

Определение оптимальной оси отражательной симметрии с точки зрения меры Жаккара методом проекций

Н.А. Ломов^{1,2}, О.С. Середин¹, О.А. Кушнир¹, Д.В. Ляхов¹

¹ Тульский государственный университет, пр. Ленина, д. 92, Тула, 300012, Россия

² Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ул. Вавилова, 44, корп. 2, Москва, 119333, Россия

Аннотация

Рассматривается задача определения оптимальной оси отражательной симметрии объекта на бинарном изображении с точки зрения меры Жаккара. Предлагается подход к поиску глобального оптимума на сетке с помощью вычисления верхних оценок на меру Жаккара через преобразование Радона. Рассмотрены различные приёмы снижения временных затрат при вычислении меры Жаккара для заданной прямой. Анализируются различные стратегии перебора возможных осей симметрии, а также выбора начального приближения. Эксперименты показывают, что мера Жаккара, соответствующая оптимальной оси, найденной предложенным методом, не уступает результату полного перебора по осям, проходящим через точки контура объекта, с учётом скидки на погрешность вычислений, вызванную растеризацией. По скорости предложенный метод существенно превосходит разработанные ранее способы ограничения полного перебора.

Ключевые слова

Анализ формы, отражательная симметрия, мера Жаккара, преобразование Радона, моменты изображений.

Detection of the Optimal Reflection Symmetry Axis with the Jaccard Index by Projection-based Method

N.A. Lomov^{1,2}, O.S. Seredin¹, O.A. Kushnir¹, D.V. Liakhov¹

¹ Tula State University, Lenin ave., 92, Tula, 300012, Russia

² Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Vavilova str., 44, bld. 2, Moscow, 119333, Russia

Abstract

This study determines the optimal reflection symmetry axis of an object in a binary image using the Jaccard index. We propose to find the global optimum on the grid by estimating the upper bounds of the Jaccard index with the Radon transform. Several approaches to improving the Jaccard index computation for a given line are considered. Some strategies for enumerating possible symmetry axes and selecting the initial approximation are proposed. The experiments show that the Jaccard index for the optimal axis found by the proposed method is not inferior to the exhaustive brute-force of the axes passing through the points of the object contour considering the rasterization error. In terms of speed, the proposed method significantly exceeds the previously developed methods for limiting the exhaustive search.

Keywords

Shape analysis, reflection symmetry, Jaccard index, Radon transform, image moments.

ГрафиКон 2022: 32-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-22 сентября 2022 г., Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина, Рязань, Россия

EMAIL: nikita-lomov@mail.ru (Н.А. Ломов); oseredin@yandex.ru (О.С. Середин); kushnir.olesya@gmail.com (О.А. Кушнир); liakhov.daniil@mail.ru (Д.В. Ляхов)

ORCID: 0000-0003-4286-1768 (Н.А. Ломов); 0000-0003-0410-7705 (О.С. Середин); 0000-0001-7879-9463 (О.А. Кушнир)



© 2022 Copyright for this paper by its authors.
Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

1. Введение

Симметрия — важное свойство визуальных объектов, часто используемое в компьютерном зрении и распознавании образов. С точки зрения практического использования определение факта наличия и степени отражательной симметрии может применяться для решения многих задач, таких как анализ условий произрастания растений при экомониторинге, анализ внутривидового фенотипического разнообразия видов растений, обнаружение опухолей в медицинской обработке изображений, контроль качества промышленной продукции (например, анализируется силуэт детали на конвейере с целью ее отбраковки), сжатие изображений, восстановление трехмерных сцен.

Когда объект называют симметричным, считают, что существует не равное тождественному преобразование \mathcal{T} , не изменяющее объект. Однако, так как в реальной жизни абсолютно симметричные объекты встречаются редко, уместнее говорить о мере симметрии объекта, принимающей значения из диапазона $[0, 1]$. В таком случае объекты, мера которых в точности равна 1, будут абсолютно симметричными, а объекты с мерой, близкой к 1 — квазисимметричными.

В задаче автоматической оценки меры симметрии можно выделить две подзадачи: 1) математическая формализация меры симметрии, которая бы хорошо согласовывалась с интуитивным представлением человека о симметрии; 2) разработка эффективных алгоритмов для вычисления меры симметрии на основе заданной формализации.

Мы будем рассматривать задачу оценки меры симметрии плоской фигуры A . В этом случае одной из общеупотребимых оценок меры симметрии является оценка на основе меры Жаккара:

$$J_A(\gamma) = \frac{|A \cap \mathcal{T}_\gamma(A)|}{|A \cup \mathcal{T}_\gamma(A)|}$$

где $\mathcal{T}_\gamma(A)$ — преобразование из множества допустимых преобразований \mathbb{T} , заданное набором параметров γ из соответствующего множества Γ . Требуется найти преобразование, обеспечивающее максимальное значение меры, которое и будет считаться итоговой мерой симметрии фигуры:

$$J^*(A) = J_A(\gamma^*), \quad \gamma^* = \arg \max_{\gamma \in \Gamma} J_A(\gamma).$$

Таким образом, ключевым пунктом постановки задачи является задание множества допустимых преобразований \mathbb{T} и способа их параметризации.

2. Обзор существующих методов

Стоит отметить, что вопрос симметричности и проблема определения симметрии возникает в различных науках, ее осмыслению посвящено много научных статей. Интересным примером может быть работа Корбаллиса [1] о симметричности и асимметрии человеческого тела, мозга и связанных с этим психических проявлениях.

В компьютерном зрении в качестве модели представления плоской фигуры может выступать как граница фигуры (контур), так и внутренность фигуры, взятая вместе с границей. В работе ван Оттерлоо [2] определение зеркальной симметрии фигур производится на основе Фурье-анализа параметрического представления контура. В качестве параметра используется длина пройденного фрагмента контура, предложены различные способы описания контуров, использующие касательные, нормали и кривизну. Журавская и Местецкий [3] предложили метод определения оси симметрии, основанный на преобразовании Фурье координат точек контура при аналогичной параметризации. В статье Шейнина [4] предложен способ определения зеркальной симметрии фигур на основе вычисления функции поворота контура, использованный Аркином [5] для сравнения полигональных фигур.

В основу метода вычисления зеркальной симметрии, изложенного Янгом [6], положен принцип определения самоподобия частей контура фигуры на основе вычисления геодезических расстояний до главных точек. Контур фигуры представляется в виде набора нескольких главных точек, найденных в ходе эволюции дискретной кривой, описанной Латецки и Лакампером [7]. Для каждой главной точки вычисляют вектор геодезических расстояний (идея взята у Линга и

Якобса [8]) от неё до каждой из точек контура. Далее вычисляют матрицу расстояний между векторами, принадлежащими двум подконтуром с концами в паре главных точек, и по матрице находят оптимальное выравнивание подконтуров и меру их различия. Внутреннее расстояние для нахождения оси симметрии также используется в работе [9], где на его основе рассчитывается распределение электрических зарядов на форме. Распределение инвариантно к изометрическому преобразованию, поэтому данный метод может определять внешнюю и внутреннюю симметрию. Горизонтальные линии различной длины в матрице сходства, которая формируется из разницы между соответствующими электрическими зарядами фигуры относительно всех потенциальных осей симметрии, показывают глобальную и локальную симметрию частей фигуры.

В работе Ли [10] для определения симметрии вводятся инварианты отражения и определяются направленные моменты. Обнаружение симметрии отражения может быть сделано путем решения тригонометрической системы, полученной из этих моментов, а также путем применения инвариантов отражения в 2D и 3D. Если ни один из инвариантов отражения не равен нулю, то симметрии нет. Проведенные в данной работе эксперименты в 2D и 3D показывают, что все линии или плоскости отражения могут быть детерминированно найдены с использованием моментов до шестого порядка.

Известны разработанные Йипом методы определения параметров симметрии на основе преобразования Хафа — как для отражательной [11], в том числе при наличии скоса, так и для вращательной [12] симметрии. Среди недостатков данных методов можно выделить отсутствие явного количественного выражения меры симметрии, которое теоретически можно получить путём анализа аккумулятора Хафа. Также методы требуют ощутимых вычислительных затрат, к примеру, при поиске оси отражательной симметрии подход требует рассмотрения всех четвёрок точек границы, складывающихся в трапеции. Брукштейн и Шейкд разработали метод определения параметров симметрии со скосом на основе инвариантных подписей [13] — описания границы через кривизну и длину дуги, инвариантного к неевклидовым преобразованиям.

Нгуен [14] предложил подход к определению отражательной симметрии на основе метода проекций, сводящийся к анализу преобразования Радона фигуры, при котором вычисляются соответствующие проекции. В основе метода лежит идея, что при отражении фигуры относительно прямой отражается её проекция на перпендикулярную прямую. Для оценки меры симметрии используется критерий χ -квадрат соответствия отражённой проекции исходной. В последующей работе [15] было показано, что использование данной оценки в качестве критерия симметричности имеет теоретическое обоснование. Хотя такой метод способен очень быстро обрабатывать входные изображения с фигурами, близкими к идеально симметричным, находя для них «правильную» ось симметрии, результаты для недостаточно симметричных фигур (например, симметричных фигур с исключенной или добавленной частью) часто оказываются далеки от ожидаемых. Это можно объяснить тем, что работа исключительно с проекциями приводит к игнорированию значительной части информации о форме фигуры.

Отдельное направление исследования симметрии плоских фигур связано с анализом их скелетов [16], состоящих из точек, равноудалённых от двух и более участков границы фигуры. Таким образом, рёбра скелета, представленного в виде геометрического графа, можно рассматривать как локальные криволинейные оси симметрии. Кушнир и Федотова [17] разработали алгоритм поиска наилучшей оси симметрии, основанный на наложении скелета фигуры и его отражения, представленных как цепочки скелетных примитивов. Цепочка, совпадающая сама с собой при оптимальном наложении, определяет начальную ось симметрии, которая затем уточняется путём её варьирования в границах, определённых геометрическими критериями — отклонением длин двух частей, на которые граница разбивается осью, от полупериметра фигуры и отклонением самой оси от центра масс фигуры [18]. Несмотря на то что в большинстве случаев алгоритм приводит к обнаружению оптимальной оси симметрии, он по большому счёту является эвристическим и не подкреплён строгим теоретическим обоснованием, а также требует настройки ряда параметров.

Схема метода, предложенного Ниу [19], такова: во-первых, вычисляется скелет входной 2D-формы и отбирается ряд равноудалённых точек от границы формы. Затем для описания двумерной формы строится 1D-функция. Эта функция, названная функцией пограничного скелета, определяется как минимальные внутренние расстояния между граничными точками

выборки и скелетом. Зеркальная симметрия определяется при согласовании кривых сегментов функции, расположенных между локальными экстремумами.

В итоге можно выделить основные распространённые недостатки рассмотренных методов: чувствительность к шумам на границе фигуры, особенно в случае контурных методов, неспособность адекватно оценить параметры симметрии квазисимметричных объектов, возникающих на реальных изображениях, отсутствие гарантии того, что в результате их работы будет найден глобальный оптимум, и вычислительную трудоёмкость, особенно в том случае, когда множество преобразований шире движений.

3. Параметризация преобразований

В качестве множества преобразований Γ мы будем рассматривать отражения относительно всевозможных прямых. Как и при вычислении преобразований Радона и Хафа, будем рассматривать прямые в полярной параметризации, когда прямая определяется парой параметров (r, θ) . Здесь r задаёт расстояние от начала координат до прямой, а θ определяет угол между осью X и вектором нормали к прямой $(\cos \theta, \sin \theta)$. Уравнение прямой в декартовых координатах в этом случае имеет вид $x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta = r$. Так как пары параметров (r, θ) и $(-r, \theta + \pi)$ задают одну и ту же прямую, достаточно рассматривать θ из полусегмента $[0, \pi)$.

Координаты исходной точки (x, y) и симметричной к ней относительно прямой $l(r, \theta)$ точки (x', y') связаны следующим преобразованием в однородных координатах:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 2r \cdot \cos \theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 2r \cdot \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(r, \theta) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим следующие типы аффинных преобразований и соответствующих им матриц:

1. Сдвиг, делающий точку $(-x, -y)$ началом координат: $\mathbf{T}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Поворот на угол θ :

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Отражение относительно оси Y :

$$\mathbf{M}_Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\mathbf{P}(r, \theta) = \mathbf{T}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{M}_Y \cdot \mathbf{R}(-\theta) \cdot \mathbf{T}(-r \cos \theta, -r \sin \theta)$, и $\mathbf{R}(-\theta) \cdot \mathbf{T}(-r \cos \theta, -r \sin \theta) \cdot [x' \ y' \ 1]^T = \mathbf{M}_Y \cdot \mathbf{R}(-\theta) \cdot \mathbf{T}(-r \cos \theta, -r \sin \theta) \cdot [x \ y \ 1]^T$.

На рисунке 1 представлена последовательность аффинных преобразований при отражении.

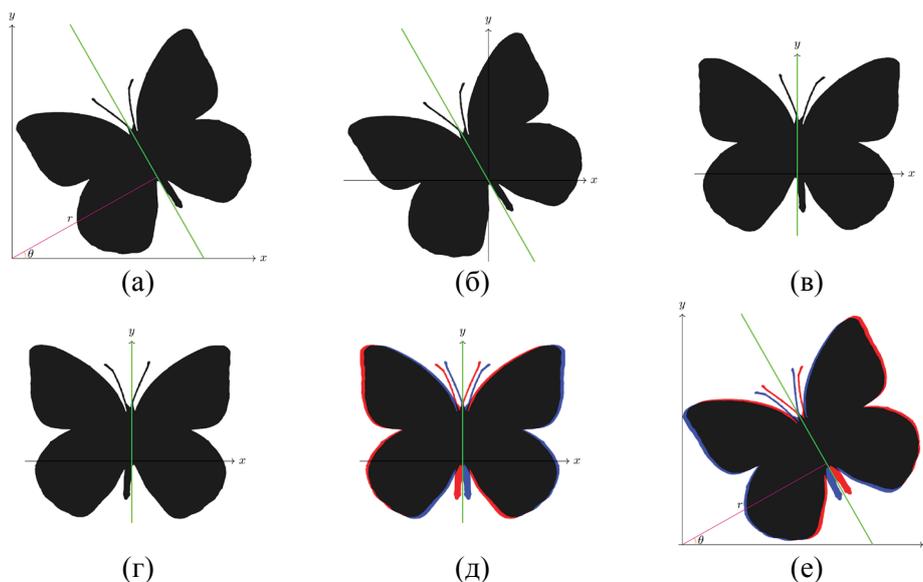


Рисунок 1 – Последовательность преобразований при отражении. (а) Исходное изображение; (б) сдвиг на $(-r \cos \theta, -r \sin \theta)$; (в) поворот на $-\theta$; (г) отражение относительно оси Y ; (д) симметрия относительно оси Y ; (е) исходная симметрия

Таким образом, задачу можно представить в следующей формулировке: требуется найти такой угол θ и такое расстояние r , чтобы при сдвиге фигуры на вектор $(-r \cos \theta, -r \sin \theta)$ и разложении по *ортogonalному* базису $\{\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta), \mathbf{v} = (-\sin \theta, \cos \theta)\}$ мера Жаккара между фигурой и её отражением относительно оси Y была максимальна (рисунок 1).

Множество отражений является подмножеством эквивалентных (сохраняющих площадь) преобразований, поэтому меру Жаккара можно представить как

$$J_A(\gamma) = \frac{|A \cap \mathcal{T}_\gamma(A)|}{2|A| - |A \cap \mathcal{T}_\gamma(A)|}.$$

Так как доля пересечения $C_A(\gamma) = \frac{|A \cap \mathcal{T}_\gamma(A)|}{|A|}$ монотонно зависит от меры Жаккара:

$$C_A(\gamma) = 2 \left(1 - \frac{1}{1 + J_A(\gamma)} \right),$$

далее будем искать максимум $C_A(\gamma)$, а не $J_A(\gamma)$.

4. Верхние оценки меры Жаккара на основе метода проекций

4.1. Непрерывный подход

Для фигур, возникающих на реальных изображениях, функция $C_A(r, \theta)$, как правило, имеет сложный вид и не является ни унимодальной, ни тем более выпуклой (рисунок 2), что затрудняет использование традиционных методов оптимизации.

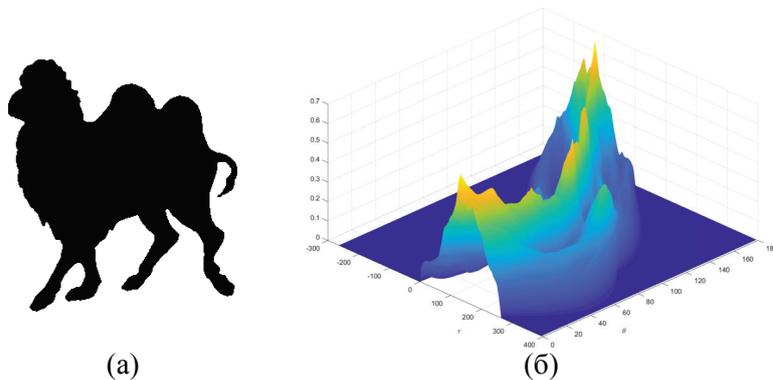


Рисунок 2 – (а) Исходное изображение A ; (б) доля пересечения $C_A(r, \theta)$

Мы предлагаем искать оптимальные параметры перебором по сетке, значительно сократив пространство перебора за счёт анализа проекций фигуры на всевозможные оси. Для этого нам понадобится преобразование Радона фигуры A , определяемое через её характеристическую функцию $\chi_A(x, y) = [(x, y) \in A]$ как

$$R_A(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_A(r \cos \theta - z \sin \theta, r \sin \theta + z \cos \theta) dz.$$

Геометрический смысл $R_A(r, \theta)$ — длина пересечения фигуры с прямой $l(r, \theta)$. Очевидно, при отражении фигуры относительно такой прямой, $A' = \mathbf{P}(r, \theta)(A)$, всякая прямая $l(r + t, \theta)$ отображается в прямую $l(r - t, \theta)$, что ведёт и к отражению преобразования Радона: $R_{A'}(r + t, \theta) = R_A(r - t, \theta)$.

Теперь рассмотрим функцию $L_A(r, \theta) = \int_{-\infty}^r R_A(s, \theta) ds$, которая определяет площадь части фигуры A , расположенной слева от прямой $l(r, \theta)$, соответственно, площадь части, расположенной справа, равна $|A| - L_A(r, \theta)$. Так как при отражении левая и правая части относительно прямой меняются местами,

$$C_A(r, \theta) \leq 2 \min(L_A(r, \theta), |A| - L_A(r, \theta)) / |A| = \bar{C}_A(r, \theta),$$

что можно использовать как первоначальную оценку сверху меры Жаккара.

Более тонкая оценка связана с сопоставлением значений $R_A(r + t, \theta)$ и $R_A(r - t, \theta)$: очевидно, что при наложении соответствующих участков пересечения прямых с фигурой длина их общей части не превышает $\min(R_A(r + t, \theta), R_A(r - t, \theta))$, поэтому

$$C_A(r, \theta) \leq \frac{1}{|A|} \int_{-\infty}^{+\infty} \min(R_A(r+t, \theta), R_A(r-t, \theta)) dt = \frac{2}{|A|} \int_0^{+\infty} \min(R_A(r+t, \theta), R_A(r-t, \theta)) dt = \tilde{C}_A(r, \theta).$$

Заметим, что при отражении относительно оси $l(r, \theta)$ прямой вида $l(p, \theta - \alpha)$ на месте остаётся точка пересечения прямых (x, y) :

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = r, \\ x \cos(\theta - \alpha) + y \sin(\theta - \alpha) = p, \\ \begin{cases} x = \frac{p \sin \theta - r \sin(\theta - \alpha)}{\sin \alpha}, \\ y = \frac{-p \cos \theta + r \cos(\theta - \alpha)}{\sin \alpha}. \end{cases} \end{cases}$$

Прямая $l(p, \theta - \alpha)$ при этом переходит в прямую $l(q, \theta + \alpha)$, на которой лежит и точка (x, y) . Следовательно, $q = x \cos(\theta + \alpha) + y \sin(\theta + \alpha) = 2r \cos \alpha - p$. Суть дополнительной проверки заключается в сравнении значений преобразования Радона у переходящих друг в друга прямых:

$$C_A(r, \theta) \leq \frac{1}{|A|} \int_{-\infty}^{+\infty} \min(R_A(t, \theta - \alpha), R_A(2r \cos \alpha - t, \theta + \alpha)) dt = \hat{C}_A(r, \theta, \alpha).$$

Отметим, что $\hat{C}_A(r, \theta, \alpha) = \hat{C}_A(r, \theta, -\alpha)$, $\hat{C}_A(r, \theta, \alpha + \pi) = \hat{C}_A(r, \theta, \alpha)$, а также $\hat{C}_A(r, \theta, 0) = \tilde{C}_A(r, \theta)$, и $\hat{C}_A(r, \theta, \frac{\pi}{2}) = 1$. Таким образом, достаточно рассматривать только α в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$. Мы будем уточнять оценку по нескольким углам, полученным при равномерном разбиении интервала:

$$\hat{C}_A^{(k)}(r, \theta) = \min_{1 \leq i \leq k} \hat{C}_A(r, \theta, \frac{\pi i}{2(k+1)}).$$

Отметим, что гарантировано только неравенство $\bar{C}_A(r, \theta) \geq \tilde{C}_A(r, \theta)$, в то время как соотношение $\hat{C}_A(r, \theta, \alpha)$ с $\bar{C}_A(r, \theta)$ и $\tilde{C}_A(r, \theta)$ заведомо не известно. Таким образом, эти оценки можно применять независимо друг от друга. Как видно из рисунка 3, наиболее полезной оценка $\hat{C}_A(r, \theta, \alpha)$ оказывается в случае фигуры, вытянутой по диагонали: здесь между проекциями фигуры на главную и побочную диагонали имеется значительное расхождение.

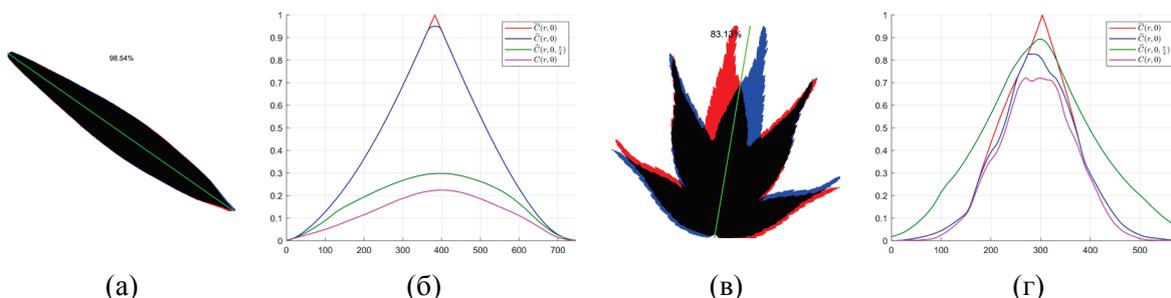


Рисунок 3 – Соотношение верхних оценок на меру симметрии. (а)(в) Исходные изображения; (б)(г) соответствующие им верхние оценки функции $C_A(r, \theta)$

4.2. Практическая реализация для бинарных изображений

При работе с бинарными изображениями особую важность приобретает скорость выполнения их аффинных преобразований. Идея эффективной реализации заключается в том, чтобы как можно реже выполнять «настоящие» повороты, а все отражения свести к отражениям относительно вертикальных осей. Рис. 4 показывает, что для каждого θ множество осей $\{l(r, \theta)\}_r$ становится вертикальным при повороте на $-\theta$. Будем считать, что для бинарного изображения, заданного матрицей B , получено дискретное преобразование Радона $R_B(r, \theta)$, $r \in \mathbb{Z}$, $\theta \in \mathbb{S}_\theta = \left\{ \frac{k\pi}{n_\theta} \right\}_{k=0}^{n_\theta-1}$, где n_θ — число равномерно распределённых углов.

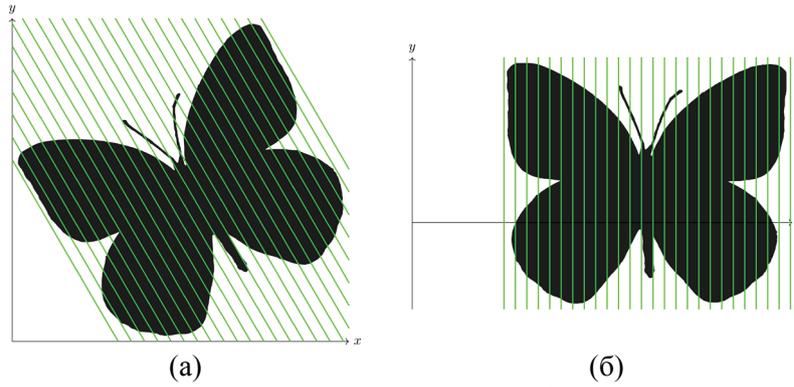


Рисунок 4 – «Вертикализация» параллельных прямых. (а) Множество прямых $\{l(r, \theta)\}_r$; (б) соответствующее множество прямых $\{l(r, 0)\}_r$ после поворота на $-\theta$

Пусть B' — бинарное изображение после поворота на $-\theta$, смещённое на (x_0, y_0) , чтобы попасть в область кадра, и имеющее размер $w \times h$. Тогда $\sum_{i=1}^h b'_{ij} \approx R_B(j - x_0, \theta)$, $\sum_{j=1}^w b'_{ij} \approx R_B(i - y_0, \theta + \frac{\pi}{2})$. Таким образом, преобразование Радона можно получить, выполнив $\frac{n\theta}{2}$ поворотов. Вычислим также значения $L_B(r, \theta) = \sum_{j=-\infty}^{r-1} R_B(j, \theta)$ — число пикселей изображения строго слева от дискретной прямой $l(r, \theta)$ — и обозначим сумму элементов B за $|B|$.

Будем рассматривать r с шагом в полпикселя. При $r = j - x_0, j = 1, \dots, w$ изображение B' нужно отразить относительно прямой $x = j$, то есть оставить на месте j -й столбец. При этом слева от прямой окажутся $L_B(r, \theta)$ пикселей, а справа $|B'| - R_B(r, \theta) - L_B(r, \theta) = |B'| - L_B(r + 1, \theta)$ пикселей. Если же $r = j + \frac{1}{2} - x_0, j = 1, \dots, w - 1$, изображение отражается относительно прямой между j -м и $j + 1$ -м столбцом, и стабильного столбца нет. Тогда слева от прямой оказываются $L_B(r + \frac{1}{2}, \theta)$ пикселей, а справа $|B'| - L_B(r + \frac{1}{2}, \theta)$ пикселей.

Таким образом, первая оценка меры Жаккара сверху принимает вид:

$$\bar{C}_B(r, \theta) = \begin{cases} \frac{R_B(r, \theta)}{|B'|} + \frac{2}{|B'|} \min(L_B(r, \theta), |B'| - L_B(r + 1, \theta)), & \text{если } 2r \text{ чётное;} \\ \frac{2}{|B'|} \min\left(L_B\left(r + \frac{1}{2}, \theta\right), |B'| - L_B\left(r + \frac{1}{2}, \theta\right)\right), & \text{если } 2r \text{ нечётное.} \end{cases}$$

При наличии стабильного столбца j столбец $j + t$ накладывается на столбец $j - t$, и число пар таких столбцов до выхода за пределы кадра равно $\min(j - 1, w - j)$. При отсутствии стабильного столбца друг на друга накладываются столбцы $j + t$ и $j + 1 - t$, и число таких пар равно $\min(j, w - j)$. В итоге, обозначив число пар накладывающихся столбцов за $n(r)$, получаем выражения для второй оценки сверху:

$$\tilde{C}_B(r, \theta) = \begin{cases} \frac{R_B(r, \theta)}{|B'|} + \frac{2}{|B'|} \sum_{t=1}^{n(r)} \min(R_B(r - t, \theta), R_B(r + t, \theta)), & \text{если } 2r \text{ чётное;} \\ \frac{2}{|B'|} \sum_{t=1}^{n(r)} \min(R_B(r + 1 - t, \theta), R_B(r + t, \theta)), & \text{если } 2r \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Наконец, для третьей проверки необходимо сравнить значения $R_B(p, \theta - \alpha)$ и $R_B(q, \theta + \alpha)$, для которых сумма p и q фиксирована. Так как в случае бинарных изображений преобразование Радона $R_B(r, \theta)$ вычисляется для целых значений r , показатели для нецелых значений суммы получим с помощью линейной интерполяции:

$$\hat{C}_B(r, \theta, \alpha) \leq \frac{1}{|B|} (\lambda S_B(\lfloor 2r \cos \alpha \rfloor, \theta, \alpha) + (1 - \lambda) S_B(\lceil 2r \cos \alpha \rceil, \theta, \alpha)),$$

$$S_B(d, \theta, \alpha) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \min(R_B(t, \theta - \alpha), R_B(d - t, \theta + \alpha)), \quad \lambda = 2r \cos \alpha - \lfloor 2r \cos \alpha \rfloor.$$

Примечательно, что при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ проверка сводится к сравнению сумм по строкам с суммами по столбцам для изображения B_1 , полученного из B поворотом на $-\theta + \alpha$.

Если проверки на основе верхних оценок не привели к исключению потенциальной оси симметрии, проводится явное наложение фрагментов исходного и отражённого изображений. Обозначим B'' отражение по горизонтали изображения B' с тем же числом строк и столбцов, $B'[j_1, j_2]$ будет обозначать соответствующий фрагмент изображения, состоящий из столбцов с j_1 по j_2 включительно, а « \circ » — операцию поэлементного умножения. Заметим, что столбцу j изображения B' соответствует столбец $w + 1 - j$ изображения B'' . В результате имеем:

$$C_B(r, \theta) = \begin{cases} \frac{R_B(r, \theta)}{|B'|} + \frac{2}{|B'|} |B'[r + x_0 - n(r), r + x_0 - 1] \circ B''[w + 1 - r - x_0 - n(r), w - r - x_0]|, & \text{если } 2r \text{ чётное;} \\ \frac{2}{|B'|} |B'[r + x_0 + \frac{1}{2} - n(r), r + x_0 - \frac{1}{2}] \circ B''[w - r - x_0 - n(r) + \frac{3}{2}, w - r - x_0 + \frac{1}{2}]|, & \text{если } 2r \text{ нечётное.} \end{cases}$$

5. Поиск начального приближения оси симметрии

Хорошее начальное приближение оси симметрии позволяет сильно сократить перебор за счёт отбрасывания большинства возможных осей без точного вычисления меры Жаккара, путём проверки лишь её верхних оценок. Мы ограничимся рассмотрением осей, проходящих через центр масс фигуры (\bar{x}, \bar{y}) , так как через него проходит ось в случае идеальной симметрии. Напомним, что при отсутствии сдвига проверка оси симметрии $x \cos \theta + y \sin \theta = r$ эквивалентна проверке оси Y после разложения по базису $\{\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta), \mathbf{v} = (-\sin \theta, \cos \theta)\}$, то есть переходу к новой системе координат:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases}$$

Очевидно, что после этого перехода центральный момент μ'_{11} симметричной фигуры равен нулю, но

$$\mu'_{11} = -\mu_{20} \cos \theta \sin \theta + \mu_{11} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \mu_{02} \cos \theta \sin \theta = \mu_{11} \cos 2\theta + \frac{1}{2} (\mu_{02} - \mu_{20}) \sin 2\theta.$$

Следовательно, $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\mu_{11}}{\mu_{20} - \mu_{02}}\right)$, или $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\mu_{11}}{\mu_{20} - \mu_{02}}\right) + \frac{\pi}{2}$, но это означает, что базисные векторы совпадают с векторами главных компонент фигуры. Можно также считать, что θ получены как решение задачи оптимизации:

$$(\mu'_{11})^2 = \left(\mu_{11} \cos 2\theta + \frac{1}{2} (\mu_{02} - \mu_{20}) \sin 2\theta\right)^2 \rightarrow \min_{\theta}.$$

Общий ход алгоритма имеет вид:

1. Найти начальное приближение (r^*, θ^*) и считать его текущим лучшим результатом.
2. Найти все (r, θ) , для которых $\bar{C}_B(r, \theta) > C_B(r^*, \theta^*)$, а затем $\tilde{C}_B(r, \theta) > C_B(r^*, \theta^*)$ и $\hat{C}_B^{(k)}(r, \theta) > C_B(r^*, \theta^*)$, и упорядочить их по убыванию $\min(\tilde{C}_B(r, \theta), \hat{C}_B^{(k)}(r, \theta))$.
3. Пока $\min(\tilde{C}_B(r, \theta), \hat{C}_B^{(k)}(r, \theta)) > C_B(r^*, \theta^*)$, вычислять $C_B(r, \theta)$ и обновлять (r^*, θ^*) при необходимости.

6. Эксперименты

Алгоритм был реализован на языке C++ в среде Visual Studio 2019 с использованием библиотеки OpenCV версии 4.5.5. Эксперименты проводились на ноутбуке с процессором Intel® Core™ i7-9750H и видеокартой NVIDIA GeForce GTX 1660 Ti.

Чтобы продемонстрировать полезность проверки $\hat{C}_B^{(k)}(r, \theta)$, было измерено время работы и число линий, для которых в явном виде вычислялась мера Жаккара, на наборе изображений MPEG7, доступном по адресу <https://dabi.temple.edu/external/shape/MPEG7/dataset.html>. Набор содержит изображения 70 классов, для каждого из которых было случайным образом выбрано по одному образцу. Приведённые на рисунке 5 графики показывают, что для достижения существенного ускорения достаточно рассмотреть единственный угол, а наибольшее ускорение

достигается при двух углах. При дальнейшем дроблении новые проверки во многом повторяют предыдущие и не дают полезного эффекта. При этом число линий, для которых вычисляется мера Жаккара, снижается систематически, хотя по построению улучшение для числа углов k_2 относительно k_1 гарантировано, только если $(k_2 + 1) : (k_1 + 1)$.



Рисунок 5 – Определение числа углов для дополнительной проверки. (а) Используемые изображения из набора MPEG7; (б) зависимость среднего времени выполнения и числа рассмотренных линий от числа углов в проверке (значения нормированы)

Результаты экспериментов, приведённые в таблице 1¹, показывают, что при 360 углах разбиения, то есть шаге в полградуса, предложенный алгоритм оказывается стабильно быстрее альтернативы и, если и уступает результату перебора по мере, отклонение не превышает долей процента. Такую величину с уверенностью можно объяснить погрешностью дискретизации, поскольку опыт показывает [21], что разница в оптимальной мере между исходным и повернутым изображениями бывает значительно больше, а также тем, что предложенный алгоритм и алгоритм перебора рассматривают разные множества возможных осей симметрии. Отметим, что принцип работы нашего алгоритма заключается в разложении отражения на несколько элементарных преобразований, что может приводить к незначительному накоплению ошибок дискретизации. При этом разбиения на 180 углов в ряде случаев бывает недостаточно, чтобы «попасть» в оптимальную ось, а разбиение на 720 углов редко приводит к уточнению меры и порой увеличивает временные затраты настолько, что делает алгоритм медленнее альтернативы. Примечательно, что при подразбиении углов значение меры не может уменьшиться, при этом характер изменения временных затрат с ростом числа углов близок к линейному. Отметим, что процедура поиска эталонной оси полным перебором пикселей контура использовалась, как описано в [17], и не предполагает рассмотрения осей, проходящих между пикселями. В связи с этим мера симметрии, подсчитанная предложенным в настоящей работе методом, может превосходить меру Жаккара, заявленную как полный перебор.

Для подтверждения корректности результатов алгоритма («алгоритм Ломова») и оценки его скорости проводилось сравнение с алгоритмом Федотовой [18], уточняющим ось, найденную сравнением подцепочек скелетных примитивов, а также методом полного перебора осей, проходящих через все пары точек 8-связной границы фигуры на изображении. Использовался набор изображений FLAVIA [20], содержащий 1907 изображений растений 32 видов. Для каждого вида снова случайным образом было выбрано одно изображение.

Также предложенный метод сравнивался с методом Нгуена [15], который использует другую меру симметрии — коэффициент корреляции между проекцией фигуры на прямую и её отражением:

$$H_A(r, \theta) = \text{corr}(\{R_A(t, \theta)\}_t, \{R_A(r - t, \theta)\}_t).$$

Отметим, что алгоритм не предназначен для поиска глобального оптимума этой величины, так как содержит жадный шаг при определении угла. В результате с точки зрения альтернативной меры предложенный нами алгоритм во множестве случаев превосходит алгоритм Нгуена: на

¹ Разметка таблицы 1. Для предложенного алгоритма (Ломов) ячейки закрашены, если показатели лучше алгоритма Федотовой, выделены жирным — если лучше перебора. Цвет ячеек алгоритма Федотовой и перебора зависит того, при каком количестве углов новый алгоритм работает лучше альтернатив.

полном наборе FLAVIA доля таких случаев составляет более 50%, что показывает рисунок ба. При этом с точки зрения меры Жаккара алгоритм Нгуена на этом наборе ни разу не определил ось, превосходящую найденную нашим методом (рисунок бб).

Таблица 1 – Эксперименты с набором изображений «Flavia»

Изображение	Мера Жаккара, %					Время, мс				Изображение	Мера Жаккара, %					Время, мс			
	Ломов (180)	Ломов (360)	Ломов (720)	Федотова	Перевор	Ломов (180)	Ломов (360)	Ломов (720)	Федотова		Ломов (180)	Ломов (360)	Ломов (720)	Федотова	Перевор	Ломов (180)	Ломов (360)	Ломов (720)	Федотова
	87,862	88,236	88,392	88,424	88,424	64,772	121,424	236,767	363,751		71,475	71,475	71,623	52,129	65,328	85,954	164,502	319,063	534,792
	96,537	96,537	96,572	96,534	96,576	77,868	155,400	289,974	381,716		88,705	88,846	88,846	88,859	88,859	97,320	177,444	453,757	650,268
	93,166	93,166	93,321	82,707	93,391	58,784	118,045	227,539	152,039		95,537	95,537	95,537	95,546	95,546	69,421	123,743	277,499	232,264
	95,618	95,618	95,618	95,616	95,616	56,952	113,303	218,380	205,024		92,836	92,836	93,217	93,231	93,258	75,434	144,830	264,155	369,942
	97,002	97,035	97,129	97,127	97,127	49,442	91,234	175,407	126,463		92,369	92,369	92,369	79,522	92,208	61,123	108,167	226,317	377,942
	85,280	85,280	85,333	85,296	85,296	85,782	168,471	331,217	182,028		93,477	93,477	93,477	93,480	93,480	76,225	146,677	273,938	326,272
	85,444	85,444	85,476	85,383	85,477	63,289	111,076	220,441	249,299		95,209	95,209	95,209	95,188	95,188	81,533	151,579	326,854	366,961
	93,273	93,346	93,361	93,353	93,353	79,814	153,409	275,102	231,883		80,306	80,711	80,711	71,336	80,712	78,569	154,979	307,762	421,520
	88,122	88,214	88,214	88,210	88,210	64,355	107,597	207,455	179,898		92,811	93,336	93,336	93,361	93,361	77,720	134,385	285,628	373,326
	86,895	86,895	86,895	86,892	86,892	55,020	99,548	202,993	155,014		93,656	93,720	93,720	76,420	93,702	63,528	133,289	235,216	348,354
	93,863	93,863	93,878	93,883	93,883	61,532	114,640	228,819	288,942		92,536	92,460	92,578	92,581	92,581	74,184	131,587	265,967	266,538
	94,957	95,163	95,163	95,177	95,177	60,832	123,633	228,422	227,145		87,594	87,678	87,678	85,545	87,688	84,345	168,695	338,682	300,948
	95,564	95,688	95,688	95,677	95,687	89,724	171,796	317,813	465,024		95,598	95,605	95,605	95,604	95,604	74,927	153,843	291,548	315,619
	93,748	93,748	93,748	93,751	93,751	63,031	127,179	244,202	237,136		92,291	92,291	92,319	92,306	92,311	78,858	149,243	305,746	261,985
	94,263	94,263	94,382	94,227	94,352	85,615	147,041	304,537	383,058		93,083	93,102	93,157	93,155	93,155	78,757	145,142	258,429	248,061
	90,876	90,876	90,913	90,930	90,930	70,922	145,459	260,639	300,643		88,000	88,000	88,000	88,002	88,002	79,066	139,688	301,282	351,093

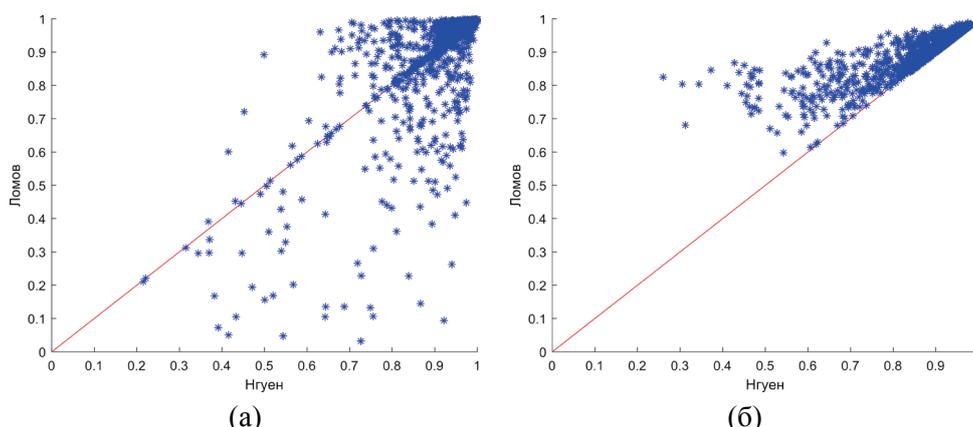


Рисунок 6 – Сравнение предложенного метода с методом Нгуена на наборе FLAVIA. (а) Коэффициент корреляции найденной оси; (б) её мера Жаккара. Каждая точка соответствует изображению

Кроме того, в силу различия критериев, на которые опираются методы, значительный интерес представляет не только количественный, но и качественный анализ. На рисунке 7

показаны оптимальные оси, найденные нашим методом и методом Нгуена, в левой половине расположены изображения с наибольшим перевесом метода Нгуена по коэффициенту корреляции, в правой — с наибольшим перевесом нашего метода по мере Жаккара. Иллюстрации показывают, что для нашего метода зачастую более «выгодным» оказывается провести ось симметрии поперёк, а не вдоль листа растения (рисунок 7 д, е), хотя это не всегда согласуется с интуитивным представлением о симметрии. Просчёты метода Нгуена (рисунок 7 в, г) гораздо более критичны, так как вызваны плохим совпадением фигуры с отражением из-за сведения задачи исключительно к анализу проекций при игнорировании информации о распределении точек фигуры вдоль оси симметрии.

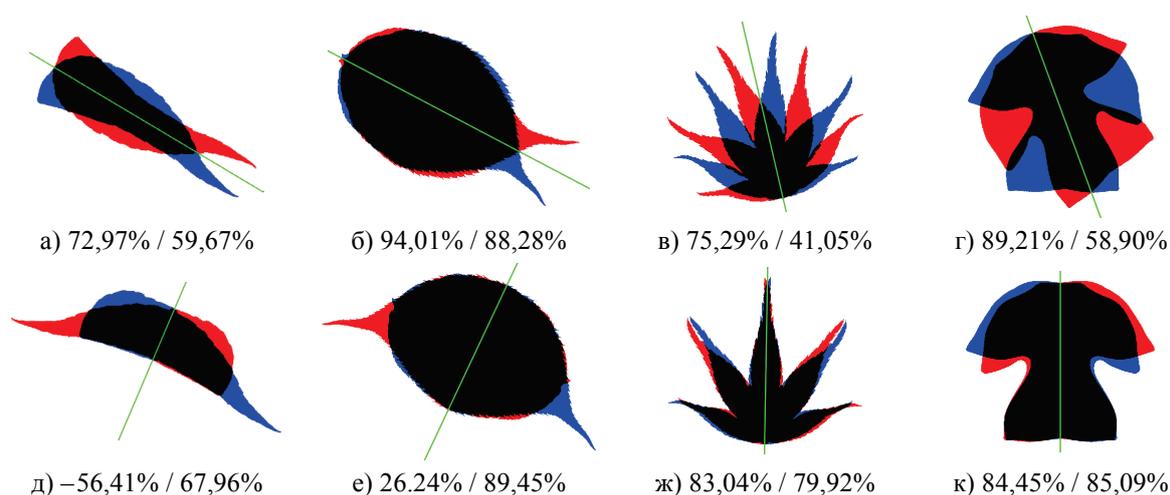


Рисунок 7 – Оптимальные оси, найденные методами Нгуена (верхний ряд) и Ломова (нижний ряд). До черты указан коэффициент корреляции, после — мера Жаккара

7. Заключение

Для фигур, заданных аналитически, возможны формальные математические выкладки, доказывающие их симметричность и определяющие параметры их симметрии. На практике в реальных задачах компьютерного зрения все фигуры, даже столь редко возникающие идеально симметричные, подвергаются оптическим преобразованиям и дискретизации. Восстановление параметров симметрии оказывается весьма сложной оптимизационной задачей из-за широкого пространства перебора и дороговизны вычисления меры симметрии для конкретного набора параметров. Разработанные ранее алгоритмы поиска оптимальной оси симметрии во многом опирались на предположения и эвристики, хотя и имеющие объективные геометрические основания. В данной работе предложены методы сокращения пространства перебора, базирующиеся на простых, но строгих геометрических соображениях, использующих преобразование Радона, а все вычисления меры сводятся к вычислительно эффективному наложению с изображениями, отражёнными относительно вертикальных осей. Несмотря на то что предложенные методы предназначены для работы с бинарными изображениями, они имеют формальные математические основания и гарантированно не приводят к потере оптимального для заданной сетки значения параметров. Предложенные методы при достаточно мелкой сетке параметров превосходят по скорости альтернативные алгоритмы и находят оптимальное значение параметров в пределах погрешности дискретизации бинарных изображений при аффинных преобразованиях.

В качестве направления будущих исследований можно отметить дальнейшее сокращение пространства перебора за счёт объективных математических критериев — например, путём вывода констант Липшица для меры Жаккара и постановку задачи восстановления параметров симметрии при преобразованиях фигур более сложных, чем изометрические.

8. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-21-00575.

9. Список источников

- [1] M. C. Corballis, Bilaterally Symmetrical: To Be or Not to Be?, *Symmetry* 12:3 (2020) 326. DOI: 10.3390/sym12030326.
- [2] P. J. Van Otterloo, *A contour-oriented approach to shape analysis*, Prentice Hall International (UK) Ltd., GBR, 1991.
- [3] L. Mestetskiy, A. Zhuravskaya, Method for Assessing the Symmetry of Objects on Digital Binary Images Based on Fourier Descriptor, *ISPRS — International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences XLII-2/W12* (2019) 143–148. DOI: 10.5194/isprs-archives-XLII-2-W12-143-2019.
- [4] S. Sheynin, A. Tuzikov, D. Volgin, Computation of Symmetry Measures for Polygonal Shapes, in: *Proceedings of 8th International Conference “Computer Analysis of Images and Patterns”*, Springer, 1999, pp. 183–190. DOI: 10.1007/3-540-48375-6_23.
- [5] E. M. Arkin, L. P. Chew, D. P. Huttenlocher, K. Kedem, J. S. B. Mitchell, An Efficiently Computable Metric for Comparing Polygonal Shapes, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13:3 (1991) 209–216. DOI: 10.1145/320176.320190.
- [6] X. Yang, N. Adluru, L. J. Latecki, X. Bai, Z. Pizlo, Symmetry of Shapes Via Self-similarity, in: *Proceedings of 4th International Symposium “Advances in Visual Computing” (ISVC)*, Part II, Springer, 2008, pp. 561–570. DOI: 10.1007/978-3-540-89646-3_55.
- [7] L. J. Latecki, R. Lakämper, Convexity Rule for Shape Decomposition Based on Discrete Contour Evolution, *Computer Vision and Image Understanding* 73.3 (1999) 441–454. DOI: 10.1006/cviu.1998.0738.
- [8] H. Ling, D. W. Jacobs, Shape classification using the inner-distance, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 29.2 (2007) 286–299. DOI: 10.1109/TPAMI.2007.41.
- [9] Z. Li, Robust Symmetry Detection for 2D Shapes Based on Electrical Charge Distribution, *Journal of Information and Computational Science* 11 (2014) 2887–2894. DOI: 10.12733/jics20103838.
- [10] E. Li, H. Li, Reflection Invariant and Symmetry Detection, *arXiv preprint, arXiv:1705.10768* (2017). DOI: 10.48550/arXiv.1705.10768.
- [11] R. K. K. Yip, A Hough transform technique for the detection of reflectional symmetry and skew-symmetry, *Pattern Recognition Letters* 21.2 (2000) 117–130. DOI:10.1016/S0167-8655(99)00138-5.
- [12] R. K. K. Yip, A Hough transform technique for the detection of parallel projected rotational symmetry, *Pattern Recognition Letters* 20.10 (1999) 991–1004. DOI:10.1016/S0167-86559900066-5.
- [13] A. Bruckstein, D. Snaked, Skew symmetry detection via invariant signatures, *Pattern Recognition* 31.2 (2008) 181–192. DOI: 10.1016/S0031-3203(97)00018-6.
- [14] T. P. Nguyen, Projection based approach for reflection symmetry detection, in: *Proceeding of IEEE International Conference on Image Processing, ICIP 2019, Taipei, Taiwan, 2019*, pp. 4235–4239. DOI: 10.1109/ICIP.2019.8803575.
- [15] T. P. Nguyen, H. P. Truong, T. T. Nguyen, Y.-G. Kim, Reflection symmetry detection of shapes based on shape signatures, *Pattern Recognition* 128 (2022) 108667. DOI:10.1016/j.patcog.2022.108667.
- [16] L. Mestetskiy, A. Semenov, Binary image skeleton – continuous approach, in: *Proceedings of the Third International Conference on Computer Vision Theory and Applications, VISAPP 2008, INSTICC, 2008*, pp. 251–258.
- [17] O. Kushnir, S. Fedotova, O. Seredin, A. Karkishchenko, Reflection symmetry of shapes based on skeleton primitive chains, in: *Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST 2016)*, *Proceedings, Communications in Computer and Information Science*, vol. 661, Springer, Cham, 2016, pp. 293–304. DOI: 10.1007/978-3-319-52920-2_27.

- [18] O. Kushnir, O. Seredin, S. Fedotova, Algorithms for Adjustment of Symmetry Axis Found for 2D Shapes by the Skeleton Comparison Method, ISPRS — International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences XLII-2/W12 (2019) 129–139. DOI: 10.5194/isprs-archives-XLII-2-W12-129-2019.
- [19] D. Niu, C. Zhang, W. Li, Y. Zhou, A Novel Approach for Detecting Symmetries in Two-dimensional Shapes, Journal of Information & Computational Science 12:10 (2015) 3915–3925. DOI: 10.12733/jics20106437.
- [20] S. G. Wu, F. S. Bao, E. Y. Xu, Y. X. Wang, Y. F. Chang, Q. L. Xiang, A leaf recognition algorithm for plant classification using probabilistic neural network, in: Proceedings of the 2007 IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology, 2007, pp. 11–16. DOI: 10.1109/ISSPIT.2007.4458016.
- [21] O. Seredin, D. Liakhov, O. Kushnir, N. Lomov, Jaccard Index-Based Detection of Order 2 Rotational Quasi-Symmetry Focus for Binary Images, Pattern Recognition and Image Analysis 32.3 (2022) 672–681. DOI: 10.1134/S1054661822030403.