

Моделирование параметрических твердых тел с применением обобщенной линейной интерполяции*

Т. Аюшеев, Р. Бульчев

atv62@bk.ru | buly4ev.roman@yandex.ru

Кафедра инженерной и компьютерной графики

Восточно-Сибирский Государственный Университет технологии и управления, Улан-Удэ, Россия

В статье рассматривается метод построения модели трехмерных параметрических твердых тел и их описание с помощью обобщенной линейной интерполяции. Приведены уравнения тел, состоящих из криволинейных восьмиугольных, шестиугольных, пятиугольных и четырехугольных порций. Все эти порции могут быть объединены в одной модели для формирования составных тел сложной формы. Данный метод позволяет моделировать форму и описывать полностью поведение промежуточных поверхностей внутри тела моделируемого объекта. Предложенная методика может быть использована при численном моделировании многослойных конструкций.

Ключевые слова: параметрические твердые тела, сплайн кривые, трилинейная интерполяция

1. Введение

При численном моделировании процессов формообразования многослойных конструкций из неоднородных материалов различными технологическими способами возникают важные геометрические задачи построения сеток граничных и промежуточных поверхностей деформируемых твердых тел многослойной структуры. При этом промежуточные поверхности слоев трехмерного тела плавно меняются от одной граничной поверхности до другой и не пересекаются между собой. Такое тело можно описывать, используя поверхностные модели [1]. В качестве начальной поверхности используют заданный внутренний, или внешний теоретический контур изделия. Для описания поверхности следующего слоя необходимо преобразование каркаса исходной поверхности с учетом изменения толщины слоя. Такой способ описания тела применяют при моделировании тонкостенных оболочечных конструкций [2]. В методе конечных элементов моделируемый объект задается множеством точек, линейно связанных между собой. Для получения требуемой точности описания формы тела увеличивают количество узловых точек, задающих каркас конечных элементов [3]. В указанных подходах моделирование толстостенных многослойных конструкций связано с перезаданием исходного каркаса узловых точек. Это часто не желательно, из-за конструктивных и технологических соображений. Кроме того, существенно растет объем перерабатываемой информации.

Для решения указанной проблемы в работе рассматривается метод построения модели трехмерных параметрических твердых тел и их описание с помощью обобщенной линейной интерполяции. В этом методе тело представляется векторной функ-

цией

$$r(u, v, w) = \{x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\}, u, v, w \in \Omega$$

Приведены уравнения тел, состоящих из криволинейных восьмиугольных, шестиугольных, пятиугольных и четырехугольных порций. Все эти порции могут быть объединены в одной модели для формирования составных тел сложной формы. Для описания граничных кривых порции тела использовалась параметрическая кубическая кривая в форме Безье, которая позволяет легко управлять формой кривой.

2. Описание порции тела на основе обобщенной линейной интерполяции

Пусть нам известна форма поверхности тела моделируемого объекта. Построена сетка кривых, определяющая поверхность тела. Сетка кривых делит поверхность на четырехугольные порции, которые ограничены u, v, w кривыми, как показано на рис. 1. Пусть параметрическая длина этих кривых изменяется в пределах от 0 до 1. Тогда $r(u, v, w), 0 < u, v, w < 1$ представляет внутренность порции тела, а $r(i, v, w), r(u, j, w), r(u, v, k), i, j, k = 0; 1$ определяют ее известные граничные поверхности. Необходимо определить функцию $r(u, v, w)$, которая при $u = i, v = j, w = k$ представляет нужную граничную поверхность порции тела.

Порция тела на восьмиугольном каркасе

Порция тела на восьмиугольном криволинейном каркасе является базовой при моделировании трехмерных объектов. Она состоит из 8 узловых точек, 12 граничных кривых и 6 граничных поверхностей (рис. 2). Для описания граничных кривых мы использовали параметрическую кубическую кривую Безье. Уравнение кубической кривой Безье в матричной форме имеет вид:

$$r(t) = F(t)MP, \quad (1)$$

Работа опубликована по гранту РФФИ №16-07-20482.

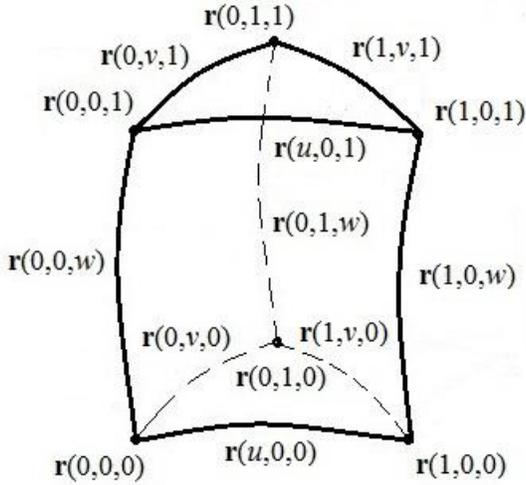


Рис. 3: Шестиугольная порция тела

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v, w) = & (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, v, 0) & \mathbf{r}(0, v, 1) \\ \mathbf{r}(1, v, 0) & \mathbf{r}(1, v, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-w \\ w \end{pmatrix} + \\ & (1-v \ v) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(u, 0, 0) & \mathbf{r}(u, 0, 1) \\ \mathbf{r}(0, 1, 0) & \mathbf{r}(0, 1, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-w \\ w \end{pmatrix} + \\ & (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0, w) & \mathbf{r}(0, 1, w) \\ \mathbf{r}(1, 0, w) & \mathbf{r}(1, 1, w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} - \\ & 2(1-w \ w) \begin{pmatrix} (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0, 0) & \mathbf{r}(0, 1, 0) \\ \mathbf{r}(1, 0, 0) & \mathbf{r}(1, 1, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \\ (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0, 1) & \mathbf{r}(0, 1, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0, 1) & \mathbf{r}(1, 1, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

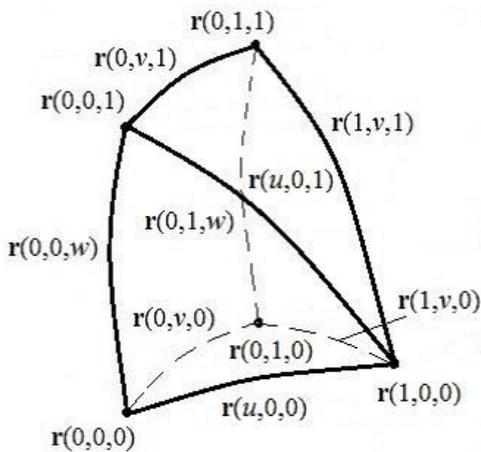


Рис. 4: Пятиугольная порция тела

Уравнение пятиугольной порции тела в матричной форме имеет вид: Уравнение порции (5) удобно использовать при моделировании тела с вырожденными порциями граничных поверхностей. В этом случае необходимо включать в систему, состоящую

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v, w) = & (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, v, 0) & \mathbf{r}(0, v, 1) \\ \mathbf{r}(1, v, 0) & \mathbf{r}(1, v, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-w \\ w \end{pmatrix} + \\ & (1-v \ v) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(u, 0, 0) & \mathbf{r}(u, 0, 1) \\ \mathbf{r}(0, 1, 0) & \mathbf{r}(0, 1, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-w \\ w \end{pmatrix} + \\ & (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0, w) & \mathbf{r}(0, 1, w) \\ \mathbf{r}(1, 0, w) & \mathbf{r}(1, 1, w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} - \\ & 2(1-w \ w) \begin{pmatrix} (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0, 0) & \mathbf{r}(0, 1, 0) \\ \mathbf{r}(1, 0, 0) & \mathbf{r}(1, 1, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \\ (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0, 1) & \mathbf{r}(0, 1, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0, 1) & \mathbf{r}(1, 1, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

из четырехугольных порций граничных поверхностей, треугольные порции.

2.4 Порция тела на четырехугольном каркасе

Четырехугольная порция тела состоит из 4 узловых точек, 6 граничных кривых и 4 граничных поверхностей (рис. 5). Уравнение четырехуголь-

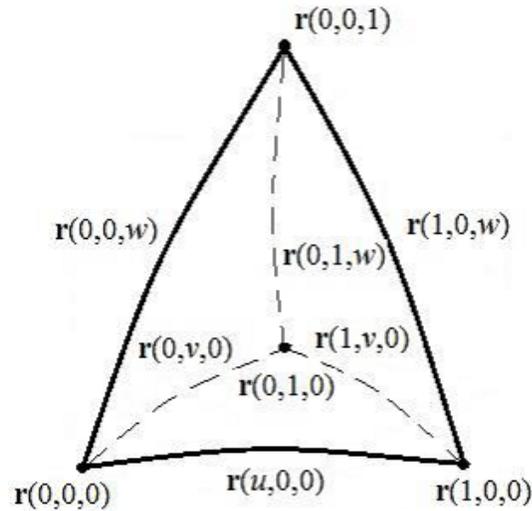


Рис. 5: Четырехугольная порция тела

ной порции тела в матричной форме имеет вид: Уравнение порции (6) может также применяться

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v, w) = & (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, v, 0) & \mathbf{r}(0, 0, 1) \\ \mathbf{r}(1, v, 0) & \mathbf{r}(0, 0, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-w \\ w \end{pmatrix} + \\ & (1-v \ v) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(u, 0, 0) & \mathbf{r}(0, 0, 1) \\ \mathbf{r}(0, 1, 0) & \mathbf{r}(0, 0, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-w \\ w \end{pmatrix} + \\ & (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0, w) & \mathbf{r}(0, 1, w) \\ \mathbf{r}(1, 0, w) & \mathbf{r}(0, 1, w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} - \\ & 2(1-w \ w) \begin{pmatrix} (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0, 0) & \mathbf{r}(0, 1, 0) \\ \mathbf{r}(1, 0, 0) & \mathbf{r}(0, 1, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}(0, 0, 1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

при моделировании тела с вырожденными порциями граничных поверхностей. В этом случае иногда

необходимо применять порции тела с треугольными граничными поверхностями, когда длина одной граничной кривой стремится к нулю.

3. Вычислительные эксперименты

На рис. 6-9 представлены примеры вычислительных экспериментов с порциями тел в среде MathCAD. При изменении положения узловых точек порции определялись промежуточные поверхности порции тела при значениях параметра $w = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1$. Вычислительные эксперимен-

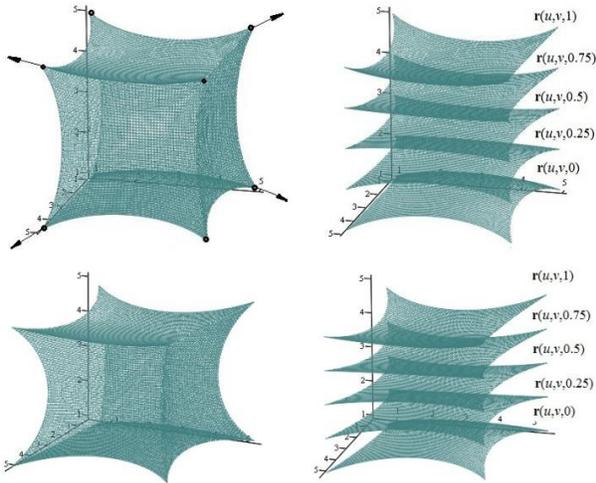


Рис. 6: Промежуточные поверхности восьмиугольной порции

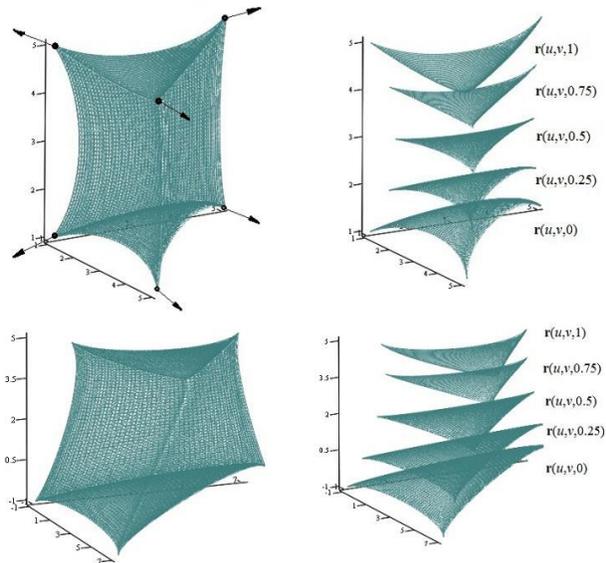


Рис. 7: Промежуточные поверхности шестиугольной порции

ты показали корректность полученных формул (3-8) для описания порции тела. Последовательные подстановки конкретных числовых значений в ука-

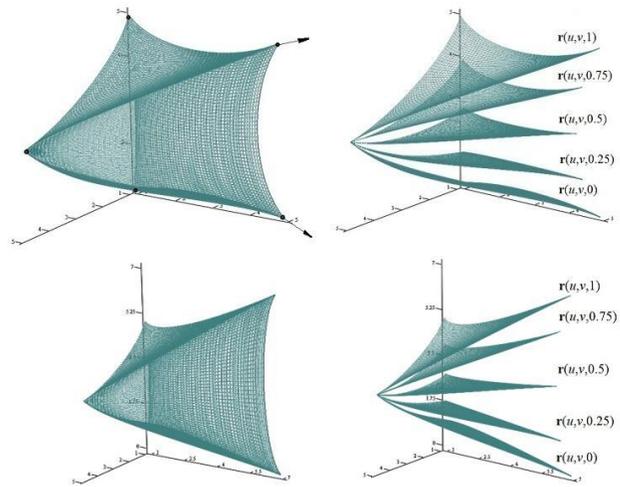


Рис. 8: Промежуточные поверхности пятиугольной порции

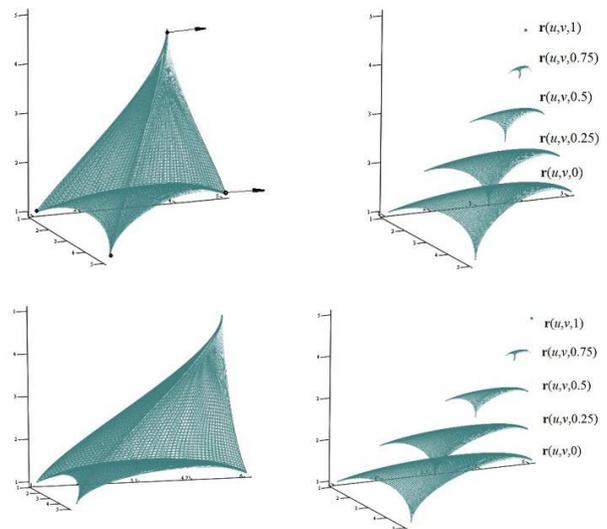


Рис. 9: Промежуточные поверхности четырехугольной порции

занные формулы удовлетворяют требуемым условиям поставленной задачи.

Разработанный программный модуль был апробирован при моделировании слоистой оболочки, получаемой способом намотки из композиционного материала хвостовой балки вертолета (рис. 10), а также при моделировании манекена тела человека (рис. 11).

4. Заключение

Предложенный способ построения порции трехмерного параметрического тела может быть использован для моделирования внутренней и внешней формы составного тела. Представленные примеры порции тел показывают, как легко можно определить внутреннюю структуру при изменении формы и количества точек криволинейного каркаса тела. Про-

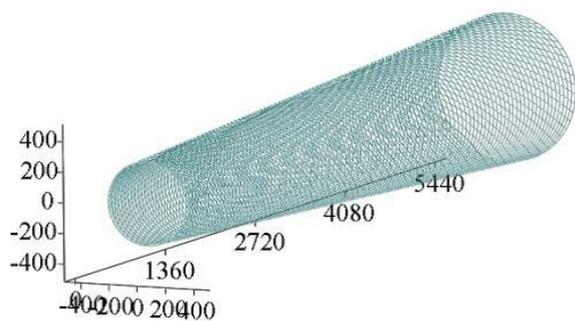


Рис. 10: Тело намотки хвостовой балки вертолета

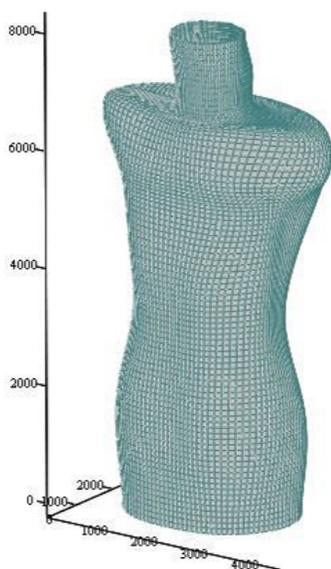


Рис. 11: Манекен тела человека

граммная реализация этого способа показала, что алгоритмы на его основе обладают вычислительной устойчивостью и быстродействием для решения задач визуализации, предварительной аппроксимации дискретного набора данных при численном моделировании сложных трехмерных объектов многослойной структуры.

Литература

- [1] Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
- [2] Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 472 с.
- [3] Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). – СПб.: Питер, 2004. – 500 с.