

Использование фазовой информации в обработке изображений

Е. А. Павельева

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: paveljeva@yandex.ru

В работе представлен обзор фазовых алгоритмов и задач, решаемых с использованием фазовой информации. Приведена схема алгоритма однозначного (с точностью до положительного множителя) восстановления функции по фазе преобразования Фурье. Предложено перспективное направление дальнейшего исследования в области применения фазовой информации на основе проекционного метода Эрмита.

Ключевые слова: фаза, преобразование Фурье, восстановление изображений, фазовая когерентность, проекционный метод Эрмита.

The use of phase information in image processing

E. A. Pavelyeva

Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

The paper provides an overview of phase algorithms and problems which can be solved with the use of phase information. The scheme of the signal reconstruction to within a positive scale factor from the phase of Fourier transform is shown. The perspective direction of the research in the area of the use of phase information based on Hermite projection method is proposed.

Keywords: phase, Fourier transform, image reconstruction, phase congruency, Hermite projection method.

1. ВВЕДЕНИЕ

Фазовая информация широко используется в задачах анализа и обработки сигналов [1]–[42]. При этом разделяют два вида фазовой информации: глобальную фазу (global phase) и локальную фазу (local phase) [2]. Под глобальной фазой подразумевают фазу преобразования Фурье исследуемого изображения, тогда как локальной фазой называют фазу некоторого локального преобразования, примененного к изображению (к примеру, оконного преобразования Фурье, вейвлет-преобразования и т.п.). Фаза преобразования Фурье (ПФ) содержит более важную информацию, чем амплитуда ПФ [1], [3], [4]. Важность фазовой информации можно обосновать на примере задачи синтеза фазы и амплитуды ПФ различных изображений [1]. Результат синтеза имеет сходство с тем изображением, чья фаза ПФ была использована. Также существует статистическая интерпретация важности фазовой информации [3].

Фаза используется в задачах выделения контуров и угловых точек на изображениях [5], [6], [7], в задачах анализа качества изображений [8], [9], [10], [11], интеллектуального слияния изображений (image fusion) [12], [13], [14], совмещения изображений (image registration) [15], [16], [17], [18], [19], [20], для определения уровня размытия и оценки резкости изображений [21], [22], [23], [24], [25], для шумоподавления [26], [27], сегментации [28], [29] изображений, для сопоставления изображений (image matching) [30], [31], [32], [33], в задачах оценки движения (motion estimation) [34], в задачах биометрии [35], [36], [37], [38], [39], для построения составного изображения (image mosaicing) [40], для построения дескрипторов текстов [41], для определения меры близости изображений [42] и т.п. Фазовая информация играет важную роль для человеческого восприятия [43], [44], [45].

В настоящее время актуальной является задача восстановления изображения в случае потери части данных [46]. При восстановлении изображений одним из наиболее важных вопросов является вопрос единственности восстановленного изображения, а также оценка меры близости между исходным и восстановленным изображениями. В работах [1], [47], [48] представлены теоремы единственности восстановления сигнала по фазе его преобразования Фурье, а в работах [1], [47], [49], [50] предложены итерационные алгоритмы восстановления сигналов по фазе ПФ.

В работах [51], [52], [53] используется фаза аппроксимации преобразования Фурье, полученной в результате применения проекционного метода Эрмита [54]. Эффективность использования проекционного метода Эрмита обусловлена тем, что функции Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье. Данный подход применяется в задачах синтеза [51], восстановления [52] изображений и в задаче биометрической идентификации человека по радужной оболочке глаза [53], [55].

2. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФАЗОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

2.1 Метод фазовой корреляции (Phase correlation)

Рассмотрим две функции целочисленного аргумента $f(x)$ и $g(x)$, $x = 0, 1, \dots, M - 1$. Пусть

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-\frac{i2\pi\lambda x}{M}} = A_F(\lambda) e^{i\phi_F(\lambda)}$$

и $G(\lambda) = A_G(\lambda)e^{i\varphi_G(\lambda)}$ – их дискретные преобразования Фурье (ДПФ), A_F и A_G – модули ДПФ, φ_F и φ_G – фазы ДПФ. Взаимным фазовым спектром двух спектральных функций $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ называется функция

$$R_{FG}(\lambda) = \frac{F(\lambda)\overline{G(\lambda)}}{|F(\lambda)\overline{G(\lambda)}|} = e^{i(\varphi_F(\lambda) - \varphi_G(\lambda))},$$

т.е. спектральная функция с единичной амплитудой, фаза которой равна разности фаз функций $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$. Применяв к этой функции обратное дискретное преобразование Фурье, получим РОС–функцию – функцию фазовой корреляции (Phase–Only Correlation function):

$$POC_{f,g}(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{\lambda=0}^{M-1} R_{FG}(\lambda) e^{\frac{i2\pi\lambda x}{M}}.$$

Если $g(x) = f(x - a)$, т.е. одна функция циклически сдвинута

относительно другой, то $G(\lambda) = e^{-\frac{i2\pi\lambda a}{M}} F(\lambda)$ и РОС–функция является дискретным аналогом дельта–функции с пиком в точке $x = a$. Для функции фазовой корреляции выполняется следующее свойство: если две функции $f(x)$ и $g(x)$ “похожи”, то РОС–функция дает четкий пик, если же функции “не похожи”, то РОС–функция не дает четкого пика. Наибольшее значение РОС–функции определяет меру близости функций $f(x)$ и $g(x)$, а при наличии четкого пика РОС–функции, его положение соответствует смещению одной функции относительно другой.

Аналогично определяется РОС–функция в двумерном случае для двух изображений $f(x, y)$ и $g(x, y)$, $x = 0, 1, \dots, M - 1$, $y = 0, 1, \dots, N - 1$, ДПФ которых представимо в виде:

$$F(\lambda, \mu) = A_F(\lambda, \mu)e^{i\varphi_F(\lambda, \mu)} \text{ и } G(\lambda, \mu) = A_G(\lambda, \mu)e^{i\varphi_G(\lambda, \mu)}.$$

Метод фазовой корреляции часто применяют для поиска соответствия между смещенными, повернутыми и разномасштабными изображениями [18], [34]. А именно, если $g(x, y) = f(x \cos \theta + y \sin \theta - a, -x \sin \theta + y \cos \theta - b)$, т.е. одна функция сдвинута относительно другой на вектор (a, b)

и повернута на некоторый угол θ , то амплитуды преобразований Фурье функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ совпадают с точностью до угла поворота θ . Записав амплитуды ПФ в полярных координатах, получим, что $A_G(\rho, \varphi - \theta) = A_F(\rho, \varphi)$, и для нахождения угла θ можно применить метод фазовой корреляции к функциям $A_F(\rho, \varphi)$ и $A_G(\rho, \varphi)$. Если же $g(x, y) = f(ax, by)$, т.е. одна функция масштабирована относительно другой, то

$G(\lambda, \mu) = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{\lambda}{a}, \frac{\mu}{b}\right)$. Перейдя к логарифмическим координатам и обозначив $\xi = \lg \lambda, \eta = \lg \mu$, получим $G(\xi, \eta) = \frac{1}{|ab|} F(\xi - \lg a, \eta - \lg b)$, и задача сведется к

применению метода фазовой корреляции к функциям $F(\xi, \eta)$ и $G(\xi, \eta)$.

С учетом вышеописанных свойств метод фазовой корреляции активно применяется в задачах совмещения изображений (рис. 2) [18], [20], при поиске смещения между изображениями [34], для поиска соответствий на изображениях [32], [33], для построения составного изображения [40].

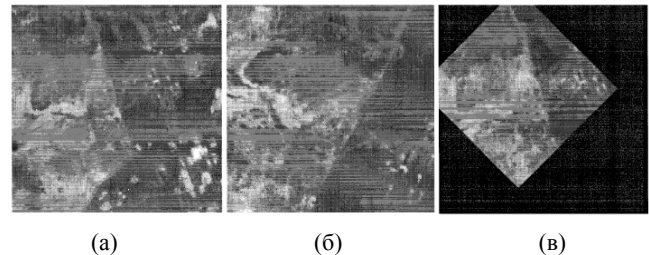


Рис. 1. Пример применения метода фазовой корреляции в задаче совмещения изображений аэрофотосъемки [18]: (а), (б) исходные изображения; (в) результат совмещения изображения (б) с изображением (а).

Метод фазовой корреляции также применяется для решения биометрических задач [36], [37], [38]. В работах [35], [36] вводится понятие ВЛРОС–функции (Band–Limited Phase–Only Correlation function) – функции, являющейся обратным преобразованием Фурье от функции взаимного фазового спектра в области, соответствующей низким частотам. Показано, что пик ВЛРОС–функции является более четким и устойчивым. Пример РОС– и ВЛРОС–функций для двух нормализованных изображений радужных оболочек глаз одного человека приведен на рис. 2.

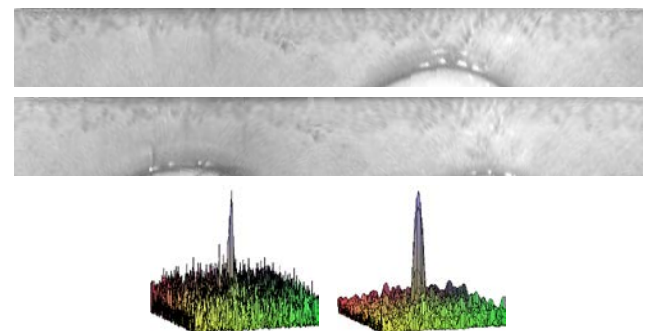


Рис. 2. Изображения радужных оболочек глаз и их РОС– (слева) и ВЛРОС–функции (справа).

2.2 Метод локальной фазовой когерентности (Local phase coherence)

В методе локальной фазовой когерентности [21], [22] для исследования сигнала $f(x)$, $x \in R$ используется фаза вейвлет–преобразования. В качестве материнского вейвлета используется сигнал $g(x)e^{i\omega_c x}$, где $g(x)$ – положительная, четная, медленно меняющаяся на бесконечности функция. Вейвлет–преобразование функции $f(x)$ вычисляется по формуле

$$F(s, p) = \left[f(x) * \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{x}{s}\right) e^{i\omega_c x/s} \right]_{x=p},$$

где $s \in R^+$ (scale) - параметр растяжения (параметр масштаба), $p \in R$ (position) - параметр сдвига, символ * обозначает свертку двух функций. Пусть $\Phi(F(s, p))$ - фаза $F(s, p)$. В работе [21] показано, что если сигнал имеет особенность в точке x_0 , то

$$\Phi(F(s, p)) = \Phi\left(F\left(1, x_0 + \frac{p-x_0}{s}\right)\right).$$

Данное соотношение показывает, что на линиях $x_0 + \frac{p-x_0}{s} = C, \forall C = const$ в плоскости (s, p) фаза сохраняет постоянное значение, что определяет взаимосвязь между параметрами s и p вблизи точки x_0 (рис. 3, рис. 4).

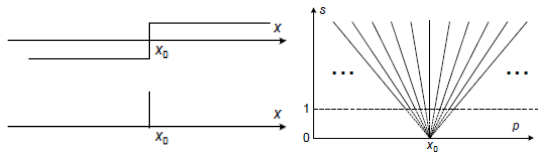


Рис. 3. Одномерные сигналы с особенностью и линии постоянства фазы вейвлет-преобразования [21].

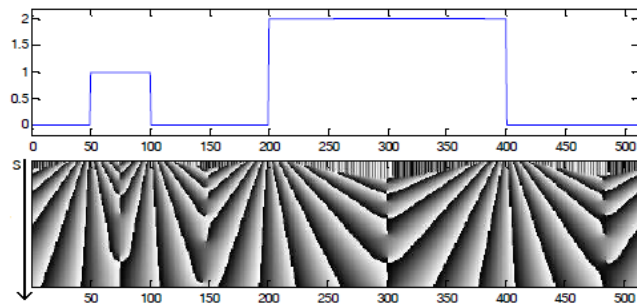


Рис. 4. Одномерный сигнал со ступенчатыми контурами и скейлограмма фазы его вейвлет-преобразования [56] (графическое представление функции $\Phi(F(s, p))$): одинаковыми цветами обозначены одинаковые значения фазы).

Учитывая данное свойство, в работе [21] предложен метод предсказания фазы вейвлет-преобразования при $s=1$ на основе информации о фазе при $s=2$ и $s=4$ (рис. 5).

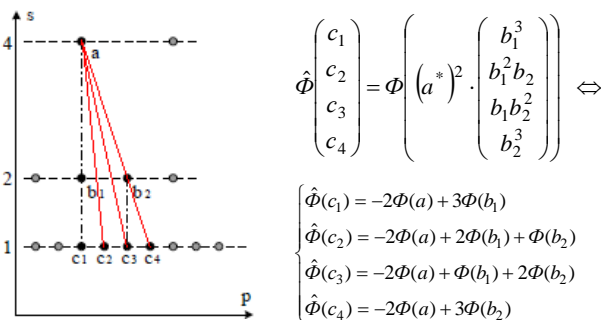


Рис. 5. Предсказание фазы вейвлет-преобразования [21], [56]: $a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4$ - результаты вейвлет-преобразования, a^* - число, сопряженное числу a .

Аналогичная формула предсказания фазы предложена в работах [21], [22] для двумерного случая, в работе [22] также предложены другие формулы для предсказания фазы. Мера локальной фазовой когерентности в точке i вычисляется по формуле [22], [13]:

$$LPC(i) = \frac{\sum_{\theta} |c_i| \cos(\Phi(c_i) - \hat{\Phi}(c_i))}{\sum_{\theta} |c_i|},$$

где c_i - результат вейвлет-преобразования, $\Phi(c_i)$ - фаза вейвлет-преобразования в точке i , $\hat{\Phi}(c_i)$ - предсказанная фаза в точке i , θ определяет номер ориентации вейвлета (в двумерном случае). Если предсказание фазы происходит по формулам, представленным на рис. 5, то $c_i = F(1, i)$ и суммирование отсутствует. Мера локальной фазовой когерентности устойчива к сдвигам, поворотам, масштабированию изображений, а также к присутствию белого шума на изображении [13].

Метод локальной фазовой когерентности применяется для определения уровня размытия изображений [21], для оценки резкости изображений [22], в задачах интеллектуального слияния изображений различной резкости, фокусировки и контрастности [13], [56] (рис. 6), совмещения изображений [16], [56], [19].

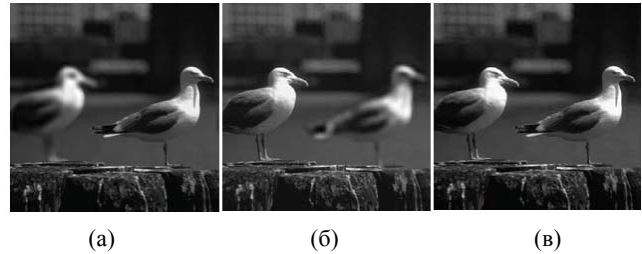


Рис. 6. (а), (б) изображения, на которых одна чайка находится в фокусе, а вторая - не в фокусе; (в) результат интеллектуального слияния изображений (а) и (б) [13].

2.3 Метод фазовой конгруэнтности (Phase congruency)

Идея метода фазовой конгруэнтности основана на разложении функции $F(x) \in L_2[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx + \xi_n), \quad A_n \geq 0.$$

В работах [7], [57], [58], [59] показано, что если у сигнала присутствует особенность, то в точке особенности все синусоидальные компоненты разложения имеют одинаковую фазу (рис. 7 а). Данное свойство называется фазовой конгруэнтностью. Предложена мера фазовой конгруэнтности [59], [57], [58]:

$$PC(x) = \max_{\phi \in (0, 2\pi]} \frac{\sum_n A_n \cos(nx + \xi_n - \phi)}{\sum_n A_n},$$

$PC(x) \in [0, 1]$. $PC(x) = 1$ тогда и только тогда, когда все компоненты разложения функции в точке x имеют одинаковую фазу $\bar{\phi}(x)$. Чем больше значение меры $PC(x)$, тем выше значение фазовой конгруэнтности. В работах [7],

[57] предложена геометрическая интерпретация меры фазовой конгруэнтности (рис. 7 б). В ней каждая компонента разложения в ряд Фурье представляется в виде вектора, длина которого равна A_n , а угол наклона относительно положительного направления оси OX равен значению фазы $\phi_n = nx + \xi_n \pmod{2\pi}$. Тогда $E(x)$ – суммарный вектор, $|E(x)| = \sum_n A_n \cos(\phi_n - \bar{\phi}(x))$ – его длина [7], [59], $\bar{\phi}(x)$ – усредненное значение фазы и

$$PC(x) = \frac{|E(x)|}{\sum_n A_n}.$$

Если $H(x)$ – преобразование Гильберта функции $f(x)$:

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx + \phi_n), \text{ то } |E(x)| = \sqrt{f^2(x) + H^2(x)}$$

– локальная энергия функции $f(x)$ [59]. Мера фазовой конгруэнтности не зависит от амплитуд синусоидальных компонент, что делает ее инвариантной к изменению освещенности и контрастности [7].

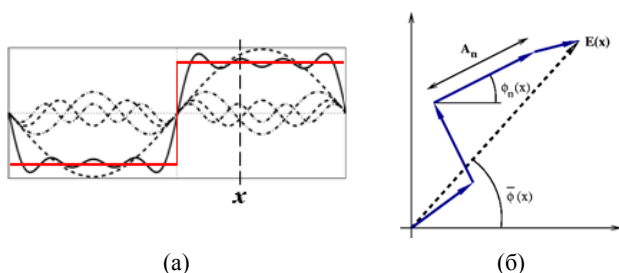


Рис. 7. (а) Четыре первых компоненты разложения ступенчатого контура в ряд Фурье; (б) в отмеченной на рис. 7 а точке x приведена геометрическая интерпретация меры фазовой конгруэнтности [7].

В работе [57] предложен метод вычисления фазовой конгруэнтности с помощью вейвлет-преобразования (ВП). В точках, где у функции присутствует особенность (скачок), т.е. в точках с высокой мерой фазовой конгруэнтности, фаза ВП не изменяется с изменением параметра растяжения s (рис. 4, рис. 8). Отличие метода локальной фазовой когерентности (LPC) от метода фазовой конгруэнтности (PC) в том, что в методе LPC происходит предсказание фазы ВП в исследуемой точке на основе информации о фазе ВП в окрестных точках (для других параметров масштаба), а в методе PC используется информация о фазе ВП только в исследуемой точке, на разных уровнях масштаба [22].

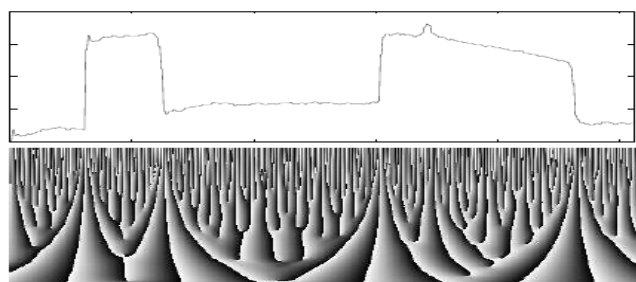


Рис. 8. Сигнал с зашумленными ступенчатыми контурами и скейлограмма фазы его вейвлет-преобразования [57][56].

Обозначим $F(p) = \sum_s \text{Re} F(s, p)$, $H(p) = \sum_s \text{Im} F(s, p)$,

$$A_s(p) = \sqrt{\text{Re}^2 F(s, p) + \text{Im}^2 F(s, p)}, \quad E(p) = \sqrt{F^2(p) + H^2(p)}.$$

Тогда $PC(p) = \frac{E(p)}{\sum_s A_s(p)}$ (рис. 7 б).

В работах [57], [7] предложен метод вычисления фазовой конгруэнтности для двумерных сигналов на основе двумерного вейвлет-преобразования. Метод фазовой конгруэнтности применяется для выделения особенностей на изображениях, для выделения контуров и угловых точек на изображениях [7], [57] (рис. 9). Также метод фазовой конгруэнтности применяется в задачах биометрии [39], совмещения [19], сегментации [29], шумоподавления [26], [27], интеллектуального слияния [14] изображений, определения уровня размытия на изображениях [25] и меры близости изображений [60].

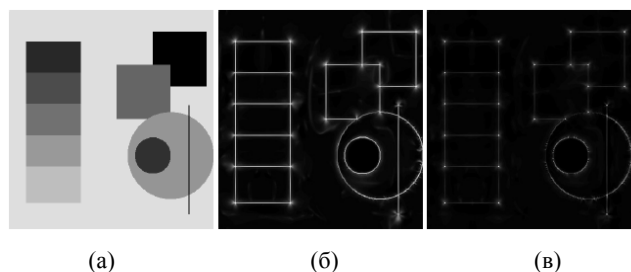


Рис. 9. (а) Исходное изображение; (б) изображение с выделенными контурами; (в) изображение с выделенными угловыми точками [7].

2.4 Метод локального фазового квантования (Local phase quantization)

В методе фазового квантования происходит квантование фазы комплексной функции, полученной в результате преобразования Фурье [61] либо некоторого локального преобразования [5], [41], на заданное количество K уровней. Квантование может происходить по схемам, представленным на рис. 10: значения фазы заменяются на другие значения из заданного конечного множества [5], [61] либо происходит кодирование информации в зависимости от значения фазы [41], [62].

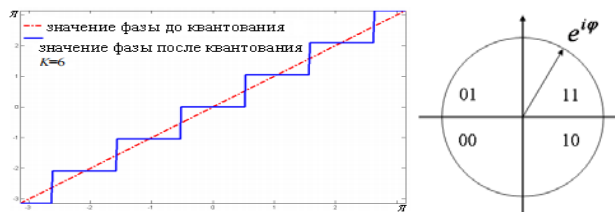


Рис. 10. Примеры квантования фазы.

Метод локального фазового квантования применяется для нахождения контуров на изображениях [5], [63] (рис. 11), для построения дескрипторов текстур, устойчивых к наличию размытия на изображениях [41], [64], для оценки качества изображений [10], в биометрии [38], [62].

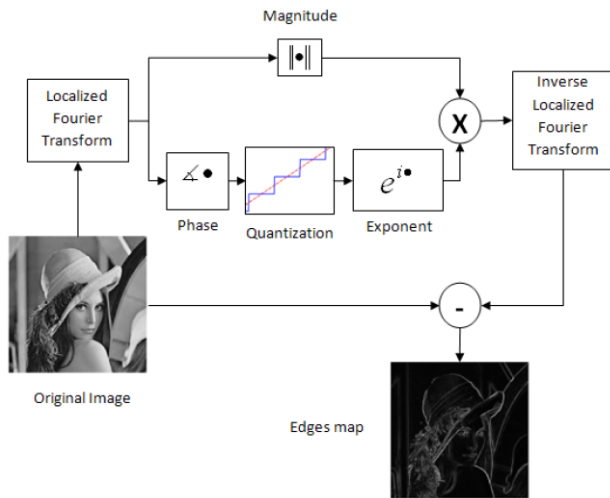


Рис. 11. Схема применения метода локального фазового квантования для нахождения контуров на изображении [63].

2.5 Метод глобальной фазовой когерентности (Global phase coherence)

В методе глобальной фазовой когерентности [23] вычисляется вероятность того, что изображение u_ψ с измененной фазой будет более правдоподобным, чем заданное изображение u . Изображение u_ψ считается более правдоподобным, чем заданное изображение u , если его полная вариация (TV) [65] меньше полной вариации заданного изображения: $TV(u_\psi) < TV(u)$. Для заданного изображения вычисляется амплитуда и фаза преобразования Фурье. Далее рассматриваются всевозможные изображения с заданной (фиксированной) амплитудой ПФ и вычисляется отношение количества изображений, не менее правдоподобных, чем заданное изображение, к общему числу изображений:

$$GPC(u) = -\lg \left(\frac{|\{\psi \in P : TV(u_\psi) \leq TV(u)\}|}{|P|} \right),$$

где P - множество всех нечетных фазовых функций (фаза ПФ вещественной функции - нечетная), для любого множества S символом $|S|$ обозначается мощность данного множества.

Метод глобальной фазовой когерентности используется в задачах определения резкости изображений (рис. 12) [23], «слепого» обращения свертки (blind deconvolution) [24], а также для определения меры близости изображений [9].

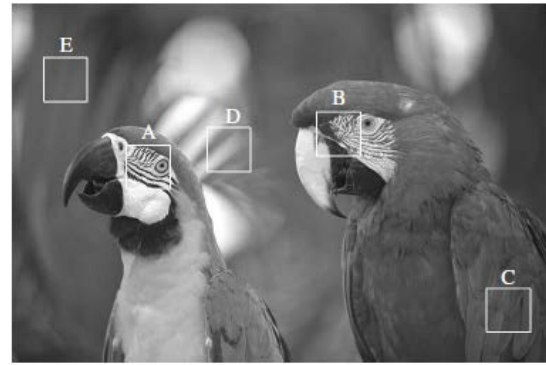


Рис. 12. Пример применения метода глобальной фазовой когерентности [23]. В выделенных областях А, В и С метод GPC определил резкие контуры, а в областях D и E метрика определила размытие.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО ФАЗЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В работах [1], [47] представлены теоремы единственности восстановления дискретного сигнала по фазе его преобразования Фурье. Условия этих теорем основаны на информации о нулях z-преобразования дискретного сигнала. Эти условия являются трудно проверяемыми на практике, поскольку поиск нулей z-преобразования является вычислительно трудоемкой задачей. Другой критерий единственности восстановления функции по фазе ее преобразования Фурье предложен в работе [48]. Для функции $f(n)$ аргумента $n = 0, 1, \dots, N-1$ строится матрица размера $(N-1) \times (N-1)$ и доказывается, что условие невырожденности этой матрицы является необходимым и достаточным условием единственности восстановления функции по фазе ее преобразования Фурье. Вычисление определителя матрицы размера $(N-1) \times (N-1)$ при больших N также является вычислительно трудоемкой задачей и не применяется на практике для проверки возможности восстановления функции по фазе.

В работах [1], [47], [49], [50] предложены итерационные алгоритмы восстановления функции по фазе. Наиболее часто на практике применяется итерационный алгоритм [47], в котором на первом шаге каждой итерации к функции применяются ограничения в частотной области, а на втором шаге - в пространственной (рис. 13, рис. 14). Также в работе [47] доказано, что погрешность после каждой итерации не увеличивается, а в работе [66] доказано, что данный итерационный алгоритм сходится. Восстановления дискретного функции $f(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ происходит по фазе ДПФ другой функции, совпадающей с $f(n)$ в N точках и продолженной по длине нулями не менее чем в два раза (до длины $M \geq 2N$) [47]. В работах [49], [50] предложена модификация этого алгоритма, основанная на методе проекций на выпуклые множества. Также в работах [47], [48] предложены аналитические методы восстановления сигналов по фазе.

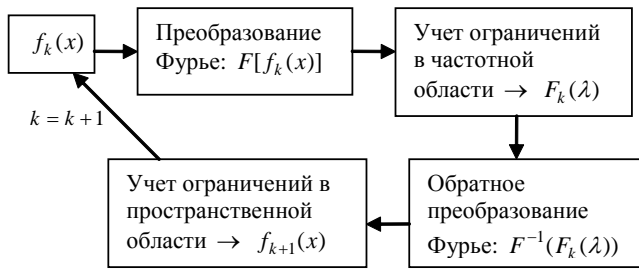


Рис. 13. Схема итерационного алгоритма восстановления изображений по фазе преобразования Фурье.

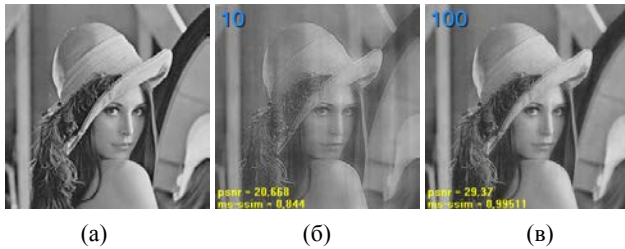


Рис. 14. (а) Исходное изображение; (б) результат восстановления изображения по фазе ДПФ после 10 итераций; (в) после 100 итераций.

4. ФАЗА АППРОКСИМАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЭРМИТА

В работах [51], [52] предлагается использовать фазу аппроксимации преобразования Фурье с использованием функций Эрмита (фазу АПФЭ). Данный метод основан на использовании проекционного метода Эрмита [54], [67], в котором вычисляется аппроксимация $f_n(x)$ разложения функции $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ в ряд Фурье по функциям Эрмита $\psi_n(x)$. Функции Эрмита [68]:

- 1) являются собственными функциями преобразования Фурье: $F[\psi_n] = (-i)^n \psi_n$,
- 2) образуют полную ортонормированную систему функций в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$;
- 3) являются локализованными с вычислительной точки зрения на конечном отрезке как в пространственной, так и в частотной областях.

Поэтому разработка и применение проекционных методов, использующих функции Эрмита, представляет собой важную и актуальную задачу, а использование информации о фазе в проекционных методах является перспективным подходом.

Пусть $f_n(x)$ – аппроксимация разложения функции $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ в ряд Фурье по функциям Эрмита $\psi_0(x), \dots, \psi_n(x)$:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \psi_k(x).$$

Выражение

$$HF_{f,n}(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k (-i)^k \psi_k(\lambda) = A_{f,n}(\lambda) \cdot e^{i\varphi_{f,n}(\lambda)}$$

называется аппроксимацией преобразования Фурье с использованием функций Эрмита (АПФЭ) функции $f(x)$, а $A_{f,n}(\lambda)$ и $\varphi_{f,n}(\lambda)$ – амплитудой и фазой АПФЭ соответственно [51].

В работе [51] показано, что фаза АПФЭ содержит в себе больше информации, чем амплитуда АПФЭ. Фазу АПФЭ можно применять в задаче синтеза (рис. 15) [51] и восстановления [52] изображений; исследована однозначность восстановления по фазе АПФЭ. При этом в задаче восстановления используется фаза АПФЭ исходного сигнала без добавления нулей. При использовании фазы АПФЭ исследуется фаза локализованного с вычислительной точки зрения и сглаженного сигнала (аппроксимации $f_n(x)$), поэтому результат работы алгоритма может оказаться лучше, чем при использовании фазы преобразования Фурье (рис. 15, рис. 16).

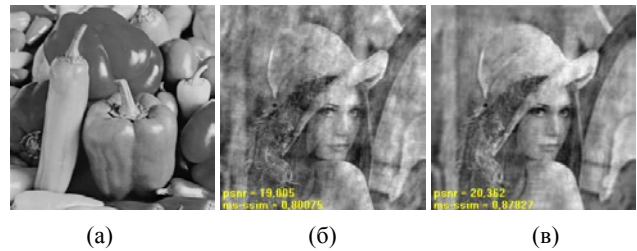


Рис. 15. (а) изображение “Peppers”; (б) синтез фазы ПФ “Lena” (рис. 14 а) и амплитуды ПФ “Peppers”; (в) синтез фазы АПФЭ “Lena” и амплитуды АПФЭ “Peppers”.

В работах [53], [55] предложен метод проекционной фазовой корреляции (НРРОС – Hermite Projection Phase-Only Correlation) для поиска соответствий между изображениями, в частности, данный метод применяется для поиска соответствий между ключевыми точками изображений радужной оболочки глаза. При этом показано [55], что в случае изображений небольшого размера метод проекционной фазовой корреляции дает более точные результаты, чем метод фазовой корреляции (рис.16).

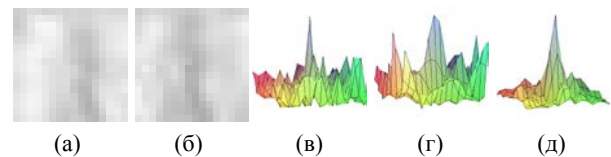


Рис. 16. (а), (б) соответствующие друг другу части изображений радужной оболочки одного глаза размера 16×16 пикселей; (в) РОС–функция; (г) VLPOC–функция; (д) НРРОС–функция.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведено обоснование важности фазовой информации в обработке изображений. Представлены основные подходы использования фазовой информации и обзор методов анализа и обработки изображений, использующих фазовую информацию. Предложено перспективное направление, связанное с применением фазы аппроксимации преобразования Фурье с использованием функций Эрмита.

6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Oppenheim and J. S. Lim, "The importance of phase in signals," *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, no. 5, pp. 529-541, May 1981.
- [2] N. Bonnet and P. Vautrot, "Image analysis: Is the Fourier transform becoming obsolete?," *Microscopy Microanalysis Microstructures*, vol. 8, no. 1, pp. 59-75, 1997.
- [3] X. S. Ni and X. Huo, "Statistical interpretation of the importance of phase information in signal and image reconstruction," *Statistics & Probability Letters*, vol. 77, no. 4, pp. 447-454, Feb. 2007.
- [4] C. Guo, Q. Ma, and L. Zhang, "Spatio-temporal saliency detection using phase spectrum of quaternion Fourier transform," in *CVPR*, 2008, pp. 1-8.
- [5] N. Skarbnik, C. Sagiv, and Y. Y. Zeevi, "Edge detection and skeletonization using quantized localized phase," in *Proc. EUSIPCO*, 2009, pp. 1542-1546.
- [6] M. H. Asghari and B. Jalali, "Edge Detection in Digital Images Using Dispersive Phase Stretch Transform," *Journal of Biomedical Imaging*, vol. 2015, Article ID 687819, 6 pages, Jan. 2015.
- [7] P. Kovsesi, "Phase congruency detects corners and edges," in *DICTA*, Sydney, Dec. 2003, pp. 309-318.
- [8] M. Narwaria, W. Lin, I. V. McLoughlin, S. Emmanuel, and L. T. Chia, "Fourier transform-based scalable image quality measure," *IEEE Trans. on Im. Proc.*, vol. 21, no. 8, pp. 3364-3377, Aug. 2012.
- [9] D. Wang, W. Ding, Y. Man, and L. Cui, "A joint image quality assessment method based on global phase coherence and structural similarity," in *Congress on Image and Signal Processing*, 2010, vol. 5, pp. 2307-2311.
- [10] D. O. Kim D and R. H. Park, "Image quality measure using the phase quantization code" // *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol. 56, no. 2, pp. 937-945, 2010.
- [11] G. Zhai, W. Zhang, Y. Xu, and W. Lin, "LGPS: Phase based image quality assessment metric," in *IEEE Workshop on Signal Processing Systems*, 2007, pp. 605-609.
- [12] L. Li, Q. Zou, Q. Huang, Y. Zhang, and F. Wang, "Image fusion based on fractional Fourier domain phase and amplitude," *Proc. of SPIE*, vol. 9443, 94431B, 2015.
- [13] R. Hassen, Z. Wang, and M. Salama, "Multifocus image fusion using local phase coherence measurement," *LNCS, Image Analysis and Recognition*, vol. 5627, pp. 54-63, 2009.
- [14] K. Zhan, Q. Li, J. Teng, M. Wang, and J. Shi, "Multifocus image fusion using phase congruency," *Journal of Electronic Imaging*, vol. 24, no. 3, Article ID 033014, 2015
- [15] J. Woo, B. W. Hong, C. H. Hu, K. K. Shung, C. C. J. Kuo, and P. J. Slomka, "Non-rigid ultrasound image registration based on intensity and local phase information," *Journal of Signal Processing Systems*, vol. 54, no. 1-3, pp. 33-43, Jan. 2009
- [16] R. Hassen, Z. Wang, and M. Salama, "Multi-sensor image registration based-on local phase coherence," in *ICIP*, 2009, pp. 181-184.
- [17] M. Mellor and M. Brady, "Non-rigid multimodal image registration using local phase," *LNCS, MICCAI 2004*, vol. 3216, pp. 789-796, 2004.
- [18] B. S. Reddy and B. N. Chatterji, "An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 5, no. 8, pp. 1266-1271, Aug. 1996.
- [19] A. Wong, J. Orchard, "Robust multimodal registration using local phase-coherence representations," *Journal of Signal Processing Systems*, vol. 54, no. 1-3, pp. 89-100, 2009.
- [20] H. Foroosh, J. B. Zerubia, and M. Berthod, "Extension of phase correlation to subpixel registration," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 11, no. 3, pp. 188-200, 2002.
- [21] Z. Wang and E. P. Simoncelli, "Local phase coherence and the perception of blur," in *Advances in neural information processing systems (NIPS03)*, 2004, vol. 16, pp. 1435-1442.
- [22] R. Hassen, Z. Wang, and M. M. Salama, "Image sharpness assessment based on local phase coherence," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 22, no. 7, pp. 2798-2810, 2013.
- [23] G. Blanchet, L. Moisan, and B. Rougé, "Measuring the global phase coherence of an image," in *ICIP*, Oct. 2008, pp. 1176-1179.
- [24] G. Blanchet and L. Moisan, "An explicit sharpness index related to global phase coherence," in *ICASSP*, 2012, pp. 1065-1068.
- [25] S. Tiwari, V. P. Shukla, S. R. Biradar, and A. K. Singh, "A Blind Blur Detection Scheme Using Statistical Features of Phase Congruency and Gradient Magnitude," *Advances in Electrical Engineering*, vol. 2014, Article ID 521027, 10 pages, 2014.
- [26] P. Kovsesi, "Phase preserving denoising of images," in *DICTA*, Perth WA, Dec. 1999, pp 212-217.
- [27] A. Wong A, "Adaptive bilateral filtering of image signals using local phase characteristics," *Signal Processing*, vol. 88, no. 6, pp. 1615-1619, 2008.
- [28] A. Belaid, D. Boukerroui, Y. Maingourd, and J. F. Lerallut, "Phase-based level set segmentation of ultrasound images," *IEEE Trans. on Inform. Technol. in Biomedicine*, vol. 15, no. 1, pp. 138-147, 2011.
- [29] I. Hacihaliloglu, R. Abugharbieh, A. Hodgson, and R. Rohling, "Bone segmentation and fracture detection in ultrasound using 3D local phase features," *LNCS, MICCAI 2008*, vol. 5241, pp. 287-295, 2008.
- [30] J. J. Weng, "Image matching using the windowed Fourier phase," *Int. Journal of Computer Vision*, vol. 11, no. 3, pp. 211-236, Dec. 1993.
- [31] J. Zhou, Y. Xu, and X. Yang, "Quaternion wavelet phase based stereo matching for uncalibrated images," *Pattern Recognition Letter*, vol. 28, no. 12, pp. 1509-1522, 2007.
- [32] S. Nagashima, T. Aoki, T. Higuchi, and K. Kobayashi, "A subpixel image matching technique using phase-only correlation," in *Int. Symposium on ISPACS'06*, Dec. 2006, pp. 701-704.
- [33] V. Reddy and J. Talari, "Color image registration and template matching using quaternion phase correlation," *Ubiquitous Computing and Communication*, vol. 6, no. 1, pp. 714-721, 2011.
- [34] L. Lai and Z. Xu, "Global Motion Estimation Based on Fourier Mellin and Phase Correlation," in *CMES*, 2015, pp. 636-639.
- [35] K. Ito and T. Aoki, "Phase-based image matching and its application to biometric recognition." In *APSIPA*, 2013, pp. 1-7.
- [36] K. Miyazawa, K. Ito, T. Aoki, K. Kobayashi, and H. Nakajima, "A Phase-Based Iris Recognition Algorithm," *LNCS, Advances in Biometrics*, vol. 3832, pp. 356-365, Jan. 2006.
- [37] M. S. M. Asaari, S. A. Suandi, and B. A. Rosdi, "Fusion of band limited phase only correlation and width centroid contour distance for finger based biometrics," *Exp. Syst. Appl.*, vol. 41, no. 7, pp. 3367-3382, 2014.
- [38] C. H. Chan, M. A. Tahir, J. Kittler, and M. Pietikainen, "Multiscale local phase quantization for robust component-based face recognition using kernel fusion of multiple descriptors," *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 35, no. 5, pp. 1164-1177, 2013.
- [39] Y. Punsawad, Y. Wongsawat, "Fingerprint image enhancement using phase congruency," in *ROBIO 2008*, 2009, pp. 1643-1646.
- [40] X. Jing, Y. X. Hong, S. X. Xin, and M. X. Ying, "Medical Image Mosaic Technology Based on Image Phase Correlation," in *ICDH*, Nov. 2012, pp. 274 - 277.
- [41] E. Rahtu, J. Heikkilä, V. Ojansivu, and T. Ahonen, "Local phase quantization for blur-insensitive image analysis," *Image and Vision Computing*, vol. 30, no. 8, pp. 501-512, 2012.
- [42] Z. Wang and E. P. Simoncelli, "Translation insensitive image similarity in complex wavelet domain," in *ICASSP*, 2005, pp. 573-576.
- [43] M. G. A. Thomson, D. H. Foster, and R. J. Summers, "Human sensitivity to phase perturbations in natural images: a statistical framework," *Perception*, vol. 29, no. 9, pp. 1057-1069, 2000.
- [44] B. C. Hansen and R. F. Hess, "Structural sparseness and spatial phase alignment in natural scenes," *JOSA A*, vol.24, no.7, pp.1873-1885, 2007.
- [45] L. O'Hare and P. B. Hibbard, "Visual discomfort and blur," *Journal of vision*, vol. 13, no. 5, 12 pages, Apr. 2013.
- [46] "Реко́нструкция изображений," под ред. Г. Старка, пер. с англ. М.: Мир, 1992, 636 с.
- [47] M. H. Hayes, J. S. Lim, and A. V. Oppenheim, "Signal reconstruction from phase or magnitude," *IEEE Trans. on Acoustics*,

- Speech, and Signal Processing*, vol. 28, no. 6, pp. 672-680, Dec. 1980.
- [48] C. Ma, "Novel criteria of uniqueness for signal reconstruction from phase", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 39, no. 4, pp. 989-992, 1991.
- [49] A. Levi, H. Stark, "Signal restoration from phase by projections onto convex sets," *JOSA*, vol. 73, no. 6, pp. 810-822, 1983.
- [50] S. Urieli, M. Porat, and N. Cohen, "Optimal reconstruction of images from localized phase," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 7, no. 6, pp. 838-853, 1998.
- [51] E. A. Pavelyeva and A. S. Krylov, "Synthesis of phase and magnitude of images by Hermite projection method," *Pattern Recognition and Image Analysis*, vol. 25, no. 2, pp. 187-192, 2015.
- [52] Е. А. Павельева, А. С. Крылов, "Аппроксимация фазы проекционным методом Эрмита при восстановлении изображения по фазе," *Труды между. конф. GraphiCon*, Ростов-на-Дону, 2014, с. 131-134
- [53] Е. А. Павельева, "Поиск соответствий между ключевыми точками изображений радужных оболочек глаз с помощью метода проекционной фазовой корреляции," *Системы и средства информатики*, т. 23, №. 2, с. 74-88, 2013.
- [54] D. N. Korchagin and A. S. Krylov, "Projection Filtering in Image Processing," in *GraphiCon*, Moscow, 2000, pp. 42-45.
- [55] Е. А. Павельева, А. С. Крылов, "Определение локальных сдвигов изображений радужных оболочек глаз методом проекционной фазовой корреляции," *Труды между. конф. GraphiCon*, Москва, 2011, с. 188-191.
- [56] R. K. M. Hassen, "Local Phase Coherence Measurement For Image Analysis and Processing," Ph. D. thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 2013.
- [57] P. Kovesi, "Image Features from Phase Congruency," *Videre: Journal of computer vision research*, vol. 1, no. 3, pp. 1-26, 1999.
- [58] M. S. Morrone and R. A. Owens, "Feature detection from local energy," *Pattern recogn. letters*, vol. 6, no. 5, pp. 303-313, 1987
- [59] S. Venkatesh and R. Owens, "On the classification of image features," *Pattern Recogn. Letters*, vol. 11, no. 5, pp. 339-349, 1990
- [60] Z. Liu and R. Laganieri, "On the use of phase congruency to evaluate image similarity" in *ICASSP*, 2006, pp. 937-940.
- [61] J. W. Goodman and A. M. Silvestri, "Some effects of Fourier-domain phase quantization," *IBM Journal of research and development*, vol. 14, no. 5, pp. 478-484, 1970.
- [62] J. G. Daugman. "High confidence visual recognition of persons by a test of statistical independence," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 15, no. 11, Pp. 1148-1161, 1993.
- [63] N. Skarbnik, Y. Y. Zeevi, C. Sagiv, "The Importance of phase in image processing," CCIT Technical Report #773, Dept. of Electrical Engineering, Israel Institute of Technology, 2010.
- [64] V. Ojansivu and J. Heikkilä, "Blur insensitive texture classification using local phase quantization," *LNCIS, Image and signal processing*, vol. 5099, pp. 236-243, 2008.
- [65] С. Малла, "Вейвлеты в обработке сигналов," пер. с англ. Я. М. Жилейкина, Москва: Мир, 2005.
- [66] V. Tom, T. F. Quatieri, M. H. Hayes, and J. H. McClellan, "Convergence of iterative nonexpansive signal reconstruction algorithms," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 29, no. 5, pp. 1052-1058, 1981.
- [67] A. S. Krylov and D. N. Korchagin, "Fast Hermite Projection Method," *LNCIS, Image Analysis and Recogn.*, vol. 4141, pp. 329-338, Sep. 2006.
- [68] E. C. Titchmarsh, "Introduction to the theory of Fourier integrals," Oxford: Clarendon Press, 1948.

Об авторе

Павельева Елена Александровна – к.ф.-м.н., ассистент кафедры математической физики факультета ВМК МГУ.
E-mail: paveljeva@yandex.ru