

Математическое моделирование контактного взаимодействия пластинки и балки в поле цветного шума

Т.В. Яковлева^{1,2}, В.Г. Баженов¹, В.А. Крысько²
yan-tan1987@mail.ru | bazhenov@mech.unn.ru | tak@san.ru

¹ Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия;

² Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия

В работе построена математическая модель и визуализация данных контактного взаимодействия пластинки и балки, находящихся под действием внешней поперечной нагрузки и внешнего аддитивного цветного шума. Конструкция находится в стационарном температурном поле, воздействие которого учтено по теории Дюамеля–Неймана путем решения трехмерного и двумерного уравнений теплопроводности методом конечных разностей, теплообмен между пластинкой и балкой не учитывается. Пластинка подчинена модели Кирхгофа, а балка – Эйлера–Бернулли. Математическая модель учитывает физическую нелинейность упруго деформируемого материала. Контактное взаимодействие учтено по теории Б.Я.Кантора. Система дифференциальных уравнений сведена к задаче Коши методом Бубнова–Галеркина в высших приближениях по пространственным переменным. Задача Коши решена методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Для решения физически нелинейной задачи на каждом шаге по времени применена итерационная процедура И.А. Биргера. Визуализация результатов численного эксперимента проведена методами нелинейной динамики и с применением вейвлет-анализа. Приведены численные результаты влияния цветного шума на контактное взаимодействие пластинки и балки. Установлено, что красный аддитивный шум оказывает более существенное влияние на характер колебаний пластинчато-балочной структуры по сравнению с розовым и белым шумом.

Ключевые слова: визуализация данных, пластинка, балка, контактное взаимодействие.

Mathematical Modeling of the Contact Interaction of Plate and Beam in Color Noise Field

T.V. Yakovleva^{1,2}, V.G. Bazhenov¹, V.A. Krysko²
yan-tan1987@mail.ru | bazhenov@mech.unn.ru | tak@san.ru

¹Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia;

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

A mathematical model and data visualization of contact interaction between a plate and a beam under the action of external transverse load and external additive color noise is constructed. The construction is in a stationary temperature field, the effect of which is taken into account according to the theory of Duhamel Neumann by solving the three-dimensional and two-dimensional heat conduction equations by the finite difference method, the heat exchange between the plate and the beam is not taken into account. The plate is subject to the Kirchhoff model, and the beam to the Euler- Bernoulli model. The mathematical model takes into account the physical nonlinearity of the elastically deformable material. Contact interaction is taken into account according to the theory of Kantor. The system of differential equations is reduced to the Cauchy problem by the Bubnov-Galerkin method in higher approximations in spatial variables. The Cauchy problem is solved by the Runge-Kutta method of the fourth order of accuracy. To solve the physically nonlinear problem, at each time step, an Birger iterative procedure was applied. The visualization of the results of a numerical experiment was carried out using the methods of nonlinear dynamics and using wavelet analysis. The numerical results of the effect of color noise on the contact interaction between the plate and the beam are given. It has been established that red additive noise has a more significant effect on the oscillation pattern of the lamellar-beam structure in comparison with pink and white noise.

Keywords: data visualization, plate, beam, contact interaction.

1. Введение

Визуализация задач нелинейной динамики позволяет нам произвести качественную оценку поведения сложных механических конструкций на новом уровне. Составные элементы современной техники подвержены внешнему динамическому воздействию силового и шумового характера. Этот факт обуславливает необходимость комплексного исследования [3] поведения конструкций и определения их предельных состояний. Для описания случайных во времени воздействий внешней среды на конструкцию часто используется модель цветного шума. Теория индуцированных шумом реакций в области физики, химии и биологии представлена в работе В. Хорстхемке и Р. Лефевра [8]. В области механики тонкостенных конструкций такие исследования в достаточной степени не проведены. Цветовые соответствия для различных видов шумового сигнала определяются по графикам спектральной плотности, то есть через распределение мощности сигнала

по частотам. Различают белый, розовый (фликкер-шум), красный (броуновский) шумы. В известной литературе рассматривается влияние шумов на механические распределенные конструкции, но без учета тепловых полей [1-2]. В статьях [10, 12] рассмотрено влияние температурного поля на механические конструкции. Важным вопросом являются методы научной визуализации результатов. Настоящая статья направлена на построение математической модели и визуализации контактного взаимодействия пластинки и балки с учетом влияния физической нелинейности, цветного шума и температурного поля.

2. Математическая модель контактного взаимодействия пластинки и балки

Построена математическая модель контактного взаимодействия механической двухслойной конструкции, состоящей из пластинки и балки (рис. 1), с использованием кинематических моделей для пластинки – Кирхгофа, а для

балки – Эйлера–Бернулли [6]. Механическая конструкция находится в поле внешнего цветного шума и под действием внешней поперечной распределенной знакопеременной нагрузки, приложенной к пластинке.

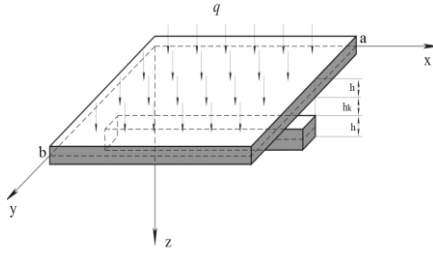


Рис. 1. Двухслойная пластинчато-балочная структура.

При этом конструкция находится в стационарном температурном поле. Связь между напряжениями и деформациями в пластинке ($\beta_1 = 1$) и балке ($\beta_1 = 0$) записана в форме:

$$\varepsilon_i^z = \frac{1}{E}(\sigma_i - \beta_1 \nu \sigma_2) + \alpha_T \theta, \quad (1,2), \quad \varepsilon_{12}^z = \beta_1 2 \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}, \quad (1,2),$$

где E – модуль Юнга и ν – коэффициент Пуассона являются функциями: $E = E(x, \beta_1 y, z, \varepsilon_0, \varepsilon_i, \theta)$, $\nu = \nu(x, \beta_1 y, z, \varepsilon_0, \varepsilon_i, \theta)$; ε_0 – объемная деформация; ε_i – интенсивность деформации; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; $\theta(x, \beta_1 y, z)$ – приращение температуры (для пластинки ($\beta_1 = 1$) и для балки ($\beta_1 = 0$)). На таком представлении базируется метод переменных параметров упругости Биргера И.А. [5]

Уравнения движения элемента пластинки и уравнения движения элемента балки, а также граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского–Гамильтона [11, 7].

Для моделирования контактного взаимодействия применена теория Кантора Б.Я. [9], согласно которой в уравнения движения элементов конструкции необходимо добавить слагаемое $q_k = (-1)^i K_l (w_1 - h_k - w_2) \Psi$, где $i = 1, 2$ – индекс элемента в конструкции (1 – пластинка, 2 – балка), K_l – коэффициент жесткости трансверсального обжатия конструкции в зоне контакта, h_k – зазор между элементами конструкции. Функция Ψ определена формулой $\Psi = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_2)]$ (если $w_1 > h_k + w_2$, то между элементами конструкции есть контакт и $\Psi = 1$; в случае отсутствия контакта $\Psi = 0$). С учетом всех предположений система уравнений пластинчато-балочной конструкции записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [-C_{1x} - C_l] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [-C_{1y} - C_l] - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} C_{1xy}) + q_1 + q_{noise} + q_k - \\ - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0, \\ - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}) - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q_2 - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial w_2}{\partial t} + q_k = 0, \\ \nabla^2(\theta_1) = 0 \quad (\beta_1 = 1), \quad \nabla^2(\theta_2) = 0 \quad (\beta_1 = 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad M_i &= \alpha_2 \int_{-h/2}^{h/2} E_2 \theta_2 z dz, & C_i &= \alpha_1 \int_{-h/2}^{h/2} \theta_z (1 + \nu) dz, \\ C_{1x} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_1 z^2 dz + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_1 z^2 \nu dz, & C_{1xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} E_1 z^2 dz, \\ C_{1y} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_1 z^2 dz + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_1 z^2 \nu dz, & C_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} E_2 z^2 dz, \end{aligned}$$

$e_1 = \varepsilon_{11}^z + \beta_1 \varepsilon_{22}^z$, $\nabla^2(\theta_1)$ – трехмерный ($\beta_1 = 1$) и $\nabla^2(\theta_2)$ – двумерный ($\beta_1 = 0$) операторы Лапласа, ε – коэффициент диссипации. Никаких ограничений на распределение температуры по толщине пластинки и высоте балки не делается. Имеется возможность рассматривать разные диаграммы $\sigma_i(\varepsilon_i, \theta)$, описывающие зависимость напряжения для ряда материалов от деформации и температуры.

К пластинке приложена внешняя распределенная нагрузка вида $q_1 = q_0 \sin \omega_p t$, где q_0 – ее амплитуда и ω_p – частота. Аддитивный цветной шум добавлен в систему (1) в форме случайного слагаемого с постоянной интенсивностью q_{noise} [4]. Цветной шум сгенерирован средствами MathLab. Спектральная плотность мощности избыточных (технических) шумов подчинена степенному закону $S(\omega) = h_\gamma \omega^\gamma$, $-2 \leq \gamma \leq 2$, где h_γ – масштабный коэффициент, определяющий уровень шума. Традиционно с каждым целочисленным значением γ связан определенный цвет: $\gamma = 0$ для белого шума, $\gamma = +2$ для броуновского (красного) шума, $\gamma = +1$ для розового шума.

3. Методы решения

Рассматриваемая механическая конструкция (рис. 1) помещается в температурное поле, интенсивность которого в процессе динамического воздействия остается постоянной. Для оценки распределения температуры в пластинке и балке решается трех- (для пластинки) и двумерное (для балки) уравнения теплопроводности при соответствующих граничных условиях 1-го, 2-го, 3-го рода. Стационарные уравнения теплопроводности для пластинки и балки решаются методом конечных разностей второго и четвертого порядка точности. Система уравнений (1) сводится к задаче Коши методом Бубнова–Галеркина в высших приближениях. Задача Коши решается методом Рунге–Кутты. На каждом временном шаге строится итерационная процедура метода переменных параметров упругости Биргера И.А. Проведенные исследования дают возможность рассматривать конструкцию (рис. 1) как систему с «почти» бесконечным числом степеней свободы.

Дальнейшая визуализация исследования контактного взаимодействия и характера колебаний пластинки и балки проводилась методами нелинейной динамики с построением сигналов, фазовых портретов, спектров мощности Фурье и использованием вейвлет-анализа. Для достоверности визуализации данных в качестве материнского вейвлета были использованы вейвлеты Морле, Гаусса 8 - Гаусса 32 и Хаара.

4. Численный эксперимент

Приведем результаты численного эксперимента для контактного взаимодействия пластинки и балки, шарнирно опертых на краях. Амплитуда внешней поперечной нагрузки $q_0 = 10$, частота внешнего возбуждения $\omega_p = 5$, зазор между пластинкой и балкой $h_k = 0.01$, коэффициент диссипации $\varepsilon = 1$. Изучим влияние цветного шума различной природы и интенсивности на характер колебаний пластинчато-балочной конструкции. При отсутствии шумового поля ($q_{noise} = 0$) характер колебаний пластинки гармонический на частоте внешнего возбуждения $\omega_p = 5$. Балка в этом случае находится в покое, т.к. контактного взаимодействия не происходит. При добавлении к внешней нагрузке белого шума ($\gamma = 0$) интенсивностью $q_{noise} = 1$ колебания пластинки осуществляются на двух основных частотах: $\omega_p = 5$ и $\omega_1 = \omega_p/3 \approx 1.6$. При $q_{noise} = 5$ колебания пластинки осуществляются на трех основных частотах: $\omega_p = 5$, $\omega_1 = \omega_p/3 \approx 1.6$ и $\omega_2 = 2\omega_p/3 \approx 3.3$. При

$q_{noise} = 100$ колебания пластинки становятся хаотическими. Первоначальное контактное взаимодействие пластинки и балки происходит при $q_{noise} = 244$, колебания пластинки носят хаотический характер. В таблице 1 приведены графики совместных колебаний пластинки (w_1) и балки (w_2), 2D вейвлет-спектры Морле $\omega(t)$ и спектры мощности Фурье. При добавлении к внешней нагрузке красного шума ($\gamma = +2$) первоначальное контактное взаимодействие пластинки и балки наступает при $q_{noise} = 7$. В случае добавления розового шума ($\gamma = +1$) контактное взаимодействие пластинки и балки наступает при $q_{noise} = 43$.

Таблица 1.
Влияние шума на контактное взаимодействие пластинки и балки

	без шума $q_{noise} = 0$	белый шум ($\gamma = 0$) $q_{noise} = 244$
Сигнал $w(t)$		
2D вейвлет-спектр Морле $\omega(t)$		
Спектр мощности		

5. Заключение

В работе посредством визуализации научных данных изучено контактное взаимодействие пластинки и балки, находящихся в аддитивном цветном шуме и температурном поле, с учетом физической нелинейности. Проведенный анализ показал, что по сравнению с розовым и белым шумами более существенное влияние на характер колебаний пластинчато-балочной конструкции оказывает красный шум. Научная визуализация результатов проведена на основе построения сигналов, фазовых портретов, спектров мощности Фурье и использования вейвлет-преобразований. Установлено, что вейвлет Морле является наиболее информативным для рассматриваемой задачи, так как он дает лучшую частотную локализацию в каждый момент времени.

6. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-19-10039-П.

7. Литература

- [1] Awrejcewicz J., Krysko A.V., Erofeev N.P., Dobriyan V., Barulina M.A., Krysko V.A. Quantifying chaos by various computational methods. Part 2: Vibrations of the Bernoulli-Euler beam subjected to periodic and colored noise. *Entropy*. 2018. Vol. 20. No 3. 170.
- [2] Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Zakharov V.M., Erofeev N.P., Krylova E.Yu., et al. Chaotic dynamics of flexible beams driven by external white noise. *Mech. Syst. Signal Process.* 2016. No 79. P. 225–253.

[3] Awrejcewicz, J., Krysko, V.A., Yakovleva, T.V., Pavlov, S.P., Krysko-jr., V.A. Nonlinear dynamics of contact interaction of a size-dependent plate supported by a size-dependent beam. *Chaos*. 28, 053102 (2018).

[4] Баженов В.Г., Крылова Е.Ю., Яковлева Т.В. Нелинейные колебания пластины, подкрепленной локальным набором ребер, в условиях аддитивного белого шума. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. № 3. С. 259–266.

[5] Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. *ПММ*. 1951.

[6] Вольмир А.С. *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. М.: Наука, 1972. 432 с.

[7] Hamilton W. *Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*. London, 1835.

[8] Horsthemke W., Lefever R. *Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. 1984. P. 107

[9] Кантор Б.Я. *Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения*. Киев: Наукова думка, 1990. 100 С.

[10] Krysko A.V., Awrejcewicz J., Kutepov I.E., Krysko V.A. Stability of curvilinear Euler-Bernoulli beams in temperature fields. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. No 94. P. 207–215.

[11] Ostrogradsky M. *Memoires de l'Academie imperiale des sciences de St. Petersburg*. 1850, vol. 8, no. 3, pp. 33–48.

[12] Яковлева Т.В., Крысько В.А.-мл. Контактное взаимодействие физически нелинейной трехслойной пластинчато-балочной конструкции в температурном поле. *Деформация и разрушение материалов*. 2017. № 6. С. 9–14.

Об авторах

Яковлева Татьяна Владимировна, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика и моделирование» физико-технического института Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А.; Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, E-mail: yan-tan1987@mail.ru.

Баженов Валентин Георгиевич, д.ф.-м.н. профессор, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. E-mail: bazhenov@mech.unn.ru.

Крысько Вадим Анатольевич, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Математика и моделирование» Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А. E-mail: tak@san.ru.