

## Функционально-воксельное моделирование динамического решения задачи поиска пути градиентным методом

А.В. Толлок<sup>1</sup>, П.А. Петухов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117997, Россия*

<sup>2</sup> *МГТУ "СТАНКИН", Вадковский пер., 1, Москва, 127994, Россия*

### Аннотация

В работе рассматривается алгоритм градиентного движения по поверхности, моделирующей сцену с объектами цели и препятствий. Для реализации алгоритма градиентного спуска используются принципы функционально-воксельного моделирования, позволяющие организовать для заданного пространства сцены область градиентных характеристик. Инструментом описания сцены с препятствиями выбран математический аппарат R-функций. Исследуются подходы для получения обратного выражения R-функции, т.е. удаление объекта из сцены для решения задач динамической перегруппировки препятствий и цели. Показан функционально-воксельный подход к решению процедуры обратного выражения R-функции без потери знака значения функции, что не позволяет выполнять непосредственно алгебраическое выражение R-функции. Демонстрируется результат обратного разложения на объекты на примере применения R-функции пересечения. Реализован принцип функционально-воксельного моделирования области закона пересечения двух конкретных объектов, позволяющий решать прямую и обратную задачу R-функционального моделирования.

### Ключевые слова

Градиентный спуск, функционально-воксельное моделирование, R-функциональное моделирование, поиск пути с препятствиями, обратная R-функция.

## Functional-voxel Modeling of the Dynamic Solution of the Path Search Problem by the Gradient Method

A.V. Tolok<sup>1</sup>, P.A. Petukhov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *V.A. Trapeznikov Institute of Control Science of Russian Academy of Sciences, Profsoyuznaya street, 65, Moscow, 117997, Russia*

<sup>2</sup> *Moscow State University of Technology "STANKIN", Vadkovsky street, 1, Moscow, 127994, Russia*

### Abstract

The paper considers an algorithm for gradient motion on a surface that simulates a scene with target objects and obstacles. To implement the gradient descent algorithm, the principles of functional-voxel modeling are used, which allow organizing a region of gradient characteristics for a given scene space. The mathematical apparatus of R-functions is chosen as a tool for describing a scene with obstacles. Approaches for obtaining the inverse expression of the R-function, i.e. removing an object from the scene to solve problems of dynamic rearrangement of obstacles and goals, are investigated. A functional-voxel approach to solving the procedure for the inverse expression of an R-function without loss of the sign of the function value is shown, which does not allow performing an algebraic expression of an R-function directly. The result of the inverse decomposition into objects is demonstrated by the example of the application of the R-intersection function. The principle of functional-voxel modeling of the area of the intersection law of two specific objects is implemented, which allows solving the direct and inverse problem of R-functional modeling.

*ГрафиКон 2022: 32-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-22 сентября 2022 г., Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина, Рязань, Россия*

EMAIL: tolok\_61@mail.ru (А.В. Толлок); petuxowpawel07@gmail.com (П.А. Петухов)

ORCID: 0000-0002-7257-9029 (А.В. Толлок); 0000-0002-2333-3524 (П.А. Петухов)



© 2022 Copyright for this paper by its authors.

Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

**Keywords**

Gradient descent, functional-voxel modeling, R-functional modeling, obstacle course search, inverse R-function.

**1. Введение**

На сегодняшний день существуют различные подходы для решения задач, связанные с поиском пути в слабо детерминированной среде, где информация о препятствиях определена частично [1, 2]. В большинстве случаев они сводятся к задаче управления объектом, а также возможности динамического управления при возникающих препятствиях. Таким образом, для достижения цели ставится задача обхода заранее известных препятствий, а также препятствий, возникающих в процессе движения. Для решения поставленной задачи, используются различные подходы к построению пути. Так, к примеру, используя алгоритм, основанный на моделировании потенциальных полей, позволяет динамично реагировать на препятствия, которые возникают в процессе движения к цели [3]. Данный подход основан на применении «притягивающих» и «отталкивающих» потенциалов. В результате чего на каждом шаге рассчитывается потенциальное поле. Этот метод характерен тем, что вынужден постоянно пересчитывать динамически изменяемую среду. Недостатком является тот факт, что время выполнения алгоритма зависит от количества препятствий, заполняющих сцену.

Функционально-воксельный метод (ФВ-метод), основан на представлении градиентных величин на задаваемой области скалярной функции [4]. Поэтому на его основе легко реализуем алгоритм градиентного спуска, использующий специальные М-образы. Наиболее широко исследования принципов применения градиентного спуска ФВ-метода в задаче прокладке пути рассмотрены Локтевым М.А. [5]. В постановке задачи прокладки пути ФВ-метод создаёт образное представление градиентных данных, которые рассчитываются на основе описания сцены в виде поверхности аналитической функции. При этом, сцена должна содержать в виде объектов цель и препятствия. Основой градиентного движения является цель, описанная поверхностью перевёрнутого конуса с вершиной в точке цели. На такой поверхности из любой её точки движение градиентного спуска будет стремиться к её вершине. Препятствиями, возникающими на такой поверхности, являются выпуклости. Строятся такие элементы посредством аналитического описания плоской фигуры  $f(x, y) \geq 0$ , а рассматриваются в виде поверхности с нулевым контуром  $z = f(x, y)$ . Такой принцип описания удобен для применения R-функционального [6] объединения окончательного варианта сцены. *Целью исследований* является наработка инструментов, позволяющих моделировать динамику изменения градиентных данных поверхности сцены в зависимости от динамически изменяемых объектов цели и препятствия.

**2. Исследование алгоритма градиентного спуска на основе ФВ-моделирования**

Для понимания принципов работы алгоритма градиентного спуска, в рамках решения задачи поиска пути, следует разобраться в основах применения ФВ-метода. Рассмотрим основные понятия, такие как базовые и порождаемые М-образы.

**2.1. Базовые и порождаемые М-образы**

Метод ФВМ [4,5,6] основывается на построении базовых М-образов, являющихся линейно аппроксимированным представлением поверхности функции. Сам по себе набор базовых М-образов представляет собой отображение локальными геометрическими характеристиками некоторой скалярной непрерывной функции. К примеру, для получения набора двумерных базовых М-образов линейно аппроксимируется область функции  $u = f(x, y)$ , где каждой точке на этой области соответствует уравнение плоскости  $Ax + By + Cu + D = 0$ .

Увеличив размерность нормали к площадке на одно измерение, получим уравнение  $Ax + By + Cu + Dt = 0$ . В результате имеем четыре коэффициента ( $A, B, C, D$ ) при каждом аргументе. После нормирования нормой  $N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}$  получим компоненты нормали или локальные геометрические характеристики  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  для локального уравнения в каждой из точек функциональной области  $u$

$$n_1x + n_2y + n_3z + n_4t = 0. \tag{1}$$

Воксельное представление ФВМ-модели предполагает монохромное отображение палитры для отдельно взятой локальной характеристики, которую можно представить соответствием значению градации цветовой палитры  $P$ , например, в диапазоне  $[0, 255]$ . На рисунке 1 демонстрируются базовые М-образы  $(M_1^{IV}, M_2^{IV}, M_3^{IV}, M_4^{IV})$  для локальных характеристик  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$ , полученных линейной аппроксимацией уравнения окружности. Для выделения отрицательной области значений при визуализации применяется цвет. Знак при этом определяется вычислением значения  $z$  в точке

$$z = -\frac{n_1}{n_3}x - \frac{n_2}{n_3}y - \frac{n_4}{n_3}. \tag{2}$$

Порождение М-образов  $(M_x^{II}, M_y^{II})$  для организации работы алгоритма градиентного спуска осуществляется с помощью перенормирования соответствующих компонентов  $(n_1, n_2)$  для двухмерной нормали (рисунок 2):

$$n_1 = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}, n_2 = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}. \tag{3}$$

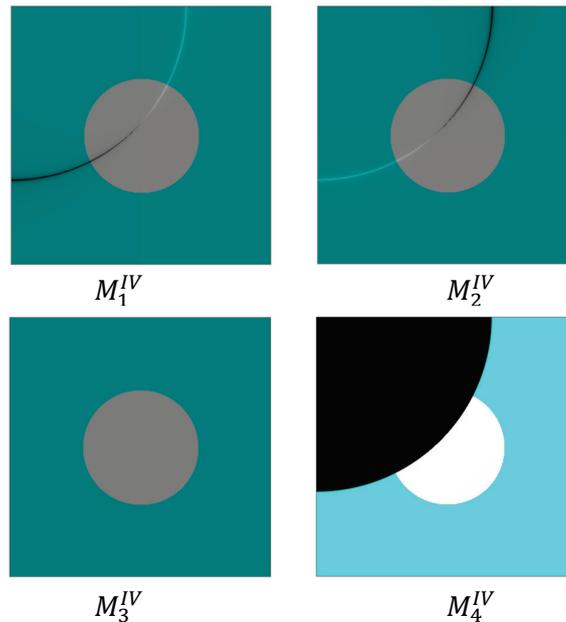


Рисунок 1 – Графическое представление базовых М-образов



Рисунок 2 – Графическое представление порождённых М-образов

Для того, чтобы получить порождаемые образы необходимо выполнить следующую последовательность расчётов (4)-(6):

$$n_1^{IV} = \frac{2M_1^{IV} - P}{2}, \quad n_2^{IV} = \frac{2M_2^{IV} - P}{2}, \quad (4)$$

$$n_1^{II} = \frac{n_1^{IV}}{\sqrt{(n_1^{IV})^2 + (n_2^{IV})^2}}, \quad n_2^{II} = \frac{n_2^{IV}}{\sqrt{(n_1^{IV})^2 + (n_2^{IV})^2}}, \quad (5)$$

$$M_1^{II} = \frac{P(n_1^{II} + 1)}{2}, \quad M_2^{II} = \frac{P(n_2^{II} + 1)}{2}. \quad (6)$$

где  $P=256$  – градация палитры цвета.

## 2.2. Математический аппарат R-функций

Использование R-функций позволяет строить сложные геометрические модели. Для их получения применяются две математические операции: объединение и пересечение и отрицание. Наиболее распространенной в геометрическом моделировании области функции является  $\alpha$ -система (7), состоящая из системы трех выражений [7]:

$$\begin{cases} \omega_1 \wedge_{\alpha} \omega_2 = \frac{1}{\alpha+1} \left( \omega_1 + \omega_2 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\alpha\omega_1\omega_2} \right); \\ \omega_1 \vee_{\alpha} \omega_2 = \frac{1}{\alpha+1} \left( \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\alpha\omega_1\omega_2} \right); \\ \overline{\omega_1} \equiv -\omega_1, \end{cases} \quad (7)$$

В данной системе R-функций большое внимание получает коэффициент  $\alpha$ , принимающий значения  $-1 < \alpha \leq 1$ , который влияет на форму поверхности функции на заданной области. При  $\alpha = 0$  система R-функций приводится к следующему квадратичному виду (8):

$$\begin{cases} \omega_1 \wedge_0 \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}; \\ \omega_1 \vee_0 \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \end{cases} \quad (8)$$

Выберем этот случай при использовании в дальнейшем, для построения сцены и моделирования препятствий.

## 2.3. Law-вычислитель

Процедура построения сцены предусматривает возможность как включения объекта, так и его удаления в пространстве сцены. Для реализации такой процедуры необходимо иметь возможность не только R-функционального объединения, но и действие противоположное ему, исключаяющее текущий объект, например объект  $X$  из сцены объектов  $Z$ , для получения предыдущего состояния сцены объектов  $Y$ . Аналитически выразить аргумент  $X$  через  $Z$  и  $Y$  практически невозможно, не потеряв знак. При этом теряется информация об отрицательной области функции.

К примеру, для выражения аргумента  $X$  для выражения  $Z = X + Y - \sqrt{X^2 + Y^2}$  осуществляющее операцию пересечения возведем всё выражение в квадрат, и попробуем выразить один из аргументов:

$$Z^2 = (X + Y - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 \quad (9)$$

При дальнейших попытках упростить уравнение получаем, что подкоренное выражение так и остается, препятствуя получению адекватного решения.

В данном случае предлагается использовать принципы функционально-воксельного метода для решения такой задачи. Для этого запишем функции  $X$  и  $Y$  по принципу функционально-воксельной модели в виде локальных функций (10), (11):

$$Z_{1,3}^X(x, y) = -\frac{n_1^X}{n_3^X}x - \frac{n_2^X}{n_3^X}y - \frac{n_4^X}{n_3^X} \quad (10)$$

$$Z_{1,3}^Y(x, y) = -\frac{n_1^Y}{n_3^Y}x - \frac{n_2^Y}{n_3^Y}y - \frac{n_4^Y}{n_3^Y} \quad (11)$$

Имея локальные геометрические характеристики, воспользуемся новым свойством, так называемым: «Law-вычислитель» (вычислитель закона) (12), полученным в результате исследования закона функционального пересечения. В качестве аргументов поступают не соответствующие координаты узловой точки, а значения вычисляемых функций  $Z_{1,3}^X$  и  $Z_{1,3}^Y$ :

$$L_{1,3}^R(Z_{1,3}^X, Z_{1,3}^Y) = Z_{1,3}^X + Z_{1,3}^Y - \sqrt{(Z_{1,3}^X)^2 + (Z_{1,3}^Y)^2}. \quad (12)$$

На основе данного вычисления получаем закон пересечения двух конкретных объектов, описанный на области локальными функциями с коэффициентами  $n_1^L, n_2^L, n_3^L, n_4^L$ . В результате, получаем в каждой точке области следующую локальную функцию (13):

$$n_1^Lx + n_2^Ly + n_3^Lz + n_4^L = 0. \quad (13)$$

Полученная локальная функция линейна и не имеет подкоренного выражения, а это значит, что в ней можно выражать любой из аргументов (14), (15):

$$x = -\frac{n_2^L}{n_1^L}y - \frac{n_3^L}{n_1^L}z - \frac{n_4^L}{n_1^L}, \quad (14)$$

$$y = -\frac{n_1^L}{n_2^L}x - \frac{n_3^L}{n_2^L}z - \frac{n_4^L}{n_2^L}, \quad (15)$$

$$z = -\frac{n_1^L}{n_3^L}x - \frac{n_2^L}{n_3^L}y - \frac{n_4^L}{n_3^L}, \quad (16)$$

где  $x, y, z$  – значения исходных функций  $Z_{1,3}^X, Z_{1,3}^Y, Z_{1,3}^Z$  соответственно.

Таким образом, можно отметить, что Law-вычислитель, позволяет получать исходное значение функции, на основе созданной функциональной модели закона пересечения этих функций.

Приведем пример R-функционального пересечения двух ортогональных полос на основе полученного Law-вычислителя. На рисунках 3-5 представлены M-образы исходных функций:

$$Z_{1,3}^X(x, y) = 1 - x^2, \quad (17)$$

$$Z_{1,3}^Y(x, y) = 1 - y^2 \quad (18)$$

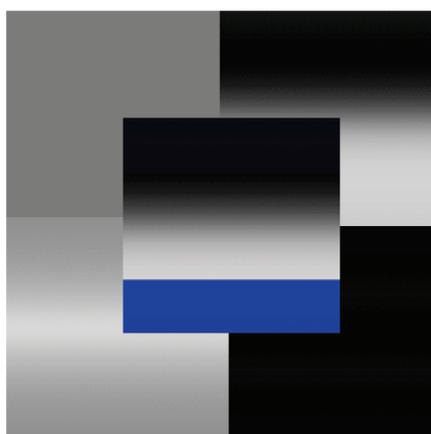


Рисунок 3 – M-образы функции X

На рисунке 6 демонстрируется результат ФВ-моделирования функции  $z$  на основе закона пересечения. Для того, чтобы получить исходные функции  $x$  и  $y$  используем для вычисления выражения (14) и (15). Полученные результаты представлены на рисунке 7.

Для того, чтобы более наглядно показать работу Law-вычислителя, представим еще один пример, где рассмотрим пример пересечения двух окружностей. Применим принцип Law-вычислителя и поэтапно представим процесс пересечения двух окружностей, а затем получим с

помощью  $L$ -закона исходные значения функций. На рисунке 8 демонстрируется этапы получения результата пересечения с помощью  $L$ -закона пересечения.

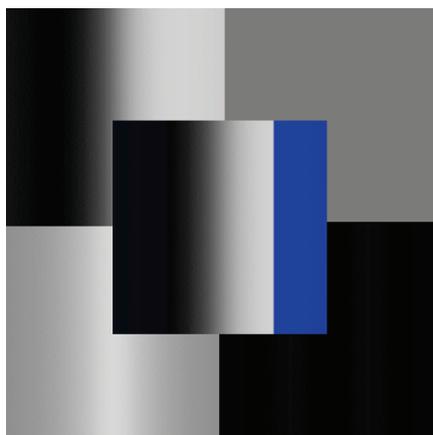


Рисунок 4 – М-образы функции  $Y$

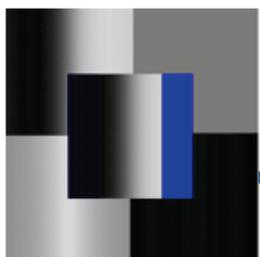
Применим  $Law$ -вычислитель и получим следующий результат для закона  $L^R$ :

$$n_1^X x + n_2^X y + n_3^X z + n_4^X = 0$$



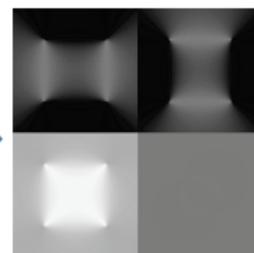
$$z^X = -\frac{n_1^X}{n_3^X} x - \frac{n_2^X}{n_3^X} y - \frac{n_4^X}{n_3^X}$$

$$z^L = z^X + z^Y - \sqrt{(z^X)^2 + (z^Y)^2}$$



$$z^Y = -\frac{n_1^Y}{n_3^Y} x - \frac{n_2^Y}{n_3^Y} y - \frac{n_4^Y}{n_3^Y}$$

$$n_1^L x + n_2^L y + n_3^L z + n_4^L = 0$$

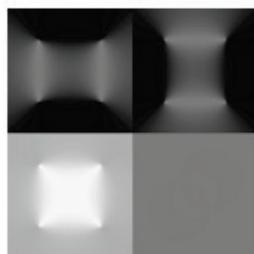


$$n_1^Y x + n_2^Y y + n_3^Y z + n_4^Y = 0$$

Рисунок 5 – М-образы полученные с помощью  $Law$ -вычислителя

$$n_1^L x + n_2^L y + n_3^L z + n_4^L = 0$$

$$n_1^Z x + n_2^Z y + n_3^Z z + n_4^Z = 0$$



$$z^Z = -\frac{n_1^L}{n_3^L} x - \frac{n_2^L}{n_3^L} y - \frac{n_4^L}{n_3^L}$$

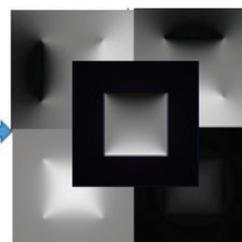


Рисунок 6 – Результат пересечения, полученный на основе закона

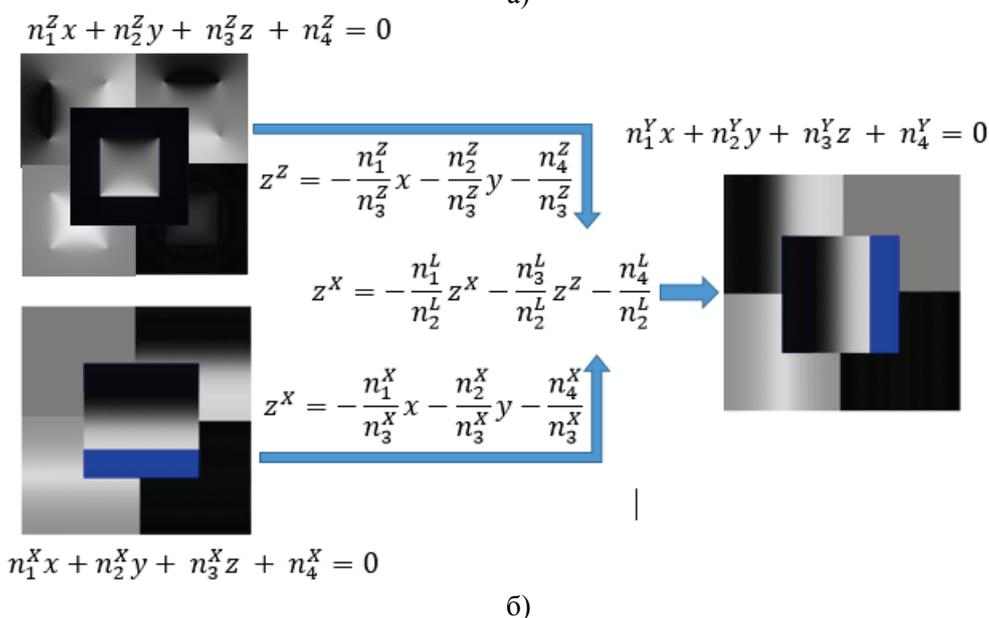
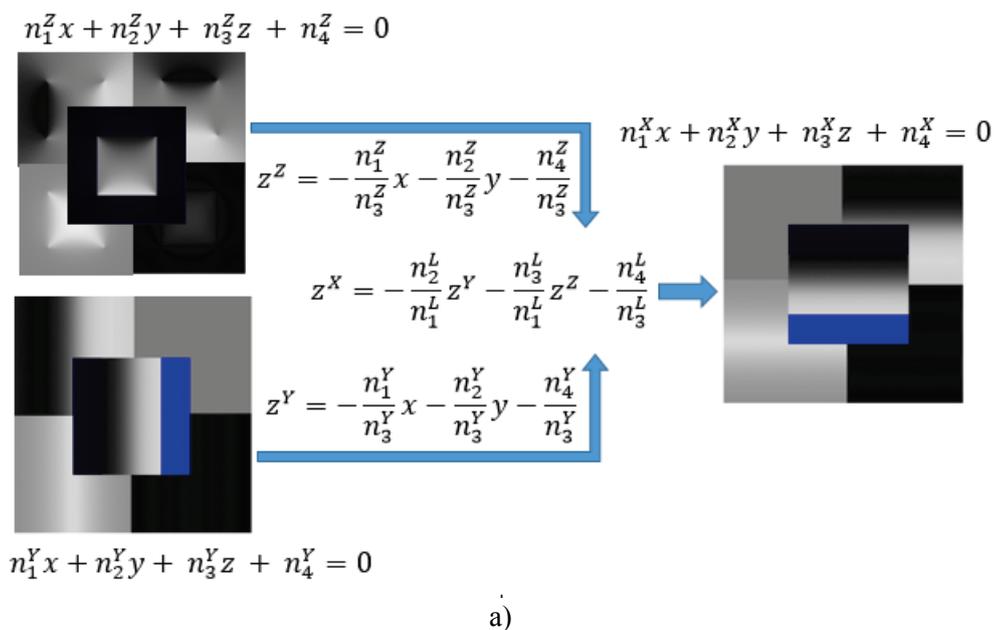


Рисунок 7 – Получение исходных функций: X(a), Y(б)

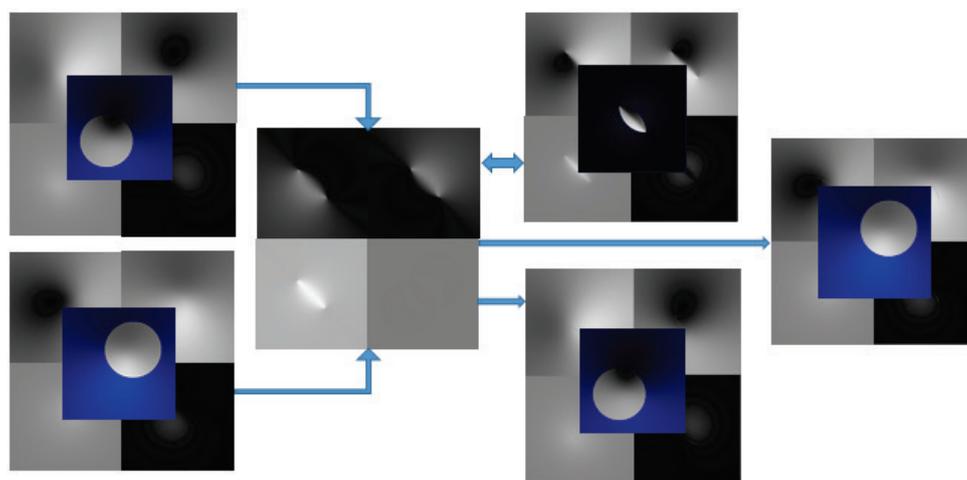


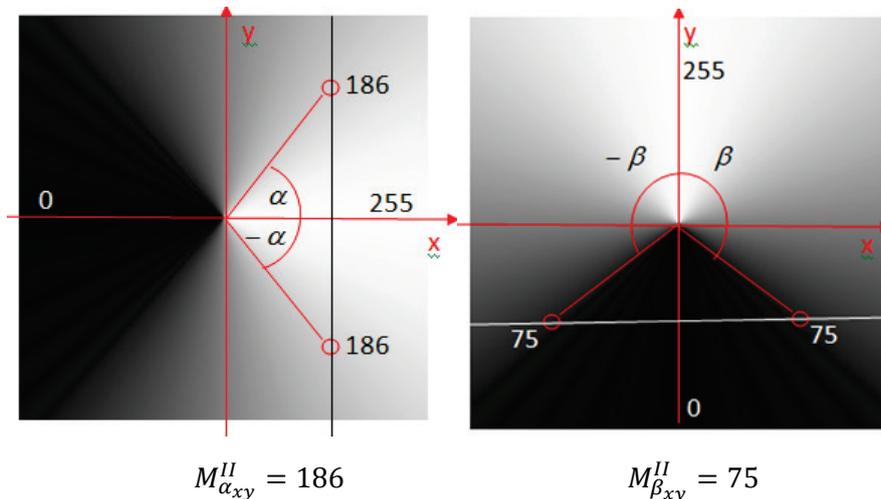
Рисунок 8 – Схема получения пересечения двух функций и обратно

Применение *L*-закона демонстрирует хорошие результаты, которые позволяют на основе локальных функций функционально-воксельной модели получать не только результаты пересечения, объединения, но и выражать обратные логические операции R-функционального моделирования.

### 3. ФВ-алгоритм градиентного спуска

В основу предлагаемого алгоритма входит анализ градации оттенка цвета, содержащегося в точке изображения, и принятие решения по выбору направления перемещения. Для простоты восприятия алгоритма снова ограничимся примером рассмотрения растровых *M*-образов для функции двух аргументов  $\omega = f(x, y)$ . На рисунке 9 представлен принцип распределения градации оттенка серого цвета относительно осей *Ox* и *Oy*. Белый цвет означает, что отклонение проекции нормали от оси равно нулю, т.е.  $\cos\alpha = 1$ , чёрный –  $\cos\alpha = -1$ . Остальные оттенки отражают состояние перехода на промежутке  $[-1; 1]$ .

Рассмотрим пример определения однозначности смещения точки в одном из восьми возможных направлений при значениях  $M''_{\alpha xy} = 186$  и  $M''_{\beta xy} = 75$ , как показано на рисунке 9. Из рисунка видно, что цвет, например  $M''_{\alpha xy} = 186$ , подсказывает принять направление перемещения вправо, поскольку образуемая прямая, проходящая через точки этого цвета расположена справа от оси *Oy*. Значение косинуса угла  $\alpha$  определяется так:  $\cos\alpha = \pm \left( \pi - \frac{M''_{\alpha xy}}{P} \pi \right)$ . Аналогичное происходит и со вторым значением  $M''_{\beta xy} = 75$ , где  $\cos\beta = \pm \left( \pi - \frac{M''_{\beta xy}}{P} \pi \right)$  и решением является общее движение вниз. А значит, однозначность выбора решения можно получить, опираясь на значения от обоих *M*-образов. Рассматриваемый пример показывает, что для образа  $M''_{\alpha xy}$  общее направление тяготеет вправо, а образ  $M''_{\beta xy}$  корректирует движение вниз. Значит, окончательным решением является пересечение обоих текущих решений (рисунок 10), т.е. движение в правый нижний угол [8].



**Рисунок 9** – Выбор направления движения по градации цвета в пикселе на основе двух *M*-образов

По аналогии можно представить общее описание алгоритма движения градиентного спуска. При этом угловое направление движения разбивается на восемь секторов, каждый из которых направлен на соседнюю точку растра. Присвоив переменным *x* и *y* соответствующие текущие значения цвета, получим (таблица 1):

$$x = M''_{\alpha xy}, \quad y = M''_{\beta xy}.$$

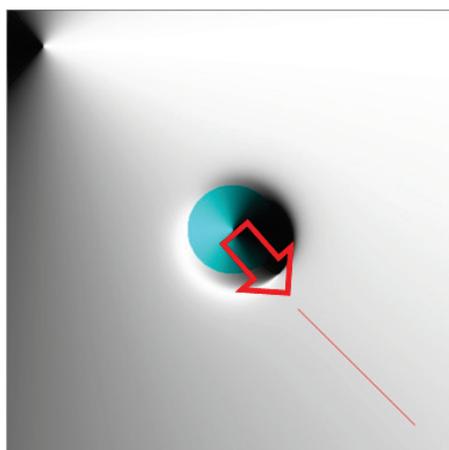
**Таблица 1** – Индексное  $(i, j)$ -представление соседних пикселей для выбора направления движения по градиенту

$M_{xy}^{II}(i-1, j-1)$	$M_{xy}^{II}(i, j-1)$	$M_{xy}^{II}(i+1, j-1)$
$M_{xy}^{II}(i-1, j)$	$M_{xy}^{II}(i, j)$	$M_{xy}^{II}(i+1, j)$
$M_{xy}^{II}(i-1, j+1)$	$M_{xy}^{II}(i, j+1)$	$M_{xy}^{II}(i+1, j+1)$

Для поиска пути в слабо детерминированной (частично определенной) среде, кроме алгоритма градиентного спуска необходимо использовать математический аппарат R-функций, для построения поверхности функции, описывающей сцену с препятствиями. Если необходимо получить поверхность с предыдущим положением препятствий, использование R-функций Рвачева без потери знака не даст нужного результата. Для решения такого типа задач предлагается использовать математический аппарат Law-вычислителя.

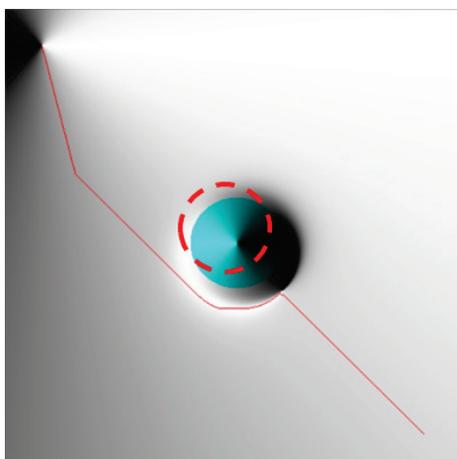
#### 4. Law-вычисления в моделировании поверхности движения к цели

Рассмотрим задачу движение к цели, где препятствие может в любой момент времени начать свое движение, что затрудняет процесс движения по градиенту. Задача является случаем слабо детерминированной среды, где информация о сцене определена частично. На рисунке 10 представлен процесс движения к цели, на текущий момент препятствие неподвижно.



**Рисунок 10** – Процесс движения к цели

На момент приближения к препятствию, оно начало свое движение, столкнулось с движущим объектом, что изменяет направление движения к цели (рисунок 11).



**Рисунок 11** – Скорректированная траектория

Полученные результаты демонстрируют работу математического аппарата Law-вычислителя и позволяют возвращаться к предыдущему шагу моделирования сцены для динамического изменения положения препятствия.

## 5. Заключение

Предлагаемый инструмент может оказаться интересным в решении задач R-функционального моделирования геометрических объектов для применения в задачах конструирования сложных проектных объектов и объектов управления. Такой подход позволяет делать аналитические конструкции RFM редактируемыми на уровне удаления одних объектов с возможностью замены на другие на определённых этапах, не прибегая к полному пересчёту всей модели. Положенный принцип открывает возможности к динамическому моделированию и контролю за перемещениями объектов препятствий в R-функциональной модели, что позволяет откатывать модель на предыдущий шаг и редактировать за короткий промежуток времени, избегая пересчёт всей сцены.

## 6. Литература

- [1] Афанасов Алексей Леонидович Анализ алгоритмов обхода препятствий и поиска пути в априорно неопределённой среде для мобильного устройства // Вопросы науки и образования. 2019. №17 (64). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-algoritmov-obhoda-prepyatstviy-i-poiska-puti-v-apriorno-neopredelennoy-srede-dlya-mobilnogo-ustroystva> (дата обращения: 10.06.2022).
- [2] Герасимов В.Н. К вопросу управления движением мобильного робота в динамической среде // Робототехника и техническая кибернетика. 2014. № 1. С. 44-51.
- [3] Лю В. Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и математическое моделирование. 2018. № 1. С. 15–58.
- [4] Толок А.В. Локальная компьютерная геометрия. Учебное пособие. М.: Ай Пи Ар Медиа. 2022. 147 с.
- [5] Локтев М.А. Особенности применения функционально-воксельного моделирования в задачах поиска пути с препятствиями // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2016. № 1. С. 45-49.
- [6] Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины. 2009.
- [7] Рвачев, В. Л. Теория R - функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. Киев: Наукова думка. 1982. 552 с.
- [8] Tolok A.V, Petukhov P.A. Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2021). Development of a Gradient Descent Algorithm for Pathway Routing Based on Functional-Voxel Modeling, p. 689-696.