

Элементы циклографической начертательной геометрии*

К.Л. Панчук, Н.В. Кайгородцева

Panchuk_KL@mail.ru | Kaygorodtceva@gmail.com

Омск, Россия, Омский государственный технический университет

В классической геометрической литературе известно циклографическое отображение (Blaschke W. (1929); Müller E. и Krames L. (1929)). Оно определяет соответствие между множеством точек пространства и множеством окружностей плоскости.

Современный теоретический уровень циклографического отображения и его применение в CAGD (Computer Aided Geometric Design) отражены в монографии Pottmann H. и Wallner J. "Computational Line Geometry" [3] и в других известных публикациях [1, 2, 4,]. В настоящей работе исследуется возможность построения циклографической начертательной геометрии пространства R^3 .

Ключевые слова: начертательная геометрия, циклографическое отображение, евклидова и псевдоевклидова метрика.

Введение

Циклографическое отображение пространства R^3 основано на направленных (ориентированных) окружностях и плоскостях, и направленном контакте окружностей и плоскостей. Оно позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками $x = (x, y, z = R)$ пространства R^3 и множеством направленных окружностей $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = R^2$, принадлежащих плоскости xy (Π_1). Направление окружности определяется знаком координаты z , а ее радиус R – абсолютной величиной $|z|$.

Основные понятия

Символически циклографическое отображение можно представить как $(x) = \vec{c}$. Окружность c может быть рассмотрена как результат пересечения конуса вращения $K(x)$ с вершиной x и плоскости циклографического отображения Π_1 . Ось конуса $K(x)$ параллельна оси z , а его образующие линии наклонены под углом $\alpha = 45^\circ$ к плоскости Π_1 и называются α -линиями. Плоскость H , касательная к конусу $K(x)$, называется α -плоскостью. След h_1 плоскости H на плоскости проекций Π_1 представляет собой образ в циклографическом отображении $F(H) = h_1$. Он определяет направленную прямую линию \vec{h}_1 , которая образует направленный контакт с направленной окружностью \vec{c} .

Основные положения

Под направленным контактом окружности и прямой линии понимается совпадение вектора касательной к окружности и вектора прямой линии в их точке касания. Аффинные преобразования пространства R^3 преобразуют α -линии в α -линии и соответствуют псевдоевклидовой геометрии (геомет-

рии Минковского). Ее метрика основана на скалярном произведении

$$\langle a, b \rangle_{pe} = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2.$$

В соответствии с этой метрикой расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ псевдоевклидова пространства R^3_{pe} определяется формулой

$$d_{pe} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}.$$

Формула расстояния в интерпретации на плоскости циклографического Π_1 отображения выражает касательное расстояние $d(A'_1, B'_1)$ между двумя циклографическими образами – окружностями, соответствующими этим точкам (рис. 1). В данной работе рассматривается циклографическое отображение евклидова пространства R^3 на плоскость Π_1 .

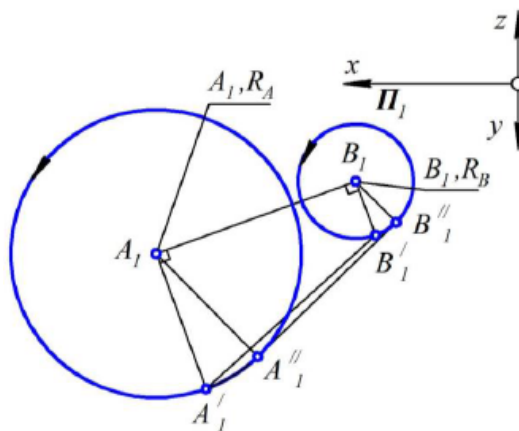


Рис. 1: Евклидово и псевдоевклидово расстояния

При этом расстояние определяется формулой

$$d_e(A, B) = d_e(A', B') = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 - (z'_1 - z'_2)^2}.$$

Работа опубликована при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-07-20482.

Координаты точек $A'_1(x'_1, y'_1)$ и $B'_1(x'_2, y'_2)$ плоскости Π_1 , соответствующих точкам $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $B_1(x_2, y_2, z_2)$ пространства (рис. 1), определяются согласно формул:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \pm R_A m, & y'_1 &= y_1 \mp R_A n, \\ x'_2 &= x_2 \pm R_B m, & y'_2 &= y_2 \mp R_B n, \\ m &= \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, & n &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, & a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Знаки « \pm » соответствуют положительным или отрицательным координатам $z_1 = R_A$, $z_2 = R_B$.

Циклографическое отображение объектов пространства R^3

В работе рассмотрены циклографические отображения линейных объектов пространства R^3 : прямых линий и плоскостей. Образом прямой линии является циклографический ряд. Конструкция ряда зависит от угла наклона прямой линии к плоскости проекции Π_1 :

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 45^\circ, \quad 0 < \alpha < 45^\circ, \quad 45^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Циклографическим образом плоскости является сеть циклов. Строение сети также зависит от угла наклона плоскости к плоскости проекций Π_1 , как и в случае прямой линии. В работе исследованы циклографические отображения кривых линий и некоторых простейших поверхностей. Для этих целей выполнены теоретические исследования, результаты которых позволяют решать прямые и обратные задачи циклографического моделирования линий пространств R^3 и R^4 . На рис. 2 приведен пример конструктивного определения циклографической проекции эллипса с построением точек ее мнимого продолжения на основе использования инструментария компьютерного 2D-моделирования. На рис. 3 приведен пример компьютерного 3D-моделирования циклографической проекции эллипса.

Пример 3D-реализации решения обратной задачи циклографического моделирования пространственной кривой показан на рис. 4.

Примеры решения задач

К основным результатам работы относятся алгоритмы и соответствующие им конструктивные решения позиционных и метрических задач на плоскости циклографических образов с использованием инструментария компьютерного 2D-моделирования.

Пример решения позиционной задачи определения точки пересечения прямой линии (F, K) с плоскостью (A, B, C) приведен на рис. 5. Точки пространства и соответствующие им циклографические проекции обозначены следующим образом: $F(F_1, R_F)$, $K(K_1, R_K)$, $A(A_1, R_A)$, $B(B_1, R_B)$,

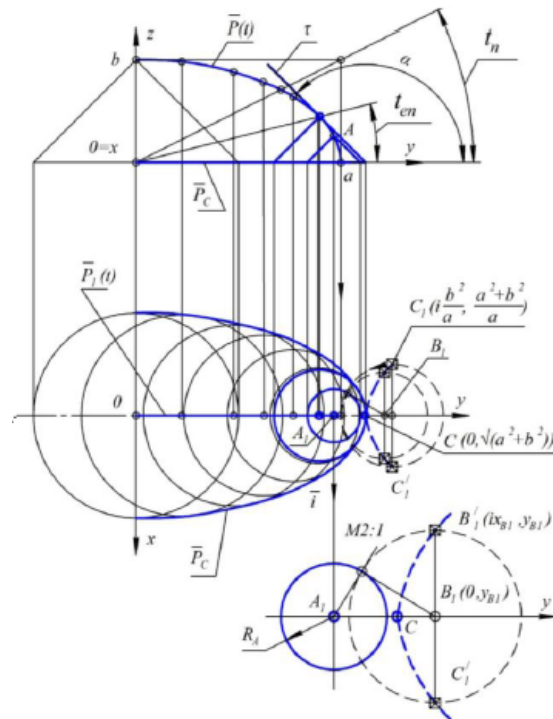


Рис. 2: Построение циклографической проекции эллипса

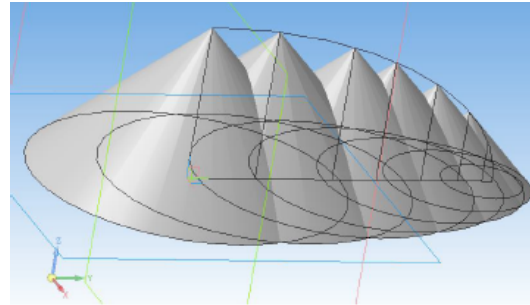


Рис. 3: 3D-моделирование циклографической проекции эллипса

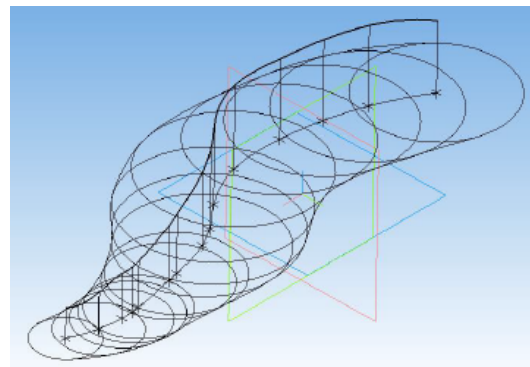


Рис. 4: 3D-моделирование решения обратной задачи

$C(C_1, R_C)$. Результатом решения является точка с циклографической проекцией $L(L_1, R_L)$, где

(L_1, R_L) — общая окружность двух окружностных рядов $(F_1, R_F; K_1, R_K)$ и $(D_1, R_D; E_1, R_E)$.

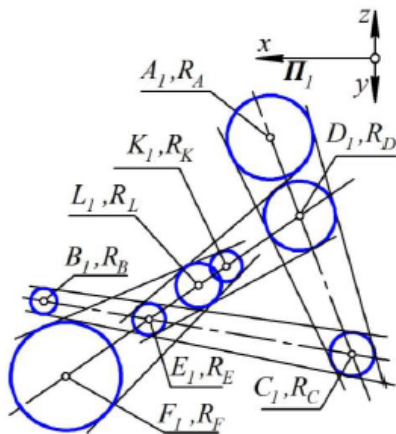


Рис. 5: Определение точки пересечения прямой линии и плоскости

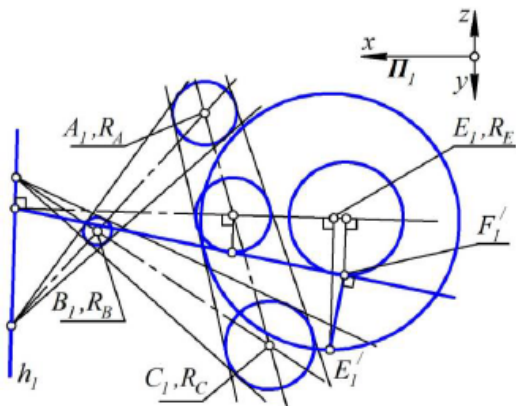


Рис. 6: Определение расстояния от точки до плоскости

Пример решения метрической задачи по определению расстояния между точкой E и плоскостью (A, B, C) приведен на рис. 6, при этом приняты следующие обозначения: $E(E_1, R_E)$, $A(A_1, R_A)$, $B(B_1, R_B)$, $C(C_1, R_C)$. Результатом решения задачи является длина отрезка $|E'_1 F'_1|$. Исходные данные в обеих задачах и их решения выполнены в положительной части ($z > 0$) пространства R^3 . Поэтому направления окружностей и прямых линий для удобства построений на приведенных рисунках не указаны. Все они имеют одно направление.

Заключение

В статье приведены результаты исследований в области классической начертательной геометрии. Они относятся к циклографическому моделированию евклидова пространства R^3 . Получены следующие новые научные результаты:

1. Рассмотрены и систематизированы циклографические проекции следующих объектов пространства R^3 : прямых линий, плоскостей, кривых линий и элементарных поверхностей. Рассмотрено множество примеров циклографического 2D- и 3D- моделирования этих объектов.
2. Реализованы алгоритмы конструктивных решений позиционных задач начертательной на основе циклографических проекций с использованием инструментария компьютерного 2D-моделирования.
3. Реализованы алгоритмы конструктивных решений метрических задач начертательной на основе циклографических проекций с использованием инструментария компьютерного 2D-моделирования.

Литература

- [1] M. Peternell. Rational two-parameter families of spheres and rational offset surfaces // J. Symb. Comp. V. 45, 1, 2010. Pp. 1–18. doi:10.1016/j.jsc.2009.06.001.
- [2] M. Peternell, H. Pottmann. A Laguerre geometric approach to rational offsets // Comp. Aided Geom. Design, V. 15, 3, 1998. Pp. 223–249. doi:10.1016/S0167-8396(97)00024-1.
- [3] H. Pottmann and J. Wallner. Computational Line Geometry. Berlin, Springer Verlag, Heidelberg, 2001. – 565 p.
- [4] H. Pottmann and M. Peternell. Applications of Laguerre geometry in CAGD // Comp. Aided Geom. Design. V. 15, 2, 1998. Pp. 165–186. doi:10.1016/S0167-8396(97)00023-X.

Об авторах

Константин Леонидович Панчук, профессор кафедры инженерной геометрии и САПР.

Наталья Викторовна Кайгородцева, доцент кафедры инженерной геометрии и САПР.