

Конструирование главного меридиана купольной поверхности с использованием трансцендентных кривых *

В.А. Тюрин, М.В. Лагунова, Н.Д. Жилина

55555_73@mail.ru | mvlenn@mail.ru | zhilina@nngasu.ru

Россия, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

В работе рассматривается вопрос создания графического алгоритма построения главного меридиана поверхности главы купола с использованием трансцендентных кривых. В качестве составной плоской кривой, являющейся образующей при создании вращением вокруг вертикальной оси купольной поверхности, предлагается использовать цепную линию и линию изогнутой рейки. Описан графический алгоритм построения точки перегиба линии изогнутой рейки для решения проблемы сопряжения указанных кривых.

Ключевые слова: конструирование поверхностей, поверхность главы купола, составная плоская кривая, трансцендентные кривые, цепная линия, линия равного сопротивления, сопряжение кривых, точка перегиба.

Введение

Криволинейные поверхности, применяемые в архитектуре и строительстве, должны удовлетворять наперед заданным условиям. Эти условия должны включать требования как эстетические, так и конструктивные, технологические и экономические. Одной из задач архитектурно-строительного проектирования является конструирование поверхности купола. Поверхность главы купола является поверхностью вращения, образующей которой является составная плоская кривая. Изучение природных форм (луковица, ветка дерева и т.д.) показало, что сопряжения, переходы одних форм в другие лучше всего описываются не циркульными кривыми, а кривыми, которые в математике относятся к классу трансцендентных кривых.

В данной работе предлагается использовать при конструировании главного меридиана поверхности купола цепную линию и линию равного сопротивления [1].

Цепная линия – это кривая, форму которой принимает под действием силы тяжести однородная гибкая нерастяжимая нить с закрепленными концами. Большой интерес к цепной линии объясняется еще и тем, что поверхность вращения этой кривой вокруг прямой, лежащей в плоскости кривой, имеет наименьшую площадь по сравнению с площадями поверхностей вращения всех иных кривых, проходящих через две данные точки.

Линия равного сопротивления является вариацией цепной линии, форма которой повторяет очертание изогнутой гибкой рейки при условии равного сопротивления её материала.

Цепная линия, являющаяся формообразующим элементом многих природных форм, может быть

успешно использована при проектировании архитектурных форм, как линия естественная, рациональная, отражающая свойства равнонапряженности материала. Например, анализ формы купола Успенского собора в Кемии, выявил формообразующие элементы, повторяющие очертания подвешенной нити и изогнутой рейки (см. рис.1). Сочетание двух кривых, отображающих различные условия работы материала (растяжение – линия 0-2 и сжатие – линия 2-1-3), определило эстетическую форму поверхности [2].

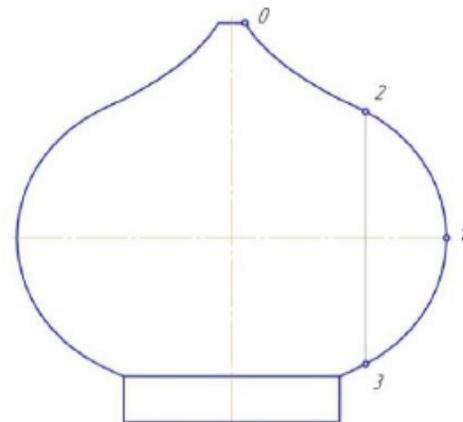


Рис. 1: Аппроксимация меридиана купольной поверхности двумя кривыми

Построение линии изогнутой рейки

Алгоритмы построения указанных двух кривых линий хорошо известны. На рис.2 показан алгоритм построения линии изогнутой рейки, используемый в архитектурной практике и основанный на способе построения трисектрисы Маклорена [1].

Его суть можно пояснить с помощью рассмотрения построения точки 3 линии изогнутой рейки. На оси Ox выбранной прямоугольной декартовой системы координат выбирается точка C , в качестве центра

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 15-07-05110. Работа опубликована при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-07-20482.

вспомогательной окружности с координатами $x = R + a, y = 0$, где a – числовой параметр, определяющий положение асимптоты конструируемой кривой, а R – радиус окружности.

На окружности задается точка (например, K), к которой из точки A , лежащей на оси Ox и на окружности, проводится отрезок AK . Затем из точки O начала координат проводится прямая, параллельная AK , до пересечения с вертикальной прямой, проходящей через точку K . Точка их пересечения и является одной из точек конструируемой линии изогнутой рейки (на рис. 2 это точка 3).

На рис. 1 видно, что в точке 2 имеет место сопряжение линии изогнутой рейки (участок 2-1-3) и цепной линии (участок 0-2). Поэтому возникает проблема рационального сопряжения данных линий в процессе конструирования составной кривой. Из рис. 2 ясно, что линия изогнутой рейки в некоторой точке меняет характер кривизны с выпуклости на вогнутость. Такое же изменение должно произойти в точке сопряжения двух кривых. Актуальной задачей при конструировании составной кривой становится поиск точки перегиба линии изогнутой рейки для использования её в качестве точки сопряжения. В практике архитектурного проек-

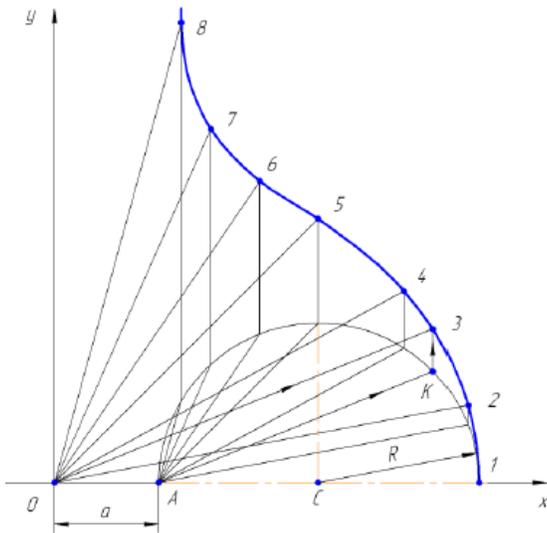


Рис. 2: Графический алгоритм построения линии изогнутой рейки

тирования купольной поверхности возникает необходимость разработки графического алгоритма построения такой точки. В данной статье описывается такой алгоритм на основе разработанного авторами аналитического алгоритма.

Алгоритм построения точки перегиба

Рассмотрим проблему поиска точки перегиба на линии изогнутой рейки. Выведем уравнение линии изогнутой рейки в параметрической форме. Для

этого будем использовать графический алгоритм построения линии изогнутой рейки, схематично показанный на рис. 2 и более подробно на рис.3 для пояснения вывода уравнения кривой в параметрической форме. Рассмотрим точку (x, y) , принадле-

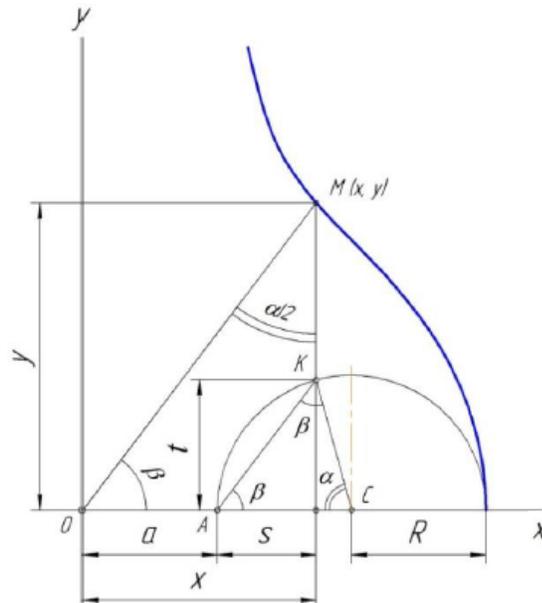


Рис. 3: Параметрическое задание линии изогнутой рейки

жащую проектируемой кривой и определим ее положение с помощью используемых в алгоритме параметров. В процессе её построения, используется точка K вспомогательной окружности, положение которой определяет $\angle \alpha = \angle ACK$. Будем использовать $\angle \alpha$ в качестве параметра при выводе уравнения линии изогнутой рейки. Параметры s и t (см. рис.3) выразим через начальные параметры a и R .

$$\begin{cases} x = a + s \\ y = \frac{x \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{cases} \quad (1)$$

$$2\beta + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{s}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{t}{\sin \beta},$$

$$t = R \sin \alpha, s = 2R \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2, x = a + 2R \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

$$\begin{cases} x = a + 2R \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 \\ y = \frac{x \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{cases} \quad (2)$$

Используя полученное уравнение кривой изогнутой рейки в параметрической форме (2), воспользуемся необходимым условием существования точки перегиба [2]:

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Проведя необходимые выкладки, получим уравнение (3), решив которое, получим соотношение (4), связывающее угловой параметр α искомой точки перегиба с начальными параметрами a и R .

$$\begin{vmatrix} R \sin \alpha & \frac{a}{\cos \alpha - 1} \\ R \cos \alpha & \frac{a \sin \alpha}{(\cos \alpha - 1)^2} - R \sin \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{a(\cos \alpha - \cos 2\alpha)}{(\cos \alpha - 1)^2} - R = 0, \tag{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{R - a}{2a + R}. \tag{4}$$

Полученная зависимость позволяет разработать удобный графический алгоритм для построения точки перегиба заданной линии изогнутой рейки. На рис.4 показано построение точки перегиба в соответствии с разработанным алгоритмом. Сущность графического алгоритма заключается в

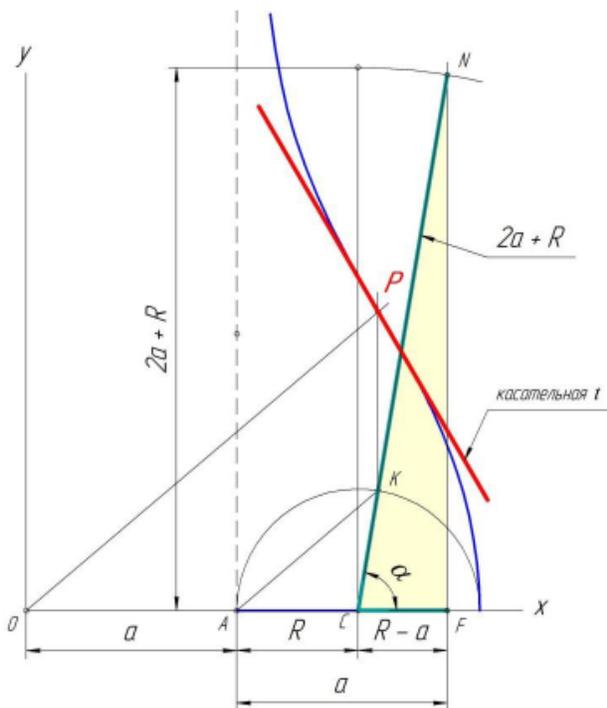


Рис. 4: Графический алгоритм построения точки перегиба линии изогнутой рейки

том, что для того, чтобы отложить необходимый угол нужно построить прямоугольный треугольник CNF , а для этого отложить от точки C катет $CF = R - a$ и гипотенузу $CN = 2a + R$, в соответствии с найденным соотношением (4).

Полученная на пересечении CN и вспомогательной окружности точка K позволяет найти точку перегиба P (с помощью описанного выше графического алгоритма построения точек на кривой изогнутой рейки). В точке P кривая меняет характер с

«вогнутости» на «выпуклость» и, следовательно, в этой точке произойдет сопряжение кривых, составляющих конструируемый меридиан.

Касательная t , построенная в полученной точке перегиба P , является общей для кривых, составляющих образующую конструируемой поверхности главы купола. Вторая кривая, участвующая в сопряжении, строится от точки P при условии соблюдения условия касания с прямой t .

Графические алгоритмы построения касательной в данной точке кривой и цепной линии по заданным начальным условиям известны и описаны в литературе [1], [3], но имеют ряд недостатков. Улучшение указанных алгоритмов с целью повышения их простоты и рациональности с точки зрения количества графических операций при построении является целью дальнейших исследований авторов данной статьи.

Заключение

Данный алгоритм опробован в учебном проектировании студентов факультета архитектуры и дизайна ННГАСУ в задачах конструирования поверхностей при различных исходных параметрах a и R . На основе полученных меридианов выполнены развертки и модели сконструированных поверхностей (рис. 5). Данный подход может быть расширен введением большего спектра трансцендентных кривых.



Рис. 5: Макет главы купольной поверхности

Литература

[1] Савелов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. Справочное руководство / Под ред. А.П. Нордена. Изд. 3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 296 с.

- [2] Михайленко В.Е., Ковалев С.Н. Конструирование форм современных архитектурных сооружений. – К.: Будивельник, 1978. – 112 с., ил. 56, табл. 27.
- [3] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Учебное пособие. – СПб: Издательство «Лань», 2010. – 608 с.

Об авторах

Тюрина Валерия Александровна, к.т.н., доцент, проф. кафедры инженерной геометрии, компьютерной графики и автоматизированного проектирования НГАСУ. 55555_73@mail.ru.

Лагунова Марина Викторовна, д.п.н., профессор, проф. кафедры инженерной геометрии, компьютерной графики и автоматизированного проектирования НГАСУ. mvlmn@mail.ru.

Жилина Наталья Дмитриевна, к.п.н., доцент, проф. кафедры инженерной геометрии, компьютерной графики и автоматизированного проектирования НГАСУ. zhilina@nngasu.ru.