Числовые критерии оценки сходства многомерных геометрических объектов

И.В. Селезнёв [1], Е.В. Конопацкий [2]

[1] *Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, ул. Державина, 2, г. Макеевка, 286123, Донецкая Народная Республика*
[2] *Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, ул. Ильинская, 65, г. Нижний Новгород, 603950, Россия*

Аннотация
Проведены исследования возможности использования статистических числовых критериев для сравнения геометрических объектов, представленных в виде точечных множеств. Такой подход легко обобщается на многомерное пространство и может стать эффективным инструментом сравнения многомерных геометрических объектов. Если любому непрерывному процессу поставить в соответствие непрерывный геометрический объект, то предложенный подход может быть эффективно использован для экспертной оценки степени сходства объектов, процессов и явлений во многих отраслях науки и техники. Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что выбор критерия оценки степени сходства зависит от условий задачи сравнения геометрических объектов. В случае с наложением геометрических объектов друг на друга более качественные результаты даёт коэффициент детерминации, а в случае сравнения геометрических объектов, полученных путём преобразования, более качественные результаты даёт коэффициент корреляции Пирсона. Учитывая, что коэффициент корреляции Пирсона показал высокую устойчивость при сравнении преобразованных геометрических объектов, перспективным видится его использование в решении целого круга задач экспертного анализа биометрических данных и идентификации личности, диагностики болезней различной этимологии, распознавания рукописного и печатного текста, акустических и радиосигналов.

Ключевые слова
Геометрический объект, многомерное пространство, числовой критерий, оценка сходства, коэффициент детерминации, коэффициент корреляции.

Numerical Criteria for Assessing the Similarity of Multidimensional Geometric Objects

I.V. Seleznev [1], E.V. Konopatskiy [2]

[1] *Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Derzhavina Street, 2, Makeyevka, 286123, Donetsk People's Republic*
[2] *Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Ilyinskaya Street, 65, Nizhny Novgorod, 603950, Russia*

Abstract
The possibility of using statistical numerical criteria for comparison of geometrical objects represented as point sets has been investigated. This approach can be easily generalized to the multidimensional space and can be an effective tool for comparison of multidimensional geometrical objects. If to any continuous process to correspond the continuous geometrical object, the offered approach can be effectively used for an expert estimation of a degree of similarity of objects, processes and the phenomena in many branches of a science and engineering. Based on the

ГрафиКон 2022: 32-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-22 сентября 2022 г., Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина, Рязань, Россия
EMAIL: i.v.seleznyov@yandex.ru (И.В. Селезнёв); e.v.konopatskiy@mail.ru (Е.В. Конопацкий)
ORCID: 0000-0002-5491-9827 (И.В. Селезнёв); 0000-0003-4798-7458 (Е.В. Конопацкий)

results we can conclude that the choice of criterion for assessing the degree of similarity depends on the conditions of the comparing geometric objects problem. In case of superposition of geometrical objects on each other the determination coefficient gives more qualitative results, and in case of comparison of geometrical objects received by means of transformation the Pearson correlation coefficient gives more qualitative results. Considering that Pearson correlation coefficient showed high stability when comparing transformed geometric objects, its use in solving a wide range of problems of expert analysis of biometric data and identity identification, diagnosis of diseases of various etymologies, recognition of handwritten and printed text, acoustic and radio signals is promising.

Keywords
Geometric object, multidimensional space, numerical criterion, similarity estimation, coefficient of determination, correlation coefficient.

1. Введение

В настоящее время проводится значительное количество исследований, опирающихся на методы и алгоритмы сравнения многомерных объектов, которые используются во многих отраслях науки и техники. Например, при распознавании образов [1-3], акустических и радиосигналов [4, 5]; применении методов распознавания в медицине [6, 7], химической промышленности [8], картографии [9], сельском хозяйстве [10], криминалистике [11, 12], управлении проектами [13] и др. Всё это говорит о несомненной актуальности и востребованности развития инструментов и методов сравнения многомерных объектов. Но, подавляющая их часть связана с использованием всего одного инструмента – нейронной сети, т.е. опирается не на математический аппарат, а на вычислительные возможности современных компьютерных систем. Современные нейронные сети обладают как преимуществами, так и недостатками, среди которых: проблема переподготовки; черный ящик; забывчивость; неприменимость для решения задач, требующих высокой точности; высокая вычислительная стоимость процесса обучения [14, 15]. Вместе с тем, практически все вышеперечисленные задачи могут быть решены путём представления в виде многопараметрических геометрических объектов с помощью многомерной интерполяции и аппроксимации [16-18], которые сводятся к точечным множествам путём дискретизации, или представлены, непосредственно, в виде точечных множеств [19]. Сравнивая эти множества между собой, можно эффективно решать задачи распознавания объектов, процессов и явлений без применения нейронных сетей. Тогда задача сводится выбору критерия сравнения точечных множеств, в качестве которых наиболее перспективно выглядит использование числовых статистических критериев.

2. Выбор числового критерия оценки степени сходства многомерных геометрических объектов в точечном исчислении

Традиционно для сравнения геометрических объектов используются методы научной визуализации. Например, наложение геометрических объектов друг на друга. Однако он подходит только для сравнения одно- и двухпараметрических геометрических объектов. При этом даже сравнение двухпараметрических геометрических объектов вызывает ряд сложностей и необходимость использования интерактивной трёхмерной среды для визуализации результатов сравнения. Сравнение же многопараметрических геометрических объектов, принадлежащих многомерному пространству, порождает целый ряд практически нереализуемых проблем, связанных со сложностью визуализации геометрических объектов в многомерном пространстве. Поэтому возникает необходимость разработки критерия числовой оценки сходства геометрических объектов, который мог бы численно охарактеризовать степень их совпадения между собой с учётом перспективного использования в многомерном пространстве.

Авторам удалось найти достаточный массив работ [20-21], посвящённый развитию инструментов сопоставления кривых (максимальный информационный коэффициент, расстояние Фреше, Dynamic Time Warping и т.п.), которые используются во многих прикладных областях науки и техники, таких как анализ временных рядов, распознавание речи, проверка подписи и т.п. Все эти методы ориентированы на сопоставление однопараметрических множеств точек – линий и не имеют обобщения на многомерное пространство, которое можно было бы использовать для сопоставления многомерных точечных множеств. В работах [22-23] предлагается подход к сравнению трёхмерных геометрических объектов (тел человека и манекена) с помощью стохастических методов, с использованием функций формы. Однако из рассмотренных работ не ясно имеет ли предложенный метод обобщение на многомерное пространство.

Кроме того, многие критерии сравнения не имеют числового представления и их нельзя использовать в качестве количественной характеристики степени сходства многомерных геометрических объектов. Если опираться на методы математической статистики, то критерии оценки степени сходства делятся на параметрические и непараметрические, в зависимости от того какие факторные и результативные признаки сравниваются, а они могут быть количественными и атрибутивными. Например, к параметрическим методам измерения связей относятся, методы аналитической группировки и корреляционно-регрессионного анализа, а к непараметрическим методам – методы сравнения параллельных рядов и измерения связи между атрибутивными признаками. Для сравнения многомерных точечных множеств и, как следствие, многомерных геометрических объектов, наиболее подходящими являются параметрические критерии оценки степени сходства, к которым относятся коэффициент детерминации, коэффициент корреляции Пирсона и их модификации.

В работе [19] был предложен метод сравнения многомерных геометрических объектов, представленных в виде точечных множеств, с помощью коэффициента детерминации R^2, который, в некотором смысле, является аналогом существующих методов, основанных на сравнении расстояний между соответствующими точками анализируемых геометрических объектов [24]. Он даёт достаточно качественную оценку степени сходства геометрических объектов, которые накладываются друг на друга. Но если эти объекты расположены на некотором расстоянии друг от друга или являются подобными, то более эффективным показателем степени сходства точечных множеств является коэффициент корреляции Пирсона [25].

Классическое определение коэффициента корреляции Пирсона R_{yz} выглядит следующим образом:

$$R_{yz}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\overline{y}\right)\left(z_i-\overline{z}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\overline{y}\right)^2\sum_{i=1}^{m}\left(z_i-\overline{z}\right)^2}},$$

где y_i и z_i – массивы анализируемых значений;

$\overline{y}$ и $\overline{z}$ − усреднённые значения анализируемых значений;

m – количество анализируемых точек множества.

Значения $\overline{y}$ и $\overline{z}$ определяются как среднее арифметическое, но могут быть также использованы и другие способы усреднения. Например, в работе [25] для определения модифицированного коэффициента корреляции используется среднее геометрическое.

В отличие от коэффициента детерминации, коэффициент корреляции Пирсона изменяется в пределах от -1 до 1. Чем больше абсолютное значение R_{yz}, тем выше теснота связи между анализируемыми геометрическими объектами. $R_{yz}=0$ свидетельствует о полном отсутствии связи, $R_{yz}=1$ – указывает на наличие абсолютной (функциональной) связи. Для оценки степени корреляционной связи двух точечных множеств можно воспользоваться таблицей Чеддока.

3. Сравнение алгебраических кривых, представленных с помощью точечных множеств

Предложенный в работе [19] метод сравнения геометрических объектов состоит из двух этапов: подготовка исходных данных, которая заключается в формировании точечных множеств, и их сравнение с помощью одного из числовых критериев оценки степени сходства. Наибольшей трудоёмкостью обладает этап подготовки исходных точечных множеств. Во многом это зависит от математического аппарата, используемого для описания исходных геометрических объектов.

Например, в работе [19] точечные множества формируются на основе уравнений точечного исчисления [26, 27], которые сводятся к параметрическим посредством покоординатного расчёту. Также возможна дискретизация геометрических объектов, заданных уравнениями в явном виде, если таковые уравнения уже есть в наличии и переопределение этих геометрических объектов в точечном исчислении приводит к появлению излишних вычислительных операций. Вместе с тем, использование точечного исчисления является более предпочтительным поскольку оно имеет естественное обобщение на многомерное пространство за счёт использования метода параллельного проецирования на оси глобальной системы координат [28]. Например, в работе [19] приведен пример сравнения двух поверхностей отклика, представленных в виде дискретных точечных множеств.

Вместе с тем, учитывая сложность визуализации многомерного пространства для проведения вычислительных экспериментов и проверки полученных результатов воспользуемся однопараметрическими геометрическими объектами, в качестве которых могут выступать алгебраические кривые.

Рассмотрим сравнение нескольких алгебраических кривых 6-го порядка, полученных в процессе численного моделирования напряжённо-деформированного состояния стенки резервуара с несовершенствами геометрической формы от действия гидростатической нагрузки с учётом геометрической и конструктивной нелинейности [29, 30]. Для вычисления числовых критериев оценки сходства все пары анализируемых кривых были дискретизированы и представлены в виде 200-точечных множеств. Результаты представлены в таблице 1. Красным цветом показаны кривые $y = y\left(x\right)$, синим – $z = z\left(x\right)$.

В процессе проведения вычислительных экспериментов установлено, что на коэффициент корреляции Пирсона практически не влияет уровень дискретизации точек множества.

Как видно из визуального сравнения алгебраических кривых (таблица 1), коэффициент детерминации R^2 даёт более качественные результаты. Если первые три пары кривых имеют даже схожие уравнения с близкими по значениям полиномиальными коэффициентами, что подтверждается высокими значениями коэффициентов детерминации и корреляции, то четвёртая пара кривых имеет низкий уровень сходства и при этом коэффициент корреляции Пирсона оценивает её как весьма высокую по таблице Чеддока. Это связано с тем, что обе кривые убывают и возрастают на одних и тех же участках, но при этом расстояние между соответствующими точками анализируемых множеств является различным.

Проверим, как будут реагировать числовые критерии оценки сходства на такие преобразования кривых, как параллельный перенос и масштабирование (таблица 2).

Как видно из визуального сравнения алгебраических кривых (таблица 2), коэффициент детерминации показывает совершенно неудовлетворительный результат, т.к. он не может быть отрицательным. Но в данном случае речь идёт не об ошибках в расчётах, а о том, что для сравнения таких геометрических объектов его нельзя применять, поскольку он даёт ошибочный результат.

Зато коэффициент корреляции Пирсона показал хорошие результаты как при сравнении кривых, полученных параллельным переносом, так и при сравнении кривых, полученных путём масштабирования. Но при сравнении последних, необходимо учитывать, что одна из кривых стала больше по длине, в данном случае на 25%. Этот факт нужно учитывать в процессе дискретизации кривых, чтобы анализируемые пары точек соответствовали друг другу.

Таблица 1 – Сравнение наложенных алгебраических кривых

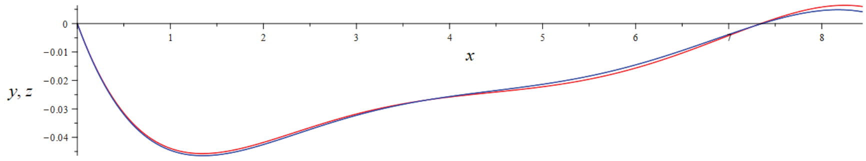
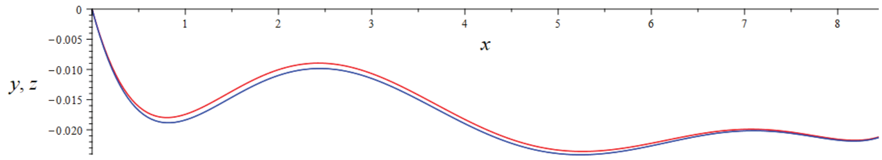
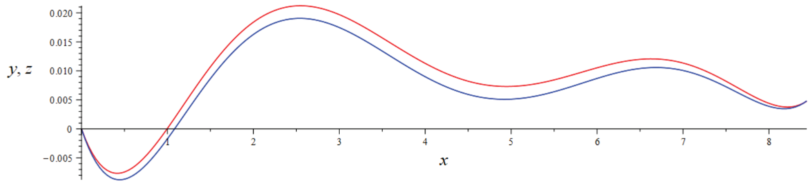
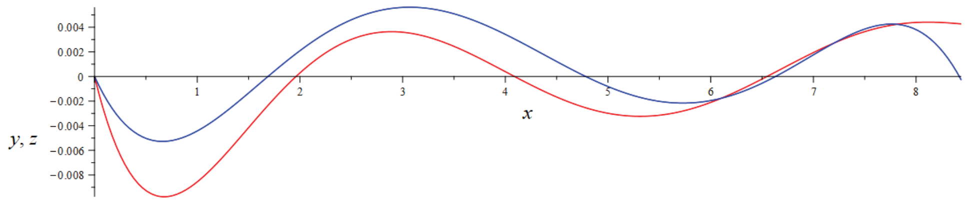
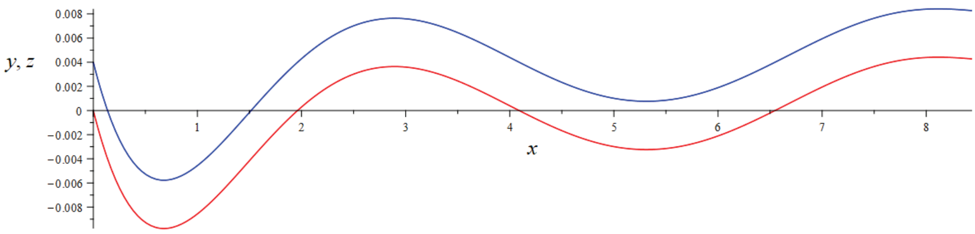
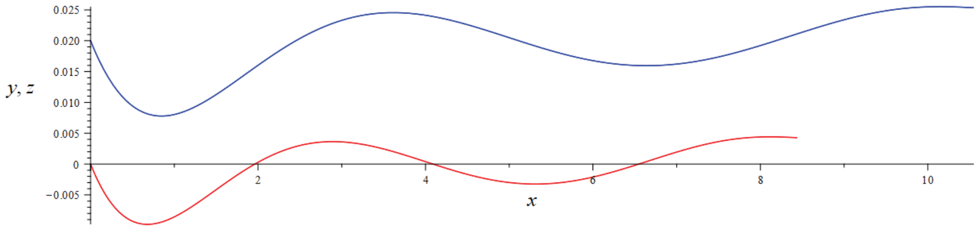
Значения критериев оценки сходства	Уравнения и графическая визуализация сравнения наложенных алгебраических кривых
$R^2 = 0,9976$ $R_{yz} = 0,9988$	$y = 3,707 \cdot 10^{-6} x^6 - 0,00016x^5 + 0,0024x^4 - 0,017x^3 + 0,06x^2 - 0,089x$ $z = 4,188 \cdot 10^{-6} x^6 - 0,00017x^5 + 0,0025x^4 - 0,018x^3 + 0,061x^2 - 0,09x$ 
$R^2 = 0,984$ $R_{yz} = 0,9988$	$y = 0,000016x^6 - 0,00045x^5 + 0,005x^4 - 0,025x^3 + 0,059x^2 - 0,056x$ $z = 0,000016x^6 - 0,00046x^5 + 0,005x^4 - 0,025x^3 + 0,06x^2 - 0,058x$ 
$R^2 = 0,936$ $R_{yz} = 0,997$	$y = 0,000024x^6 - 0,00066x^5 + 0,0068x^4 - 0,032x^3 + 0,068x^2 - 0,041x$ $z = 0,000025x^6 - 0,00067x^5 + 0,0069x^4 - 0,033x^3 + 0,07x^2 - 0,045x$ 
$R^2 = 0,6639$ $R_{yz} = 0,9128$	$y = 7,674 \cdot 10^{-6} x^6 - 0,00024x^5 + 0,0028x^4 - 0,015x^3 + 0,0385x^2 - 0,0343x$ $z = -0,00004x^5 + 0,00088x^4 - 0,0066x^3 + 0,02x^2 - 0,018x$ 

Таблица 2 – Сравнение алгебраических кривых, полученных путём преобразования

Значения критериев оценки сходства	Уравнения и графическая визуализация сравнения алгебраических кривых, полученных путём преобразования
$R^2 = -0,0087$ $R_{yz} = 1$	$y = 7,674 \cdot 10^{-6} x^6 - 0,00024x^5 + 0,0028x^4 - 0,015x^3 + 0,0385x^2 - 0,034x$ $z = 7,674 \cdot 10^{-6} x^6 - 0,00024x^5 + 0,0028x^4 - 0,015x^3 + 0,0385x^2 - 0,034x + 0,004$ 

Продолжение таблицы 2

$R^2 = -23,838$ $R_{yz} = 1$	$y = 7,674 \cdot 10^{-6} x^6 - 0,00024x^5 + 0,0028x^4 - 0,015x^3 + 0,0385x^2 - 0,0343x$ $z = 0,02 + 2,514 \cdot 10^{-6} x^6 - 0,000097x^5 + 0,0014x^4 - 0,0098x^3 + 0,0308x^2 - 0,0343x$ 

4. Заключение

Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что выбор критерия оценки степени сходства во многом зависит от условий задачи сравнения геометрических объектов. В случае с наложением геометрических объектов друг на друга более качественные результаты даёт коэффициент детерминации, а в случае сравнения геометрических объектов, претерпевших такие преобразования, как параллельный перенос и масштабирование, – наиболее качественные результаты даёт коэффициент корреляции Пирсона.

Вместе с тем, если представить, что любой геометрический объект является графическим отображением некоторого процесса или наоборот, любому непрерывному процессу можно поставить в соответствие непрерывный геометрический объект, то предложенный подход может быть эффективно использован для экспертной оценки степени сходства объектов, процессов и явлений во многих отраслях науки и техники. Будучи альтернативным по отношению к используемым критериям оценки степени сходства, он является универсальным инструментом, который может быть реализован не только для точечных уравнений, которые сводятся к параметрическим, но и для уравнений в явном виде.

Следует отметить, что для проведения вычислительных экспериментов были выбраны кривые линии, поскольку на их примере легко визуально подтвердить или опровергнуть результаты сравнения, полученные с помощью статистических критериев. Однако, подход, основанный на сравнении точечных множеств с помощью статистических критериев, легко обобщается на многомерное пространство, что и было показано в работе [19].

Учитывая, что коэффициент корреляции Пирсона показал высокую устойчивость при сравнении преобразованных геометрических объектов, перспективным видится его применение в решении целого круга задач экспертного анализа биометрических данных и идентификации личности, диагностики болезней различной этимологии, распознавания рукописного и печатного текста, акустических и радиосигналов.

5. Список источников

[1] Федин И.А., Серов В.А. Интеллектуальные методы обработки информации: алгоритмы распознавания образов // Тенденции развития науки и образования. 2020. № 58-2. С. 37-46. DOI: 10.18411/lj-02-2020-27.

[2] Иванько А.Ф., Иванько М.А., Горчакова Я.В. Методы распознавания образов и задачи логического выделения объектов // Научное обозрение. Технические науки. 2019. № 3. С. 36-40.

[3] Тормозов В.С. Адаптация модели нейронной сети LSTM для решения комплексной задачи распознавания образов // Программные продукты и системы. 2021. № 1. С. 151-156. DOI: 10.15827/0236-235X.133.151-156.

[4] Денисюк А.В. Акустический криптоанализ жидкокристаллических мониторов // Вестник СКУ им. М. Козыбаева. 2020. № 2(47). С. 247-253.

[5] Кадуков Е.П., Утимишева И.К. Метод распознавания вида модуляции спектрально-эффективных радиосигналов на основе классификации образов радиосигналов в пространстве параметров фазовых диаграмм по критерию минимума евклидового расстояния // Журнал радиоэлектроники. 2020. № 11. С. 11. DOI: 10.30898/1684-1719.2020.11.12.
[6] Брагин А.Д., Спицын В.Г. Распознавание моторных образов на электроэнцефалограммах с применением свёрточных нейронных сетей // Компьютерная оптика. 2020. Т. 44. № 3. С. 482-489. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-669.
[7] Recognition and inhibition of SARS-CoV-2 by humoral innate immunity pattern recognition molecules / M. Stravalaci [et al.] // Nature Immunology. 2022. Vol. 23. No 2. pp. 275-286. DOI: 10.1038/s41590-021-01114-w.
[8] Recognition and sensing of organic compounds using analytical methods, chemical sensors, and pattern recognition approaches / S.K. Jha, R.D.S. Yadava, K. Hayashi, N. Patel // Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems. 2019. Vol. 185. pp. 18-31. DOI: 10.1016/j.chemolab.2018.12.008.
[9] Шурыгина А.А. Автоматизированное распознавание картографических образов населённых пунктов // Теоретические и прикладные проблемы географической науки: демографический, социальный, правовой, экономический и экологический аспекты (Воронеж, 12–16 ноября 2019 г.): материалы межд. научно-практ. конф. Воронеж: ВГПУ. 2019. С. 253-258.
[10] Ширяева Е.В. Инновационные технологии распознавания образов на основе нейронных сетей в сельском хозяйстве // Развитие АПК на основе принципов рационального природопользования и применения конвергентных технологий (Волгоград, 30 января – 01 февраля 2019 г.): материалы Межд. научно-практ. конф., проведенной в рамках Межд. научно-практ. форума. Волгоград: ВГАУ. 2019. С. 459-464.
[11] Бахтеев Д.В. Компьютерное зрение и распознавание образов в криминалистике // Российское право: образование, практика, наука. 2019. № 3(111). С. 66-74. DOI: 10.34076/2410-2709-2019-3-66-74.
[12] Шапович Е.Г., Шах А.В. Методы распознавания отпечатков пальцев и реализация на высокоуровневом языке программирования c# // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2019. Т. 7. № 1(44). С. 477-480.
[13] Дроговоз П.А., Шиболденков В.А., Коренькова Д.А. Подход к созданию гибридной рекомендательной системы для поддержки принятия решений по управлению проектами на основе нейросетевого картирования и когнитивной визуализации показателей освоенного объема // Экономика и предпринимательство. 2019. № 9(110). С. 1212-1217.
[14] Белоглазов Д.А. Особенности нейросетевых решений, достоинства и недостатки, перспективы применения // Известия ЮФУ. Технические науки. 2008. № 7(84). С. 105-110.
[15] Егорова В.П., Олиферова О.С., Горькавый М.А. Особенности нейросетевых решений, достоинства и недостатки, перспективы применения // Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований (Комсомольск-на-Амуре, 06-10 апреля 2020 г.): Материалы III Всерос. нац. научной конф. студ., асп. и молодых ученых. Комсомольск-на-Амуре: КнАГУ, 2020. С. 218-221.
[16] Конопацкий Е.В. Подход к построению геометрических моделей многофакторных процессов и явлений многомерной интерполяции // Программная инженерия. 2019. Т. 10. № 2. С. 77-86. DOI: 10.17587/prin.10.77-86.
[17] Конопацкий Е.В. Геометрическая теория многомерной интерполяции // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2020. № 1(07). С. 9-16. DOI: 10.30987/2658-6436-2020-1-9-16.
[18] Конопацкий Е.В., Ротков С.И. Аппроксимация геометрических объектов многомерного пространства с помощью дуг кривых, проходящих через наперёд заданные точки // Труды Межд. конф. по комп. графике и зрению "Графикон". 2019. №29. С. 191-195. DOI: 10.30987/graphicon-2019-1-191-195.
[19] An approach to comparing multidimensional geometric objects / I.V. Seleznev [et al.] // Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon

2021) Nizhny Novgorod, Russia, September 27-30, 2021. Vol. 3027. pp. 682-688. DOI: 10.20948/graphicon-2021-3027-682-688.
[20] Müller M. Dynamic Time Warping. Dynamic Time Warping. In: Information Retrieval for Music and Motion. Springer, Berlin, Heidelberg. 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-74048-3_4.
[21] Efrat A., Venkatasubramanian S., Fan Q. Curve matching, time warping, and light fields: New algorithms for computing similarity between curves [Электронный ресурс] // Journal Mathematic Imaging and Vision. 2007. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.118.5078&rep=rep1&type=pdf (дата обращения 01.05.2022).
[22] Грудинин С.Н. Сравнение трехмерных объектов. Критерии оценки сходства. Молодой ученый. 2011. Т.1. №5(28). С.42-44.
[23] Грудинин С.Н., Фроловский В.Д. Методы сравнения сложных геометрических объектов. Наука технологии инновации. Материалы Всерос. научной конф. молодых ученых. Новосибирский государственный технический университет. 2013. С. 189-192.
[24] Конопацкий Е.В. Геометрический смысл метода наименьших квадратов // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2019. № 9(183). С. 11-18. DOI: 10.14489/vkit.2019.09.pp.011-018.
[25] Дюкина Т.О. Модифицированный коэффициент корреляции // Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных (Москва, 10-13 октября 2017 г.): Сб. науч. тр. XIX Межд. конф. DAMDID. Москва: ФИЦ "Информатика и управление" РАН. 2017. С. 174-179.
[26] Балюба И.Г., Конопацкий Е.В., Бумага А.И. Точечное исчисление: учебно-метод. пособие. Макеевка: Донбасская национальная академия строительства и архитектуры. 2020. 244 с.
[27] Балюба И.Г., Конопацкий Е.В. Точечное исчисление. Историческая справка и основополагающие определения // Физико-техническая информатика (CPT2020): Материалы 8-ой Межд. конф. (Пущино, 09-13 ноября 2020 г.) Нижний Новгород: АНО "НИЦФТИ", 2020. С. 321-327. DOI: 10.30987/conferencearticle_5fd755c0adb1d9.27038265.
[28] Конопацкий Е.В., Бездитный А.А. Точечные инструменты геометрического моделирования, инвариантные относительно параллельного проецирования // Геометрия и графика. 2022. Т.9. №4. С. 11-21. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-11-21.
[29] Конопацкий Е.В., Шевчук О.А., Крысько А.А. Компьютерное моделирование напряжённо-деформированного состояния эксплуатируемого резервуара для хранения нефтепродуктов // Южно-Сибирский научный вестник. 2022. № 2. С. 71-76.
[30] Konopatskiy E.V., Shevchuk O.A., Krysko A.A. Modeling of the Stress-Strain State of Steel Tank with Geometric Imperfections // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 100 Article No 10001. DOI: 10.4123/CUBS.100.1.