

T-сплайны: геометрическая гибкость и возможность локального изменения представления поверхности

А.С. Бакенов¹

bakenov_a@auca.kg

¹Американский университет в Центральной Азии, Бишкек, Кыргызская Республика

В этой статье представлено обобщение B-сплайн-поверхностей, выраженных в виде тензорных произведений, называемых T-сплайнами. Общепринятые B-сплайн-поверхности, выраженные в виде тензорных произведений, представляют собой прямоугольную сетку, а границы прямоугольника – это узловые линии. Представление T-сплайнами допускает существование T-узлов. Вместо использования векторов узлов информация об узле выражается путем назначения «узловых интервалов» для каждого ребра (для нечетного случая) или контрольной точки (для четного случая) контрольной сетки. T-сплайны обеспечивают локальное улучшение поверхности гораздо более естественным образом, чем B-сплайны: одна контрольная точка может быть вставлена вдоль любого края управляющей сетки или один сегмент линии может быть вставлен между любыми двумя краями управляющей сетки.

Ключевые слова: T-сплайны, неоднородные рациональные B-сплайны (NURBS).

T-splines: geometrical flexibility and local modification

A.S. Bakenov¹

bakenov_a@auca.kg

¹American University of Central Asia, Bishkek, Kyrgyz Republic

This article introduces a useful generalization of tensor-product B-spline surfaces called T-splines. In conventional tensor-product B-spline surfaces, the domain is a rectangular grid and rectangle boundaries are knot lines. A T-spline domain allows for the existence of T-junctions. Instead of using knot vectors, knot information is expressed by assigning a “knot interval” to each edge (for odd degree) or control point (for even degree) of the control grid. T-splines allow for local refinement in a much more natural manner than do B-splines: a single control point can be inserted along any edge of the control grid, or a single line segment can be inserted between any two edges of the control grid.

Keywords: T-splines, NURBS.

1. Введение

Почти 15 лет прошло с того времени, когда мне посчастливилось поработать у профессора Седерберга над исследованием [1] по решению проблемы соединения нескольких B-сплайн-поверхностей (далее патчей), выраженных в виде тензорного произведения, в одну единую поверхность. Математически строгие решения [2] существовали для выполнения такой операции слияния с использованием вставки узлов, но, к сожалению, это имело побочный эффект, приводивший к тому, что общее количество контрольных точек в объединенном B-сплайне часто было значительно больше, чем общее количество контрольных точек в исходных поверхностях. Данный недостаток показан на рис. 1, что приводит к необходимости обработки огромного количества данных.

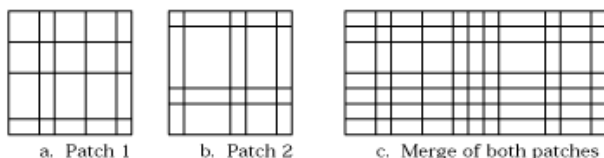


Рис. 1. Слияние двух B-сплайн-поверхностей.

В результате проведенного исследования было предложено обобщение B-сплайн-поверхностей, выраженных в виде тензорных произведений, называемых T-сплайнами.

Топологически контрольная сетка поверхности B-сплайна, выраженного тензорным произведением, должна быть прямоугольной решеткой (рис. 1). Контрольной сетке для T-сплайнов разрешено иметь T-узлы, как показано на

рисунке 2. Это свойство наделяет T-сплайны гораздо большей гибкостью, чем B-сплайны. Это позволяет T-сплайнам решать проблему «взрывной» генерации данных, присущей слиянию B-сплайновых поверхностей.

2. T-сплайны

Данный раздел содержит краткий обзор технологии на основе T-сплайнов, представленных в [3-4]. Контрольная сетка для T-сплайн-поверхности называется T-сеткой. Если T-сетка образует прямоугольную сетку, то T-сплайн вырождается в B-сплайн-поверхность.

Информация об узле для T-сплайнов выражается с помощью узлового интервала, неотрицательного числа, которое указывает разницу между двумя узлами. Каждому ребру в T-сетке присваивается интервал узла. На рисунке 2 показано предварительное изображение части пространства параметров T-сетки, выраженной в параметрическом пространстве $(s; t)$, где d_i и e_i обозначают интервалы узлов. Интервалы узлов должны удовлетворять условию: сумма всех узловых интервалов вдоль одной стороны любой грани должна быть равна сумме интервалов узлов на противоположной стороне. Например, на рис. 2 на грани F_1 $e_3 + e_4 = e_6 + e_7$ и на грани F_2 $d_6 + d_7 = d_9$.

Для определения системы координат сначала надо установить их начало. Например, на рис. 2 обозначим (s_0, t_0) началом координат. Далее можно найти координаты каждого узла сетки. Итак, основываясь на выборе начала координат, имеем $s_0 = t_0 = 0$, $s_1 = d_1$, $s_2 = d_1 + d_2$, $s_3 = d_1 + d_2 + d_3$, $t_1 = e_1$, $t_2 = e_1 + e_2$ и т.д.

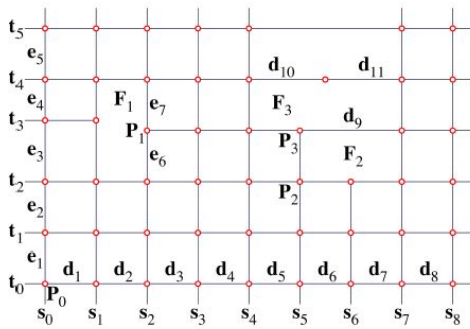


Рис. 2. Контрольная сетка для Т-сплайнов.

Кроме того, каждая контрольная точка имеет узловые координаты. Например, для $P_1 (s_2, t_2 + e_6)$.

Еще одно правило для Т-сетки из [3]: для возможности соединения Т-образного узла одной стороны грани с Т-образным точкой на противоположной стороне грани, нужно, чтобы сумма узловых векторов с обеих сторон была одинаковой. Например, для грани F_1 необходимо выполнение условия: $e_3 = e_6$ и $e_4 = e_7$.

Т-сплайн-поверхность определяется следующим образом:

$$P(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t), w(s, t)) = \sum_{i=1}^n PiBi(s, t), \quad (1)$$

где $P_i(x_i, y_i, z_i)$ – контрольные точки, w_i – их веса соответственно, чьи декартовы координаты определяются $\frac{1}{w_i}(x_i, y_i, z_i)$.

Декартовы координаты точек на плоскости:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i, y_i, z_i) Bi(s, t)}{\sum_{i=1}^n w_i Bi(s, t)}. \quad (2)$$

$$B_i(s, t) = N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s) N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t), \quad (3)$$

где $N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s)$ – это кубическая базовая функция В-сплайна, которая связана с узловым вектором

$$s_i = [s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}] \quad (4)$$

Аналогично, $N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t)$ связана с узловым вектором

$$t_i = [t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}] \quad (5)$$

Уравнение Т-сплайн-поверхности очень похоже на уравнение тензорного произведения для рациональной В-сплайн-поверхности. Разница между Т-сплайн-уравнением и В-сплайн-уравнением в том, как узловые векторы s_i, t_i определяются для каждой стыковочной (blending) функции $B_i(s, t)$.

NURBS-поверхности определяются с помощью набора контрольных точек, лежащих топологически в прямоугольной сетке, как показано на рис. 3 (а). Это означает, что большая часть точек в NURBS являются лишними, так как они не содержат большого количества геометрической информации, а необходимы лишь для удовлетворения топологических ограничений. С другой стороны, Т-сплайны могут иметь только часть точек в каждой строке сети, как показано на рис. 3 (b). Частичный ряд точек заканчивается Т-образным соединением – отсюда и название Т-сплайнов. Для процесса проектирования чем меньше количество точек, тем быстрее моделирование. Более того, для того чтобы сделать уточнение для Т-сплайнов, достаточно лишь сделать вставку одной контрольной точки. В случае с NURBS понадобится вставка точек вдоль всей строки. Следующим ограничением NURBS является то, что в большинстве случаев объект будет состоять из нескольких NURBS-поверхностей и после «склеивания» частей, возможно,

будут присутствовать разрывы. Т-сплайны позволяют конструировать гладкие без разрывов (или их еще называют «водонепроницаемые») поверхности.

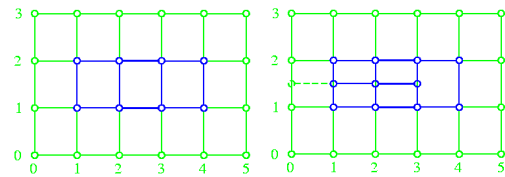


Рис. 3. Полигональная сеть для: а – NURBS, б – Т-сплайн.

Локальное уточнения кривых и поверхностей NURBS осуществляется через узел вставки, в процессе чего изменяется форма кривой или поверхности. Существует несколько алгоритмов для вставки узлов. Алгоритм вставки узла является фундаментальным, его можно использовать как математический инструмент для понимания и анализа В-сплайнов, так и в качестве практического инструмента для управления и построения В-сплайн кривых и поверхностей. Вставка узла хорошо отрабатывает для локального уточнения В-сплайн-кривой: вставка одного узла порождает обновления только нескольких точек в локальном участке. Тем не менее, для В-сплайн-поверхностей, выраженных в виде тензорного произведения, локальное улучшение невозможно, поскольку вставка одного узла в один из узловых векторов поверхности вызывает вставку новых точек в целую строку или столбец.

3. Алгоритм локального улучшения с помощью Т-сплайна

Процесс локального улучшения состоит в том, чтобы произвести вставку одной или нескольких точек в Т-сетку без изменения формы Т-сплайн-поверхности. Данная процедура также может называться локальной вставкой узла, так как контрольные точки для Т-сетки должны влиять на вставку дополнительных узлов при построении стыковочных функций.

Локальный алгоритм состоит из двух этапов: топологического и геометрического. На первом этапе определяется, какие контрольные точки надо будет вставить дополнительно. После того как все необходимые новые контрольные точки определены, вычисляются декартовы координаты и веса для искомой Т-сетки.

Рассмотрим теперь алгоритм топологического этапа. Важным ключом к пониманию решения проблемы является понимание того, как в Т-сплайне тесно связаны между собой стыковочные функции и Т-сетка: каждой контрольной точке соответствует стыковочная функция, и для каждой стыковочной функции по правилу 1 определяется узловой вектор.

Правило 1: определим узловые векторы s_i (4) и t_i (5) для точки P_i . Тогда узловой вектор s_i будет состоять из первых двух узлов, являющиеся общими для луча, выходящего из узла (s_i, t_i) вдоль оси s , и первыми двумя ребрами, с которыми луч пересекается. Аналогично определяются координаты узлового вектора t_i .

Например, на рис. 2 для точки P_1 узловые векторы имеют координаты $s_1 = [s_0, s_1, s_2, s_3, s_4]$ и $t_1 = [t_1, t_2, t_2 + e_6, t_4, t_5]$. Для P_2 : $s_2 = [s_3, s_4, s_5, s_6, s_7]$ и $t_2 = [t_0, t_1, t_2, t_2 + e_6, t_4]$. Для P_3 : $s_3 = [s_3, s_4, s_5, s_8]$ и $t_3 = [t_1, t_2, t_2 + e_6, t_4, t_5]$.

Предположим, что на некоторое время могут существовать стыковочные функции, которые будут нарушать правило 1. Рассмотрим три возможных нарушения, которые могут возникнуть в алгоритме.

- Нарушение 1: в стыковочной функции отсутствует узел, который удовлетворяет правилу 1 для текущей Т-сетки.

- Нарушение 2: стыковочная функция имеет узел, который не удовлетворяет правилу 1 для текущей Т-сетки.
- Нарушение 3: контрольная точка не имеет стыковочной функций, которая с ней связана.

Если нарушений не существует, Т-сплайн построен без нарушений. Если нарушения присутствуют, то алгоритм будет решать их по одному, пока никаких дальнейших нарушений не будет существовать. Топологический этап нашего алгоритма локального улучшения состоит из следующих действий:

1. Вставить все необходимые контрольные точки в Т-сетку.
2. Если стыковочные функции «виновны» в нарушении 1, выполнить необходимые вставки узла для таких стыковочных функций.
3. Если стыковочные функции «виновны» в нарушении 2, добавить соответствующие контрольные точки в Т-сетку.
4. Повторить шаги 2 и 3, пока не будут больше нарушений.

Решение всех случаев нарушения 1 и 2 автоматически решит все случаи нарушения 3.

Проиллюстрируем алгоритм на примере. На рис 4 (a) изображена начальная Т-сетка, в которую мы хотим вставить одну контрольную точку P_2 . Поскольку Т-сетка на рис. 4 (a) верна, то никаких нарушений нет. Но если мы просто вставим P_2 в Т-сетку (рис. 4, b) без изменения стыковочных функций, то сразу получим несколько нарушений. Поскольку P_2 имеет координаты узлов (s_3, t_2) , то четыре стыковочные функции становятся виновными в нарушении 1: с центром в точках (s_1, t_2) , (s_2, t_2) , (s_4, t_2) и (s_5, t_2) . Чтобы устранить эти нарушения, мы должны вставить узел s_3 в каждой из этих функций. Стыковочные функции с центром в точке (s_2, t_2) :

$$N[s_0, s_1, s_2, s_4, s_5](s) N[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4](t)$$

Вставка узла s_3 в вектор s разбивает стыковочную функцию на две функции:

$$c_2 N[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](s) N[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4](t) \text{ (рис. 4, c) и}$$

$$d_2 N[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5](s) N[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4](t) \text{ (рис. 4, d).}$$

Первая из функций удовлетворяет правилу 1. Кроме того, функции с центром в точках (s_1, t_2) , (s_4, t_2) и (s_5, t_2) удовлетворяют правилу 1. Тем не менее узловой вектор t стыковочной функции $d_2 N[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5](s) N[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4](t)$ имеет нарушение 2, поскольку для вектора $t = [t_0, t_1, t_2, t_3, t_4]$ правило 1 не выполняется для узла t_3 . Эта проблема не может быть устранена путем переработки стыковочной функции – следует добавить дополнительную контрольную точку в Т-сетку. Необходима контрольная точка P_3 на рис. 4 (e). Вставка контрольной точки устраняет нарушение 2, но возникает новый случай нарушения 1. Как показано на рис. 4(f) стыковочная функция с центром в (s_2, t_3) имеет узловой вектор s , который не включает в себя узел s_3 , что необходимо для удовлетворения правила 1. Вставка s_3 в узловой вектор решает проблему, и нет дальнейших нарушений правила 1.

Данный алгоритм всегда гарантированно заканчивает свое исполнение. В худшем случае алгоритм будет распространять везде ряды точек, чтобы пересечь всю поверхность. На практике, как правило, алгоритм требует нескольких дополнительных новых точек, кроме тех, которые пользователь хочет вставить. Таким образом, данный алгоритм улучшения имеет два существенных преимущества: алгоритм всегда обрабатывает и минимизирует количество дополнительных узлов для вставки.

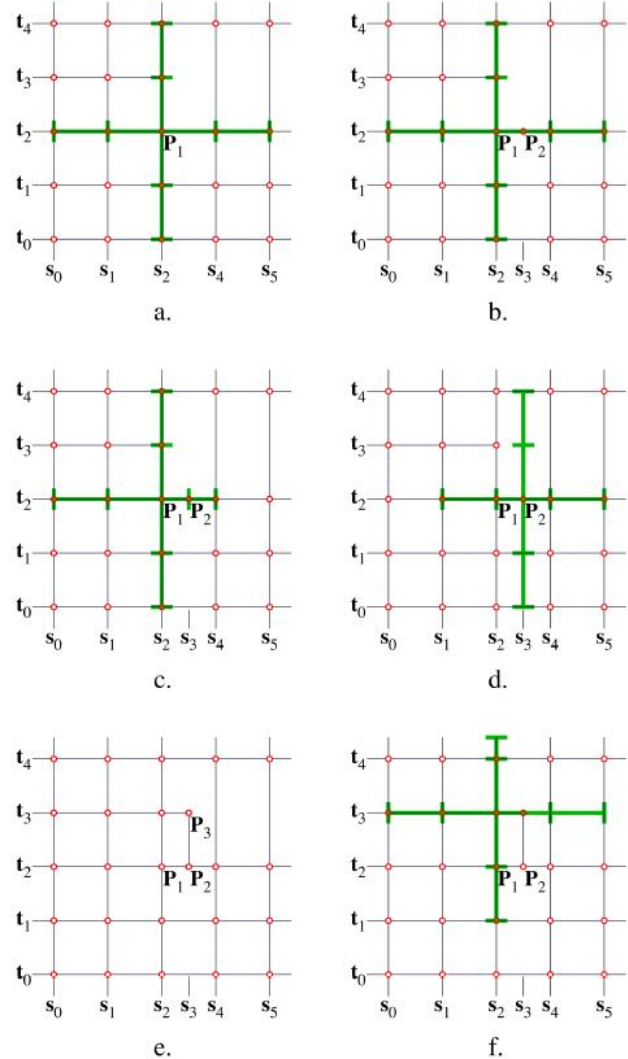


Рис. 4. Пример выполнения алгоритма локального улучшения.

4. Заключение

Т-сплайны представляют собой расширение NURBS-технологии, которое предоставляет возможность локального улучшения поверхности, бесшовного соединения нескольких патчей и решение проблемы обрезанной поверхности. Эти функции очень желательны в контексте дизайна, распространения 3D-печати и в последнее время стали доступны в системах проектирования компании Autodesk (Fusion360) [5].

5. Благодарности

Написание данной статьи после долгого перерыва с момента появления Т-сплайн-технологии стало возможным благодаря консультациям профессора МГУ Местецкого Л.М., участвовавшего по нашему приглашению в защите дипломных проектов студентов-бакалавров АУЦА в мае 2017 года.

6. Примеры фигур, созданных с помощью T-сплайн-технологии

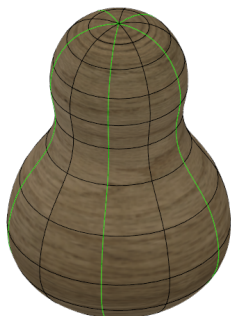


Рис. 5. Заготовка для матрешки, созданная в программе Fusion360 в режиме «Sculpt» («Ваять»), функционирующей на основе T-сплайн-технологии.

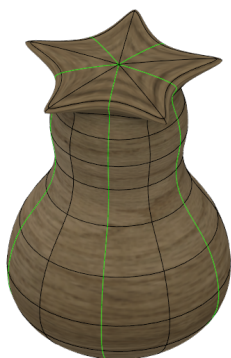


Рис. 6. Пример локального изменения с помощью T-сплайн-технологии.



Рис. 7. Узел, созданный по аналогии гравюры на дереве Маурица Корнелиса Эшера «Узел», 1965 г. [6].



Рис. 8. Тот же узел с показанными гранями T-сплайн-поверхности.

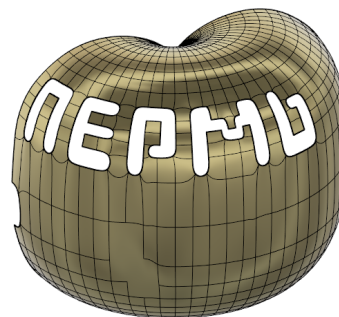


Рис. 9. На поверхности золотого пол-яблока путем удаления граней и вставок новых ребер продемонстрированы возможности T-сплайн-технологии. Получившаяся поверхность с надписью состоит из 1999 ребер и 962 граней.

7. Литература

- [1] Bakenov A. Tensor product B-spline surfaces with T-junctions. Master's thesis, Brigham Young University, Department of Computer Science, 2001.
- [2] Gerald Farin. Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design. Academic Press, Boston, 1988.
- [3] Sederberg T. W., Zheng J., Bakenov A., Nasri A. 2003. T-splines and T-nurcs. ACM Transactions on Graphics 22, 3 (July), 477–484.
- [4] Sederberg T. W., David L. Cardon, G. Thomas Finnigan, Nicholas S. North, Jianmin Zheng, and Tom Lyche. 2004. T-spline Simplification and Local Refinement. ACM Transactions on Graphics 23, 3 (July), 276–283.
- [5] <https://www.autodesk.com/products/fusion-360/>
- [6] <http://mcesher.ru/uspeh.html>

Об авторе

Бакенов Алмаз Сатыбалдиевич, директор Национального центра информационных технологий Кыргызской Республики и руководитель программы разработки программного обеспечения Американского Университета в Центральной Азии. Его e-mail bakenov_a@auca.kg.