journal of Physics: Conf. Series 1791 (2021) 012050. DOI: 10.1088/1742-6596/1791/1/012050.
- [14] Жихарев Л.А., Карпова Ю.С. Плоские отражения от кривых // Журнал естественнонаучных исследований, 2020. Т. 5. № 4. С. 52-58.
- [15] Кац Б.А. Об одной метрической характеристике замкнутых плоских кривых и ее приложении // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия: Физико-математические науки, 2006. Т. 148. № 2. С. 77-84.
- [16] Полежаев Ю.О., Борисова А.Ю. Геометрическое моделирование стержневых конструкций с использованием замкнутых кривых высокого порядка и триангуляции // Вестник МГСУ, 2010. № 2. С. 73-78.
- [17] Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A., Lagunova M.V., Naidysh A.V. Principles of solid modelling in point calculus // IoP conference series: Journal of Physics: Conf. Series 1901 (2021) 012063. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012063.