

Построение прямолинейного скелета и диаграммы Вороного на основе M-образов функционально-воксельного моделирования*

М.А. Локтев, А.В. Толок

m.loktev@stankin.ru | a.tolok@stankin.ru

Москва, Россия, ФГБОУВО МГТУ «Станкин»

В работе предлагается способ построения прямолинейного скелета для сложных замкнутых контуров описанных с помощью математического аппарата R-функций. Рассматривается принцип построения M-образов и способы заполнения функционального пространства. Проводится сравнительный анализ классического способа построения прямолинейного скелета с предложенным в работе. Предложен метод построения диаграммы Вороного средствами функционально-воксельного моделирования.

Ключевые слова: Функционально-воксельное моделирование, M-образ, R-функция, прямолинейный скелет, диаграмма Вороного.

1. Введение

Рассматриваемый в статье подход построения прямолинейного скелета и диаграммы Вороного является продолжением целого ряда работ, посвященных применению функционально-воксельного моделирования (ФВМ) в решение прикладных задач, таких как задачи поиска пути [1], математического моделирования [2], вычисление интегральных значений [3], оптимизации [4] и т.д. Основой ФВМ является принцип организации данных, сочетающий аналитическую форму описания модели 3D-сцены с воксельным представлением ее локальных геометрических характеристик. Такой подход позволяет получать для исследования дифференциальные и интегральные характеристики в точках функциональной области.

Метод анализа формы плоского объекта на основе построения его геометрического скелета широко применяется в обработке изображений, распознавании образов, геометрическом моделировании и визуализации [5]. Геометрический скелет фигуры связан с такими понятиями как срединная ось и прямолинейный скелет. Срединная ось была предложена в работе Гарри Блума (Harry Blum) [6], как способ эффективного описания геометрической структуры объекта. Построение срединных осей сводится к представлению множества внутренних точек фигуры, каждая из которых имеет, по меньшей мере, две ближайшие граничные точки (рис.1а). Каждая точка срединной оси фигуры является центром вписанного в фигуру круга, т.е. круга, все внутренние точки которого лежат внутри фигуры.

Понятие прямолинейного скелета было предложено в работах [8,9] Освина Айхгольца (Oswin Aichholzer) и Франца Ауренхаммера (Franz Aurenhammer), построение которого происходит в результате параллельного движения всех ребер с постоянной скоростью (рис.1б).

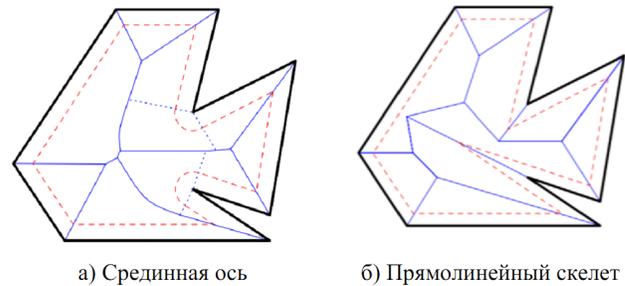


Рис. 1: Геометрические скелеты невыпуклого контура [7]

2. Использование M-образов

Предложенный в работе способ определения прямолинейного скелета, базируется на использовании так называемых M-образов, являющихся основным инструментом ФВМ. Сам по себе M-образ представляет собой модель, отражающую локальную геометрическую характеристику исследуемой поверхности как определенное геометрическое свойство. В работе [10] подробно описан принцип вычисления локальных геометрических характеристик рельефа. Для этого линейно аппроксимируется поверхность выбранной функции w_1 , где каждой точке пространства сцены соответствует уравнение плоскости $A_i x + B_i y + C_i w + D_i = 0$. Повысив размерность нормали к площадке на одно измерение, получим уравнение $A_i x + B_i y + C_i w + D_i t = 0$. В результате имеем четыре локальных геометрических характеристики, т.е. компоненты нормали (A_i, B_i, C_i, D_i) для каждой из точек функциональной области w_1 [1]. Воксельное представление ФВМ-модели предполагает монохромное отображение для каждой локальной характеристики, которую можно представить нормированием и приведением в соответствие значению градации цветовой палитры P . Рассмотрим возможность порождения образа x как результат двухкомпонентного нормирования вектора нормали в плоскости xOy :

Работа опубликована по гранту РФФИ №16-07-20482.

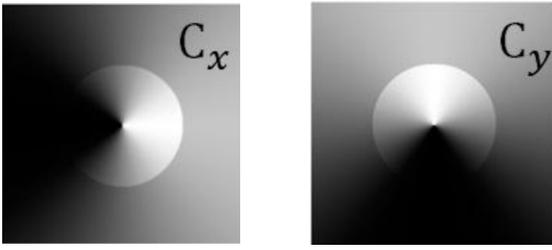


Рис. 2: Порожденные М-образы

$$C_x = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + 1 \right) \cdot P/2 \quad (1)$$

где: P – градация интенсивности тона палитры. На М-образях (рис.2) визуально прослеживается экстремум функции в центральной точке преломления света. Данные образы несут дополнительную специфическую информацию и позволяют решать определенный класс задач.

3. Способы заполнения функционального пространства

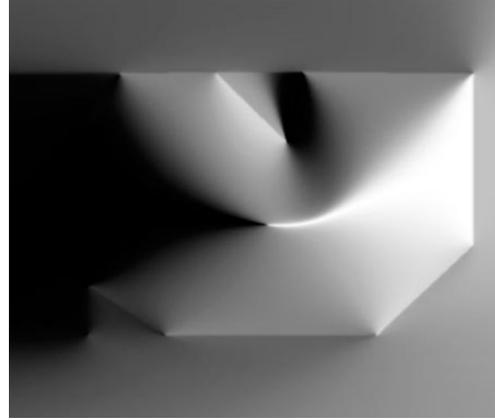
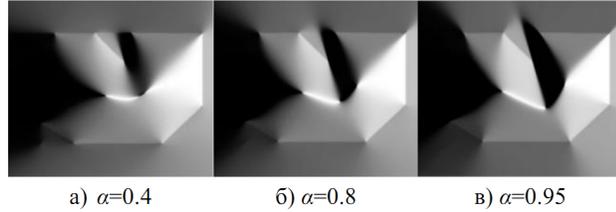
Для аналитического построения замкнутых контуров сложной формы в ФВМ используется математический аппарат R-функций (RFM). Фундаментальные основы этого направления были заложены В.Л Рвачевым в трудах [11], в которых R-функции были выделены, как отдельный класс задач, посвященных геометрии пространства. Теория R-функций позволила решить обратную задачу аналитической геометрии: построение уравнения для заданного геометрического объекта [12]. Это открывает для нас возможность создавать сложные геометрические объекты, с сохранением главного условия: ноль на границе, положительные значения внутри функциональной области, а отрицательные снаружи [10].

Применение RFM позволяет без труда строить и комбинировать сложные функционально-воксельные геометрические модели [13]. Самой первой и наиболее распространенной в геометрическом моделировании функционального пространства является система R-функций, состоящая из трех уравнений:

$$\begin{cases} f_1 \wedge_{\alpha} f_2 = \frac{1}{\alpha+1} (f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2}); \\ f_1 \vee_{\alpha} f_2 = \frac{1}{\alpha+1} (f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2}); \\ \bar{f}_1 = -f_1, \end{cases} \quad (2)$$

где: f_1 и f_2 – функции, определяющие исходные геометрические объекты. В представленной системе R-функций (2) особое место занимает коэффициент $\alpha(f_1, f_2)$, принимающий значения $-1 \leq \alpha(f_1, f_2) \leq 1$ и влияющий на способ заполнения

функционального пространства. При $\alpha = 0$ система R-функций приобретает частный случай и поведение рельефа функции отвечает квадратичному закону (рис. 3).

Рис. 3: Функциональное пространство при $\alpha = 0$ Рис. 4: Изменение поведения коэффициента α

Рассмотрим способы заполнения функционального пространства за счет изменения коэффициента α , для сложного не выпуклого контура. Квадратичный случай (рис. 3) позволяет получить единственный экстремум на положительной области контура. Увеличение коэффициента приводит к появлению новых не дифференцируемых точек на положительной области (рис. 4). Помимо этого, сам способ заполнения функционального пространства начинает стремиться к линейному закону, что характерно видно, когда α приближается к единице (рис. 4в). А в случае $\alpha = 1$ система R-функций (2) приобретает другой частный случай:

$$\begin{cases} f_1 \wedge_1 f_2 = \frac{1}{2} (f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|); \\ f_1 \vee_1 f_2 = \frac{1}{2} (f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|). \end{cases} \quad (3)$$

Заполнение функционального пространства на М-образе, полученном на основе R-операций системы (3), отвечает линейному закону (рис. 5). Данный образ представляет наибольший интерес, поскольку ребра R-функции являются прямолинейным скелетом.

Способ формирования прямолинейного скелета на основе R-функционального описания контура уже был предложен в работах [14-15]. Авторы представ-

ляют способ получения R-функции для замкнутого не выпуклого контура, с помощью набора полупространств, выраженных в неявном виде. Для получения прямолинейного скелета выделяются ребра наибольшей интенсивности на приблизительной функции расстояния, полученной на основе системы уравнений (3). Полученные ребра проецируются на плоскость многоугольника т.е. по сути определяются не дифференцируемые точки R-функции. Полученная по приближенной функции расстояния модель не имеет четко выраженных хребтов и лоцин, поэтому в работах [14-15] применяется конечно-разностная аппроксимация Лапласа для выделения ребер скелета.



Рис. 5: Функциональное пространство при $\alpha = 1$

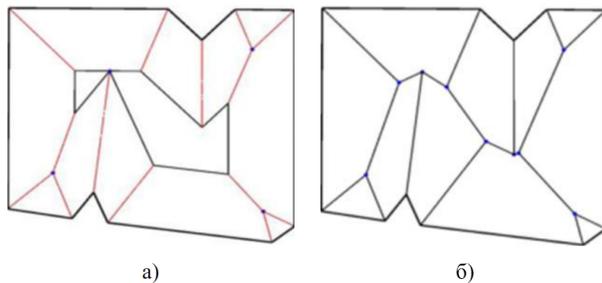


Рис. 6: Построение прямолинейного скелета [16]

4. Прямолинейный скелет на основе M-образа

Один из самых распространенных способов построения прямолинейного скелета основывается на движении всех ребер с постоянной скоростью параллельно самим себе (Рис. 6а). Сжатие вершин многоугольника, приводит к объединению угловых бисекторов, определяющий прямолинейный скелет (Рис. 6б).

Использование ФВМ принципиально отличается от классических способов получения прямолинейного скелета. Графический образ полученный на основе функции расстояния для системы R-функций (Рис.

7а), позволяет визуально выделять линии прямолинейного скелета, аналогично с рассмотренными ранее работами [14-15]. Однако для компьютера определение вершин затруднительно, и как было сказано ранее требует дополнительных численных преобразований. Использование порожденных M-образов, позволяет получать прямолинейный скелет без дополнительных алгоритмов распознавания ребер (Рис. 7б). В таком случае, определение скелета для компьютера заключается в распознавании разности значений палитры в соседних точках.

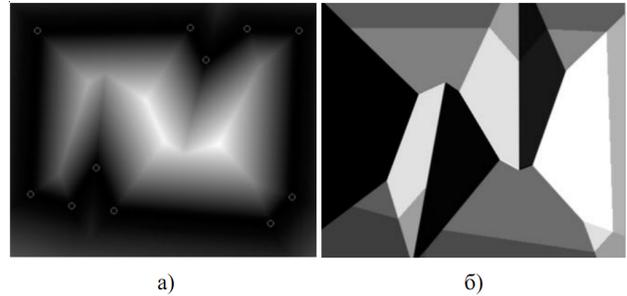


Рис. 7: Скелеты полученные на основе M-образов

5. Диаграмма вороного на основе M-образов

Помимо этого, использование ФВМ позволяет строить диаграмму Вороного, являющаяся разбиением плоскости для конечного множества точек, при котором каждая область разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества S , чем к любому другому элементу множества.

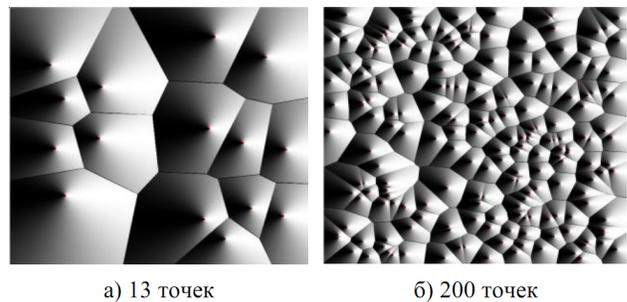


Рис. 8: Построение диаграммы Вороного

Точки представляют собой окружности с минимальным радиусом. При использовании линейной системы R-функций (3) получаем M-образы, которые представляют собой диаграмму Вороного для конечного числа точек (рис. 8). Геометрически такое представление можно объяснить переходом в повышенное пространство. Каждая точка, описанная окружностью в повышенном пространстве, представляет собой гиперboloид. В результате соседние гиперboloиды при пересечении образуются

линии, и при проецировании этих линий на плоскость, образуется диаграмма Вороного.

6. Заключение

В данной работе был предложен новый способ построения прямолинейного скелета и диаграммы Вороного средствами функционально-воксельного моделирования. Данные методы принципиально отличаются от классических подходов [7-9], поскольку базируются на аналитическом способе описания геометрии модели. Помимо этого, предложенное решение открывает новые возможности к планированию маршрутов с помощью ФВМ [1].

Литература

- [1] Васильев С.Н., Локтев М.А., Толоч А.В., Толоч Н.Б., Ульянов С.А. К планированию маршрутов в 3d-среде с многовариантной моделью // Труды СПИИРАН. 2016. №2(45). С. 5-25
- [2] Толоч А. В. Применение воксельных моделей в процессе автоматизации математического моделирования // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №. 6. – С. 167-180.
- [3] Силантьев Д.А., Лоторевич Е.А., Пушкар.в С.А., Толоч А.В. Воксельно-математическое моделирование при решении задач определения площади для поверхностей деталей // Информационные технологии в проектировании и производстве №3, 2013, С 29-33.
- [4] Васильев С.Н., Толоч А.В. Решение оптимизационных задач средствами функционально-воксельного моделирования // Тезисы 15-ой Международной конференции "Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта"(CAD/CAM/PDM-2015). М.: ООО "Аналитика". 2015. С. 111.
- [5] Местецкий Л.М. Непрерывный скелет бинарного растрового изображения. Труды межд. конф. "Графикон98". Москва, 1998.
- [6] Blum H. A transformation for extracting new descriptions of shape, Symp. on Models for the Perception of Speech and Visual Form, 1964
- [7] Eppstein D., Erickson J. Raising roofs, crashing cycles, and playing pool: Applications of a data structure for finding pairwise interactions // Discrete & Computational Geometry. – 1999. –Т. 22. – №. 4. – С. 569-592.
- [8] Aichholzer O. et al. A novel type of skeleton for polygons. – Springer Berlin Heidelberg, 1996. –С. 752-761.
- [9] Aichholzer O., Aurenhammer F. Straight skeletons for general polygonal figures in the plane. – Springer Berlin Heidelberg, 1996. –С. 117-126.
- [10] Толоч А.В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании. – Москва.: Физматлит, 2016. – 105 с.
- [11] Рвачев В.Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. -Киев: Наукова думка, 1982. -552 с.
- [12] Максименко-Шейко К.В., Мацевитый А.М., Толоч А.В., Шейко Т.И. R-функции и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве // Информационные технологии. 2007. №10. С. 23-32
- [13] Локтев М.А., Толоч А.В. Метод функциональной вокселизации полигональных объектов на основе математического аппарата R-функций // Прикладная информатика. 2016. Т. 11, № 1 (61). С. 127-134.
- [14] Eftekharian A. A., Pies H. T. Distance functions and skeletal representations of rigid and non-rigid planar shapes // Computer-Aided Design. – 2009. –Т. 41. – №. 12. – С. 865-876.
- [15] Eftekharian A. A., Pies H. T. Curve Skeletons of Planar Domains // Computer-Aided Design and Applications. – 2011. –Т. 8. – №. 1. – С. 87-97.
- [16] K. Sugihara, Straight Skeleton for Automatic Generation of 3-D Building Models with General Shaped Roofs, in: 21st Int. Conf. Comput. Graphics, Visualizat., Comput. Vision, 2013, pp. 175–183.