

Визуализация применения разрывного метода частиц без учета их формы к задаче обтекания сверхзвуковым потоком клина

С.В. Богомолов¹, А.Е. Кувшинников²

¹ Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д.1, стр. 52, Москва, 119991 ГСП-1, Россия

² ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл., д.4, Москва, 125047, Россия

Аннотация

Исследуется модификация разрывного метода частиц без учёта их формы для двумерных задач газовой динамики. В предыдущей версии метода форма частиц обуславливала их взаимодействие, что определяло качество итогового результата. Чтобы избавиться от постоянной привязанности к форме и размерам частиц, введён другой третий инвариант, наряду с высотами частиц (решением дифференциальной задачи) и их положениями в пространстве, а именно, площадь трапеции, основаниями которой являются высоты частиц, а отрезок, соединяющий их центры, — боковой стороной. Этот инвариант можно интерпретировать как след сохранения массы в пространстве между двумя частицами, массы которых тоже не меняются (точная консервативность — основополагающая черта методов частиц). Производится сравнение численных решений методом частиц и численных решений, полученных с помощью открытого программного комплекса OpenFOAM, с аналитическим решением в норме L_2 на примере задачи обтекания сверхзвуковым потоком клина, в результате чего образуется косой скачок уплотнения. Варьируется скорость набегающего потока и угол падения потока. Представленная визуализация результатов даёт ясную картину особенностей метода частиц для задач, решение которых обладает большими градиентами. Данная работа является частью исследований по сравнительной верификации численных методов в пространстве определяющих параметров.

Ключевые слова

Разрывный метод частиц, вычислительная газовая динамика, косой скачок уплотнения, обобщенный вычислительный эксперимент.

Visualization of the Application of the Discontinuous Shapeless Particle Method to the Problem of a Supersonic Flow Around a Wedge

S.V. Bogomolov¹, A.E. Kuvshinnikov²

¹ Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, d. 1, str. 52, Moscow, 119991 GSP-1, Russia

² Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Miusskaya sq., d. 4, Moscow, 125047, Russia

Abstract

A modification of the discontinuous shapeless particle method for two-dimensional problems of gas dynamics is studied. In the previous version of the method, the shape of the particles conditioned their interaction, which determined the quality of the final result. In order to get rid of the constant attachment to the shape and size of particles, along with the heights of particles (solution of the differential problem) and their positions in space, another third invariant is introduced. Namely, the area of the trapezium, the bases of which are the heights of the particles, and the segment connecting

ГрафиКон 2022: 32-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению, 19-22 сентября 2022 г., Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина, Рязань, Россия

EMAIL: bogomo@cs.msu.su (С.В. Богомолов); kuvsh90@yandex.ru (А.Е. Кувшинников)

ORCID: 0000-0002-5414-6019 (С.В. Богомолов); 0000-0003-1667-6307 (А.Е. Кувшинников)



© 2022 Copyright for this paper by its authors.
Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

their centers is the lateral side. This invariant can be interpreted as a trace of the conservation of mass in the space between two particles whose masses also do not change (exact conservatism is a fundamental feature of particle methods). Numerical solutions obtained with the particle method and numerical solutions obtained with the OpenFOAM software are compared with the analytical solution in the L_2 norm, using the example of the problem of a supersonic flow around a wedge, resulting in the formation of an oblique shock wave. The presented visualization of the results gives a clear picture of the features of the discontinuous particle method for problems whose solution has large gradients. This work is part of the research on the comparative verification of numerical methods in the space of defining parameters.

Keywords

Discontinuous particle method, computational fluid dynamics, oblique shock, generalized computational experiment.

1. Введение

Сравнительная верификация численных методов в настоящее время является все более востребованной в науке и технике. Как правило, сравнительная верификация проводится на классах задач, имеющих референтное решение – точное решение, численное решение, признаваемое эталонным или экспериментальные данные. Исследования, посвященные сравнительной верификации численных методов, реализуемых не только для одной отдельно взятой задачи, но и для класса задач, заданного в области пространства определяющих параметров, представлены в работах [1–4]. Данная работа является частью исследований по сравнительной верификации численных методов в пространстве определяющих параметров.

Сегодня методы численного моделирования находят всё более широкое применение как дополнение к эксперименту и как замещающие эксперимент методы исследования в различных научных областях [5].

При решении эволюционных задач широко используются три класса численных методов моделирования: конечно-разностные методы, методы конечных элементов и методы частиц.

Методы частиц активно используются для моделирования задач газовой динамики. Модель непрерывной среды заменяется дискретной моделью — совокупностью частиц. Каждая частица имеет набор атрибутов, таких как масса, скорость, положение в пространстве. Состояние физической системы определяется набором атрибутов конечного числа частиц, а эволюция системы определяется законами взаимодействия частиц.

В научной литературе выделяют три основных типа методов частиц [6]: частица-частица (PP), частица-сетка (PM) и частица-частица-частица-сетка (P³M).

Методы PP используют лагранжев подход, в котором частицы движутся со средой. Методы PM используют эйлера-лагранжев подход. Расчётная область разбивается неподвижной сеткой (подход Эйлера), но также рассматриваются и частицы (подход Лагранжа), которые движутся через эйлерову сетку. Частицы служат для определения параметров жидкости (массы, энергии, скорости), а эйлерова сетка используется для определения параметров поля (давления, плотности, температуры).

В методе PP сила, действующая на каждую отдельную частицу, вычисляется путём суммирования сил со стороны все других частиц, в модели PM сила является величиной поля и аппроксимируется на сетке. Модель P³M является гибридом PP и PM, в ней для близлежащих частиц (до некоторого заданного расстояния) сила определяется как в модели PP, а в более удалённых — как в модели PM.

В методах PP состояние физической системы описывается набором положений и скоростей частиц. При переходе на новый временной слой эти величины пересчитываются, используя силы взаимодействия и уравнения движения. Такие методы являются вычислительно затратными, относительно PM и P³M.

В методах PM полевые величины, которые заполняют всё пространство физической системы, приближённо представляются значениями в регулярно расположенных узлах сетки. В результате сила вычисляется экономнее и быстрее, но гораздо менее точно, чем при использовании метода PP.

К первому типу относятся метод сглаженных частиц (SPH) [7], метод конечно-элементных частиц (PFEM) [8] и разрывный метод частиц [9]. Ко второму — метод частиц-в-ячейках (PIC) [10], метод крупных частиц [11].

Как было показано в статьях [9, 12], разрывный метод частиц позволяет с высокой точностью вычислять разрывы, что является крайне важным для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа.

2. Основы разрывного метода частиц

Пусть существует N материальных точек, находящихся в начальный момент времени в координатах x_i^0 и движущихся со скоростями $v_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, N$). Данная словесная формулировка соответствует задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = v(x_i(t), t), \\ x_i(0) = x_i^0, i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

В статье [8] показан переход от (1) к уравнению переноса в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)u(x, t)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (2)$$

То есть, если координаты точек изменяются в соответствии с системой уравнений (1), то плотность $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи Коши для уравнения переноса (2).

Опишем модификацию разрывного метода с новым вариантом коррекции плотности, ранее представленную в [13]. Выбранные для коррекции частицы будем называть взаимодействующими, а процесс коррекции — взаимодействием. Введём равномерную сетку по времени с шагом τ . Рассматриваем систему как набор N макрочастиц. Для описания частиц введём следующие обозначения: x_i^k — координата центра i -й частицы в k -й момент времени, v_i^k — скорость частицы, H_i^k — высота (плотность) частицы. Также у каждой частицы есть неизменяемая во времени масса, что говорит о консервативности метода. Новый алгоритм основан на сохранении массы, находящейся между частицами. Масса, находящаяся между координатами частиц, равна полусумме масс частиц, и, в отсутствие диффузии, она также должна оставаться постоянной. Введём обозначение S_i — масса, находящаяся между $(i-1)$ -ой и i -ой частицами. Массу S_i вычисляем как площадь трапеций:

$$S_i = \frac{H_i + H_{i-1}}{2} (x_i - x_{i-1}). \quad (3)$$

В отсутствие диффузии масса между частицами не изменяется со временем. Запомним значения S_i^0 в начальный момент времени $t = 0$. Проведём процедуру инициализации параметров частиц в начальный момент времени. Пусть дана начальная плотность $u_0(x)$. Координаты частиц x_i^0 можно равномерно расположить на расчетной области, где $i = 1, \dots, N$.

$$\begin{aligned} H_i^0 &= u_0(x_i^0), i = 1, \dots, N; \\ S_i^0 &= \frac{1}{2}(H_{i-1}^0 + H_i^0)(x_i^0 - x_{i-1}^0), i = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

Как было показано в [5], координаты частиц при решении уравнения Хопфа должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{1}{2}H_i, i = 1, \dots, N; \\ x_i(0) = x_i^0. \end{cases} \quad (5)$$

Напомним, что алгоритм метода частиц строится как предиктор-корректор. Сначала решаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений явным методом Эйлера:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{2}\tau H_i^k, i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

После сдвига частиц расстояния между ними изменяются, что приводит к изменению площадей трапеции. Поэтому на этапе корректора нужно изменять высоты частиц так, чтобы

масса между частицами оставалась постоянной. Рассмотрим возможные случаи взаимодействия частиц:

1. Частица с большей плотностью наезжает на частицу с меньшей плотностью, что приводит к уменьшению площади трапеции между частицами. В этом случае для сохранения площади трапеции будем увеличивать высоту частицы с меньшей плотностью.
2. Частица с большей плотностью удаляется от частицы с меньшей плотностью, что приводит к увеличению площади трапеции между частицами. В этом случае для сохранения площади трапеции будем уменьшать высоту частицы с большей плотностью.

При использовании указанных правил перестройки частиц и критериев отбора и результате взаимодействия частицы с одним из соседей может поменяться площадь трапеции с другим соседом, для которого уже проведена коррекция, что говорит о погрешности алгоритма. Взаимодействия частиц, возникшие таким образом, не учитываем.

Корректор изменяет высоту i -й ($i = 2, \dots, N$) частицы таким образом, чтобы площадь трапеции между частицами оставалась постоянной:

$$\frac{1}{2}(H_i^{k+1} + H_{i-1}^k)(x_i^{k+1} - x_{i-1}^{k+1}) = S_i^0. \quad (7)$$

Следовательно, высота i -й частицы на новом ($k + 1$) шаге по времени определяется как:

$$H_i^{k+1} = \frac{2S_i^0}{x_i^{k+1} - x_{i-1}^{k+1}} - H_{i-1}^k. \quad (8)$$

3. Метод частиц для уравнений газовой динамики

Уравнения газовой динамики представляют собой выражения общих законов массы, импульса и энергии. Следуя [14, 15] запишем систему уравнений для двумерного случая в переменных Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u\rho}{\partial x} + \frac{\partial v\rho}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial uE}{\partial x} + \frac{\partial vE}{\partial y} = -\frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y} \\ p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) \right) \end{cases} \quad (9)$$

Идеальный газ, $\gamma = 1.4$. ρ , u , v , p , E — плотность, x и y -компоненты скорости, давление и полная энергия.

Алгоритм решения двумерной задачи похож на одномерный случай. Расчетная область делится на конечное число областей, служащих основаниями частиц. Высоты частиц находятся из начального условия — функций $\rho(x, y, 0)$, $\rho u(x, y, 0)$, $\rho v(x, y, 0)$, $E(x, y, 0)$ вычисленным в центрах оснований частиц (точках $x_i(0)$, $y_i(0)$).

Сначала, как и в одномерном случае, решаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений для координат 4 типов частиц методом Эйлера.

В двумерном случае партнёр для взаимодействия выбирается с помощью минимизации «прицельного» параметра — угла между вектором относительной скорости и вектором, соединяющим центры частиц (алгоритмически — максимизация косинуса этого угла). Выбрав j -ю частицу для взаимодействия, переходим к одномерной задаче. Далее, с помощью корректора изменяем высоту i -й частицы аналогично (7), чтобы площадь трапеции между частицами оставалась постоянной:

$$\frac{1}{2}(H_i^{k+1} + H_j^k) \sqrt{(x_i^{k+1} - x_j^{k+1})^2 + (y_i^{k+1} - y_j^{k+1})^2} = S_{ij}^0. \quad (10)$$

Отсюда находим предварительную высоту (пока без учета сил давления):

$$H_i^{k+1} = \frac{2S_{ij}^0}{\sqrt{(x_i^{k+1} - x_j^{k+1})^2 + (y_i^{k+1} - y_j^{k+1})^2}} - H_j^k. \tag{11}$$

Следующим этапом алгоритма является учет сил давления. Разница давлений слева и справа от частицы приводит к изменению импульса и энергии частицы, то есть, к увеличению объёма соответствующих частиц. Аналогично [8], приходим к расчетным формулам:

$$\begin{aligned} V_{\rho u_i}(t_{j+1}) &= V_{\rho u_i}(t_j) + \tau (p_{1i}^-(t_j) - p_{1i}^+(t_j)) \\ V_{\rho v_i}(t_{j+1}) &= V_{\rho v_i}(t_j) + \tau (p_{2i}^-(t_j) - p_{2i}^+(t_j)) \\ V_{E_i}(t_{j+1}) &= V_{E_i}(t_j) + \tau (p_{1i}^-(t_j)u_{1i}^-(t_j) - p_{1i}^+(t_j)u_{1i}^+(t_j)) \\ &\quad + \tau (p_{2i}^-(t_j)v_{2i}^-(t_j) - p_{2i}^+(t_j)v_{2i}^+(t_j)) \end{aligned} \tag{12}$$

Вычисленные на предыдущем шаге значения плотности, импульса, и энергии позволяют определить давление в центре частицы. Для этого необходимо воспользоваться уравнением состояния.

Для определения значений давления и скорости на границе частицы используется схема учёта давления, основанная на «взаимодействии» частиц. Если на шаге по времени на одной из границ частицы происходило взаимодействие (в соответствии с описанными выше для одномерной конфигурации критериями), то значение давления и скорости на этой границе полагались равными давлению и скорости той частицы, которая явилась причиной перестройки. Если же взаимодействия не произошло, то давление на границе полагалось равным давлению в центре частицы.

Тем самым, объём частиц ρu , ρv и E дополнительно увеличивается.

4. Сравнение численных методов

Будем сравнивать разрывный метод частиц (МЧ) с солверами открытого программного пакета OpenFOAM: rhoCentrlFoam (rCF), pisoCentralFoam (pCF), QGDFoam (QGDF) [16]. Для этого всеми методами будем решать классическую двумерную невязкую задачу моделирования косоугольного скачка уплотнения.

Общая схема течения представлена на рисунке 1. На плоскую пластину падает сверхзвуковой поток газа с числом Маха M под углом β . Перед началом пластины возникает косой скачок уплотнения S [15]. Данная задача, рассматривается в рамках системы уравнений Эйлера и имеет точное аналитическое решение [17].

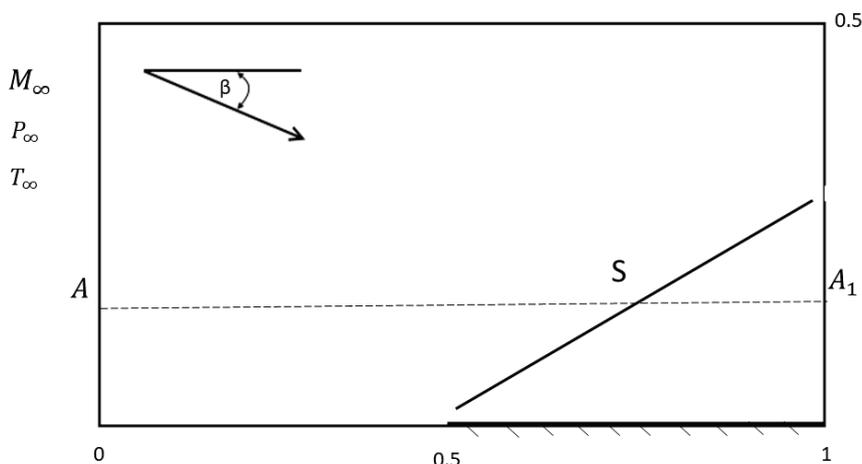


Рисунок 1 – Схема течения

На входной границе задаются параметры невозмущенного набегающего потока при числе Маха M и определенном значении β . На части нижней границы, соответствующей плоской пластине, задается условие непротекания. На выходной границе задаются граничные условия равенства нулю производных газодинамических функций по нормали к границе. На верхней границы для компонент скорости граничные условия задаются аналогично условиям для входной границы. Для остальных газодинамических функций верхней границы условия задаются аналогично условиям для выходной границы.

Рисунок 2 показывает установившееся решение для поля давления. Угол падения набегающего потока $\beta = 10^\circ$, число Маха $M = 2$. Рисунок показывает, что в результате установления получена качественная картина течения, соответствующая аналитическому решению.

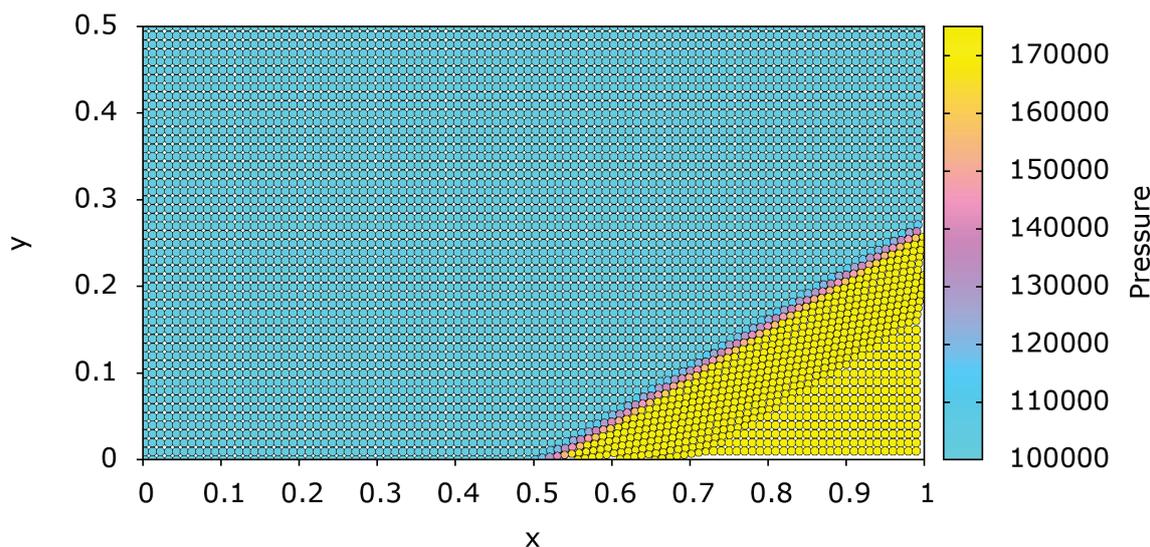


Рисунок 2 – Распределение давления

Внимательно рассмотрим поведение газодинамических функций в окрестности косоугольного скачка. На рисунке 3 представлено сравнение всех решателей в виде распределения давления вдоль горизонтальной линии AA1, пересекающей расчетную область на расстоянии от нижней границы, равном $y = 0.15$ (рисунок 1). Точное решение показано пунктирной линией. Численные методы обозначены различными цветами, приведенными в соответствующей таблице на рисунке.

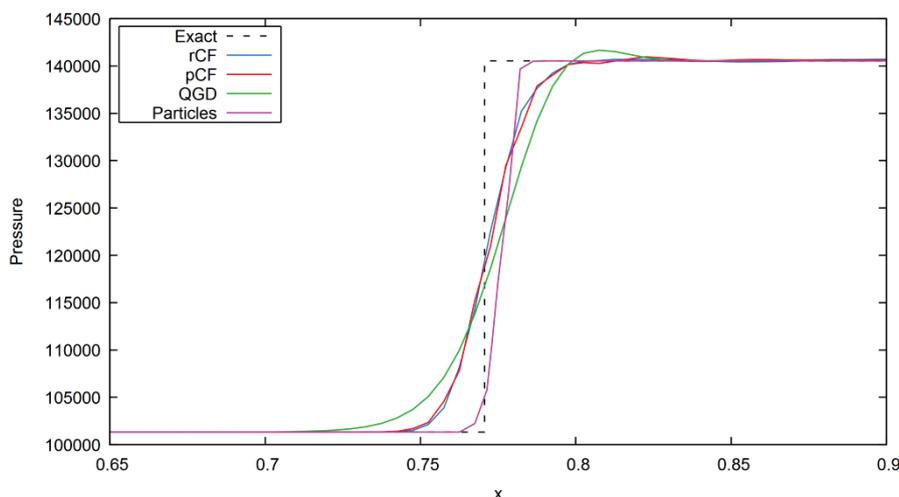


Рисунок 3 – Распределение давления вдоль горизонтальной линии

Представленный рисунок позволяет судить о степени размазывания фронта ударной волны для всех рассмотренных методов. Метод частиц размазывает разрыв на наименьшее число ячеек,

однако фронт ударной волны смещен в сторону области с увеличенной плотностью. Из оставшихся методов лучший результат даёт солвер rhoCentralFoam. Солвер QGDFoam размывает фронт ударной волны, также в верхней части ударной волны заметны возникающие колебания.

Также для оценки отклонения полученных численных результатов от известного точного решения во всей расчетной области используем аналог нормы L_2 :

$$\partial_{L_2} = \sqrt{\sum_m |y_m - y_m^{exact}|^2 S_m} / \sqrt{\sum_m |y_m^{exact}|^2 S_m}, \quad (13)$$

Здесь y_m — давление p частицы m , S_m — площадь частицы. Все расчеты проводились при задании следующих параметров: угол наклона потока β равен 6° , 10° , 15° , 20° , число Маха M_∞ изменяется от 2 до 3 с шагом 0.5. Таким образом, решение реализовывалось в области пространства определяющих параметров. В набегающем потоке задавались следующие газодинамические параметры: давление $P_\infty = 101325$ Па, температура $T_\infty = 300$ К. Совокупность расчетов с варьируемыми параметрами является частью обобщенного вычислительного эксперимента, описанного в работах [1–4], где были представлены результаты сравнительной верификации численных методов, реализованных в солверах открытого программного пакета OpenFOAM. Таблицы 1 – 3 показывают результат вычисления нормы погрешности для давления.

Таблица 1 – Отклонение от точного решения, $U=2M$

Угол	МЧ	rCF	pCF	QGDF
6	0.012982	0.013287	0.013744	0.014393
10	0.019326	0.020839	0.021740	0.021850
15	0.029315	0.029893	0.031227	0.028868
20	0.037731	0.038307	0.040417	0.032726

Таблица 2 – Отклонение от точного решения, $U=2.5M$

Угол	МЧ	rCF	pCF	QGDF
6	0.014283	0.015357	0.016346	0.018502
10	0.023192	0.025023	0.026259	0.029376
15	0.035997	0.036192	0.037452	0.042189
20	0.046724	0.045692	0.047210	0.051230

Таблица 3 – Отклонение от точного решения, $U=3M$

Угол	МЧ	rCF	pCF	QGDF
6	0.017582	0.017717	0.018736	0.022639
10	0.030211	0.029721	0.030812	0.037448
15	0.046274	0.043788	0.045160	0.055111
20	0.057836	0.055751	0.057216	0.068286

На рисунке 4 показаны поверхности ошибок в норме L_2 для всех четырех методов, принимавших участие в сравнении. Расчеты для решателя QGDFoam проводились с выбранным значением $\alpha = 0,1$.

Видно, что поверхности ошибок солверов rhoCentralFoam и pisoCentralFoam расположены очень близко, то есть методы обладают похожими характеристиками. При $\beta = 10^\circ$ и $M = 3$ метод частиц дает меньшую точность, чем солвер rhoCentralFoam. При $\beta = 15^\circ$ метод частиц дает меньшую точность, чем солвер QGDFoam при $M = 2$ и меньшую точность, чем солверы rhoCentralFoam и pisoCentralFoam при $M = 3$. При $\beta = 20^\circ$ метод частиц дает меньшую точность, чем солверы rhoCentralFoam и pisoCentralFoam при $M = 3$. В остальных случаях разрывный метод частиц точнее остальных сравниваемых методов.

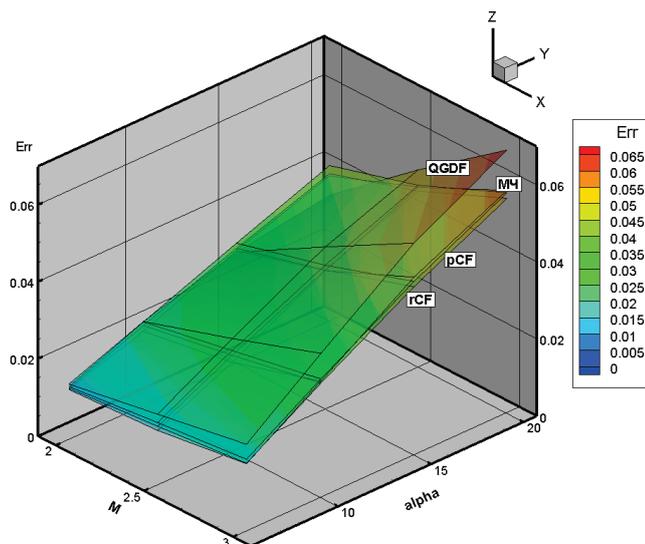


Рисунок 4 – Поверхность ошибок

На рисунке 5 представлен крупный план рисунка 4. Поверхность ошибок солвера QGDFoam скрыта, так как она сильно отличается от других поверхностей, что заметно и на рисунке без увеличения. Как видно, метод частиц для большого числа Маха и угла атаки лишь немногим хуже по точности, чем солвер rhoCentralFoam.

Таким образом, проведенный обобщенный вычислительный эксперимент позволяет утверждать, что разрывный метод частиц подходит для решения задач с сильным градиентом. Не столь высокая точность, как при решении одномерных задач, связана с тем, что хотя метод частиц гораздо меньше размывает фронт ударной волны (что видно из рисунка 2), фронт смещен, что негативно влияет на точность метода. Однако виден большой потенциал использования разрывного метода частиц для решения практических задач математического моделирования.

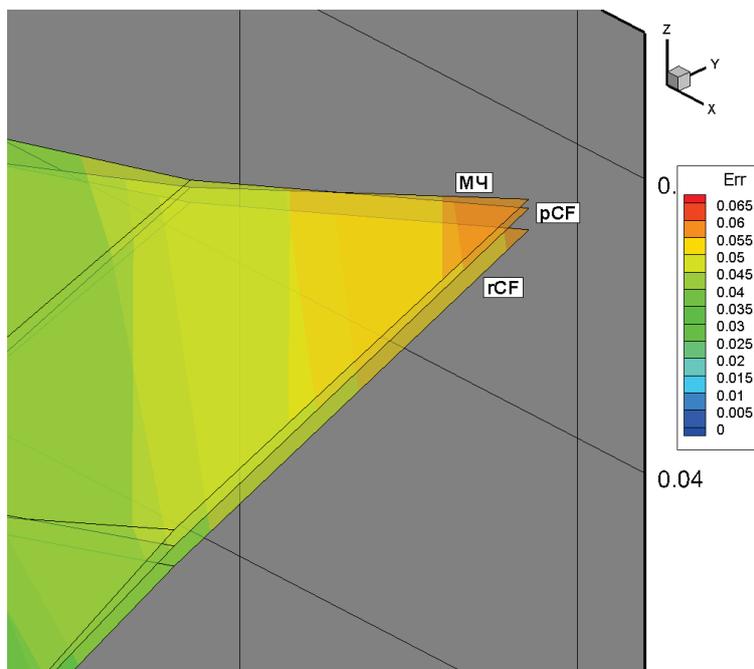


Рисунок 5 – Крупный план рисунка 4

5. Заключение

С помощью разрывного метода частиц без учета формы решена задача газовой динамики об образовании косоугольного скачка уплотнения. Полученные результаты сравнивались с точным решением в норме L_2 . Также результаты были обработаны с помощью средств научной визуализации. Видно, что разрыв размывается на 2-3 ячейки относительно фронта косоугольного скачка, что меньше размывания разрыва солвером rhoCentralFoam на сопоставимых сетках. В совокупности это позволяет утверждать, что разрывной метод частиц решает двумерные задачи газовой динамики, особенно хорошо подходит для решения двумерных задач с возникающими ударными волнами. Полученный результат является весьма интересным с точки зрения реализации сравнительной верификации численных методов на референтном решении с помощью обобщенного вычислительного эксперимента [1–4].

Исторически методы частиц находят применение в задачах нахождения границ раздела сред, газодинамических задачах обтекания тел, и задачах динамики многофазных сред. Разработанный метод должен повысить вычислительную эффективность применения методов частиц в этих традиционных областях, для чего предстоят исследования по сравнительной верификации и оценке эффективности метода.

6. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 20-01-00358-а. Вычисления проведены с помощью гибридного суперкомпьютера K100, установленного в Суперкомпьютерном Центре коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

7. Список источников

- [1] Bondarev A.E. On the Estimation of the Accuracy of Numerical Solutions in CFD Problems // ICCS 2019, Lecture Notes in Computer Science (LNCS). 2019. Т. 11540. С. 325–333. DOI: 10.1007/978-3-030-22750-0_26.
- [2] On Applying of Generalized Computational Experiment to Numerical Methods Verification / Alekseev A., Bondarev A., Galaktionov V., Kuvshinnikov A., Shapiro L. // CEUR Workshop Proceedings, 2020, V. 2744, paper 19, Proceedings of the 30th International Conference on Computer Graphics and Machine Vision (GraphiCon 2020), Saint Petersburg, Russia, September 22–25, 2020.
- [3] Bondarev A.E. Processing of Visual Results of a Generalized Computational Experiment for the Problem of Supersonic Flow Around a Cone at an Angle of Attack // Scientific Visualization. 2021. Т. 13. С. 104–116. DOI: 10.26583/sv.13.2.08.
- [4] Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E. Parametric Study of the Accuracy of OpenFOAM Solvers for the Oblique Shock Wave Problem // IEEE The Proceedings of the 2019 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS-2019). 2019. С. 108–112. DOI: 10.1109/ISPRAS47671.2019.00023.
- [5] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2005. 320 с.
- [6] Р. Хокни, Дж. Иствуд. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 640 с.
- [7] Liu G.R., Liu M. B. Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. World Scientific Publishing, 2003. 472 с. DOI: 10.1142/5340.
- [8] The particle finite element method. An overview. / E. Oñate, S.R. Idelsohn, F. Del Pin, R. Aubry // Int. J. Comput. Methods. 2004. Т. 1, С. 267–307. DOI: 10.1142/S0219876204000204.
- [9] Богомолов С.В., Кувшинников А.Е. Разрывной метод частиц на газодинамических примерах // Матем. моделирование. Т. 31. 2019. С. 63–77. DOI: 10.1134/S0234087919020059.
- [10] Harlow F.H. The Particle-in-Cell Computing Method for Fluid Dynamics // Methods in Computational Physics. Vol. 3, ed. B. Alder, S. Fernbach, M. Rotenberg. New York: Academic Press. 1964. С. 319–343.

- [11] Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука. 1982. 392 с.
- [12] Богомолов С.В., Кузнецов К.В. Метод частиц для системы уравнений газовой динамики // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. С. 93–100.
- [13] Bogomolov. S.V., Kuvshinnikov A.E. A discontinuous shapeless particle method for the quasi-linear transport // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Т. 2099. № 012009. DOI: 10.1088/1742-6596/2099/1/012009.
- [14] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
- [15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2015. 728 с.
- [16] OpenFOAM: [сайт]. URL: <http://www.openfoam.org> (дата обращения 07.05.2022).
- [17] Ames Research Staff. Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow. NASA TR-II35. 1953.