Алгоритм решения задачи Аполлония на основе построения ортогональных окружностей*

Д.В. Волошинов
denis.voloshinov@yandex.ru
Россия, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А.Бонч-Бруевича

Статья посвящена рассмотрению ряда теоретических вопросов проективной геометрии и преобразования инверсии применительно к решению задачи Аполлония. Показано, что на основе расширения понятия радикальной оси, задачу Аполлония можно интерпретировать как унифицированный алгоритм сопряжения троек объектов, составленных из окружностей, прямых линий и точек, интерпретирующих окружности нулевого радиуса. Представлен новый геометрический алгоритм решения задачи Аполлония, основанный на построении ортогональных окружностей.

Ключевые слова: *геометрическое моделирование, проективная геометрия, преобразование инверсии, радикальная ось, задача Аполлония, сопряжение геометрических фигур.*

1. Введение

Задача Аполлония является одной из наиболее красивых и интересных задач геометрии. Со времени ее формулирования было разработано множество алгоритмов решения этой задачи, большинство из которых опираются на использования методов аффинной геометрии. Один из наиболее полных обзоров этих методов, а также сфер их практического приложения к решению геометрических задач и моделирования поверхностей, представлен профессором Н.А.Сальковым в [1, 2, 3]. Но, несмотря на довольно пристальное внимание к себе со стороны математиков и геометров, задача Аполлония продолжает таить в себе множество неизведанных геометрических свойств. Более того, можно с уверенностью утверждать, что геометрические свойства этой задачи являются фундаментальными для дальнейшего развития геометрической теории по всем ее направлениям. Они могут быть распространены и на пространства высших размерностей, служить основой для построения фрактальных проективных геометрических структур и других применений. К сожалению, объем настоящей статьи не позволяет затронуть в достаточной мере все эти вопросы, поэтому ниже будут представлены лишь некоторые соображения, которые возникли у автора в результате проведения экспериментов с геометрическими моделями в среде системы Симплекс, и которые, как он надеется, дадут вдумчивому читателю повод для размышлений и дискуссии, ибо содержание статьи затрагивает базовые термины и положения проективной геометрии, которые, возможно, покажутся нетипичными и потребуют переосмысления.

2. Радикальные оси пары объектов

Пусть имеются две исходные окружности d1 и d2 (рис. 1). Соединим их центры p1 и p2 прямой, найдем точки пересечения прямой с первой окружностью – p3, p4 и второй – p5, p6. Определим на прямой линии o1 инволюцию pr1 парами точек p3-p4 и p5-p6. Двойные точки этой инволюции p8 и p9 будут диаметральными точками окружности, центр которой и прямая o1 определят местоположение и ортогональное к o1 направление радикальной оси o2 окружностей d1 и d2. Аффинное свойство, заключающееся в том, что для каждой точки линейного ряда, носителем которого является прямая o2, степени этой точки по отношению к исходным объектам одинаковы, налицо.

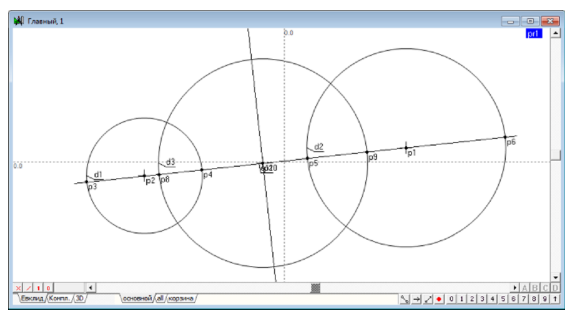

Рис. 1: Построение радикальной оси двух окружностей через инволюцию

Рассуждения, которые относятся к случаю, при котором одна их окружностей является окружностью с нулевым радиусом, аналогичны. При этом одна из двойных точек инволюции совпадает с точкой, которая изображает окружность нулевого радиуса (инволюция задается парой из совпадающих с этой точкой точек пересечения нулевой окружности с прямой o1). Эта и вторая двойная точка инволюции задают окружность, центр которой в совокупности с прямой o1 определяют искомую радикальную ось. В рассмотренном случае аффинное свойство точек ряда на прямой-носителе o2 остается справедливым.

*Работа опубликована по гранту РФФИ №16-07-20482.

В том случае, если обе окружности являются окружностями нулевого радиуса и изображаются точками, обе эти точки представляют собой двойные точки инволюции и окружность, построенная на них, как на диаметральных, задает своим центром положение искомой радикальной оси, которая в аффинной интерпретации является серединным перпендикуляром, проведенным к отрезку, заданному двойными точками инволюции.

Рассмотрим теперь такой вариант задания исходных данных, при котором один из исходных объектов изображается прямой линией.

Пусть имеется некоторая окружность (рис. 2). Переместим центр этой окружности в бесконечность по направлению прямой o1. Тогда такая окружность будет изображена на плоскости прямой линией, перпендикулярной к направлению расположения бесконечно удаленного центра. Это обобщение позволяет рассматривать процедуру построения радикальной оси, определенной в отношении собственной окружности и окружности, выродившейся в прямую линию, исходя из тех же соображений проективного характера алгоритма построения радикальной оси, который был приведен в предыдущих случаях. Соединим центр окружности d1 с несобственным центром окружности, представленной прямой линией o1, находящимся в ортогональном направлении по отношению к этой прямой. Прямая o2 пересекается с «окружностью» o1 в двух точках, одна из которых собственная – p4, вторая – несобственная – p5. Инволюция на прямой o1, заданная парами точек p4-p5 и p2-p3, полученными от пересечения прямой линии o1 и окружности d1, образует двойные точки p7 и p8, которые, в свою очередь, определяют окружность d2. Ее центр в совокупности с прямой o2 задает положение радикальной оси o3. Нетрудно видеть, что радикальная ось в этом случае совпадает с исходной прямой линией o1. Заметим также, что и аффинная трактовка понятия радикальной оси, сохраняет свою справедливость, поскольку на прямой линии всегда существуют две точки, отстоящие от рассматриваемой, на том же расстоянии, которое равно длине касательной, опущенной из точки на действительную окружность d1. Выбрав произвольную точку на радикальной оси, можно построить окружность, ортогональную как к исходным объектам, так и к самой оси.

Вариант задания исходных данных, при котором обе исходные окружности представлены прямыми линиями, заслуживает отдельного рассмотрения.

Пусть заданы две непараллельные прямые - «окружности» o1 и o2. Построение окружности, ортогональной к заданным объектам, возможно только в том случае, если радикальную ось рассматривать, как точку, являющуюся общей для двух точечных рядов, носителями которых являются исходные прямые.

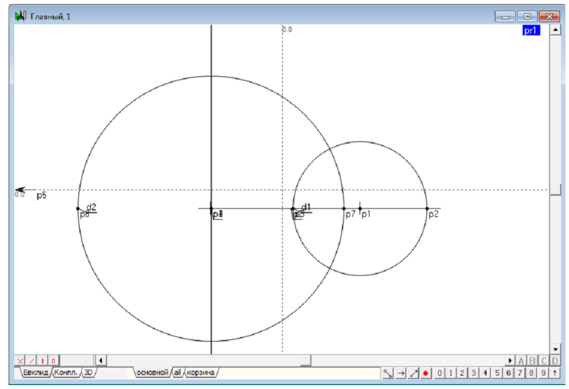

Рис. 2: Построение радикальной оси для прямой и окружности как следствие инволюционного соответсвия

Действительно, имея две пересекающиеся прямые, можно построить пучок окружностей, перпендикулярных обеим прямым, с центром в точке их пересечения. Однако только одна из них, нулевая, будет ортогональна как прямым, так и радикальной оси, вырожденной в точку.

Радикальный центр – общая точка пересечения радикальных осей трех окружностей определяет центр окружности, ортогональной к этим окружностям. В аффинной трактовке эта возможность является следствием того, что степень радикального центра по отношению ко всем трем окружностям одинакова.

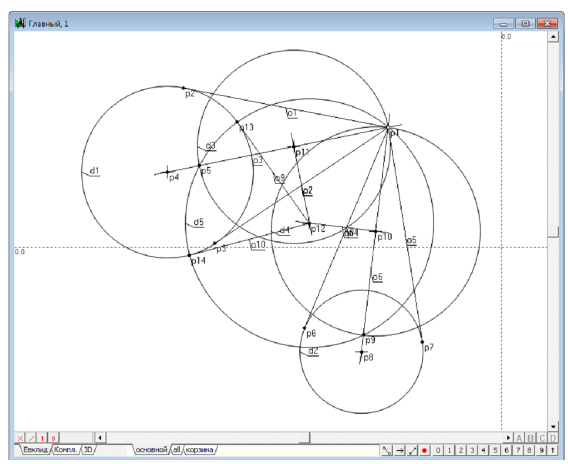

Рис. 3: Построение окружности, ортогональной к двум заданным и проходящей через фиксированную точку

Рассмотрим варианты построения радикального центра, если окружности изображаются, как точки и прямые линии. Пусть на плоскости заданы окружности d1 и d2, а также точка p1. Построим окружность, ортогональную к двум заданным и проходящую через заданную точку. Для решения поставленной задачи дважды воспользуемся алгоритмом построения радикальной оси относительно точки и окружности. Найдя радикальный центр трех исходных объектов как пересечение радикальных осей o7 и o8, опустим касательную из него на одну из окружностей и, проведя через точку касания окружность с центром в радикальном центре, найдем решение поставленной задачи (рис. 3).

Модифицируем условие, оставив на плоскости только одну окружность d1 и две исходные точки p1 и p2. Проведем через них окружность, ортогональную к заданной окружности d1. По аналогии с предыдущим случаем, получим радикальный центр p12, опустим из него касательные на окружность d1 и завершим решение нахождением окружности, перпендикулярной к окружности d1 и проходящей через точки p1 и p2 (рис. 4).

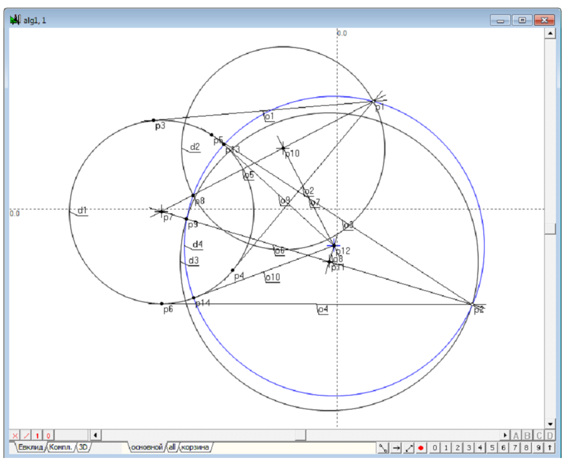

Рис. 4: Построение окружности, ортогональной к заданной и проходящей через две фиксированные точки

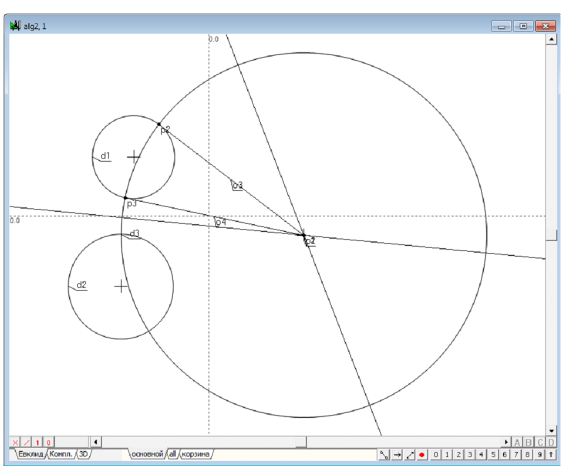

Рис. 5: Построение окружности, ортогональной к двум заданным окружностям и прямой линии

Решение задачи о проведении окружности через три точки тривиально, однако и она, по сути, сводится к построению радикального центра – точки пересечения серединных перпендикуляров треугольника, описанного возле него. Пусть теперь на плоскости заданы две окружности и прямая линия. Построим окружность, проходящую ортогонально к данным объектам. Задача сводится к построению радикальной оси o2, определяемой окружностями d1 и d2, и нахождению радикального центра путем пересечения прямой o2 с исходной линией o1 (рис. 5).

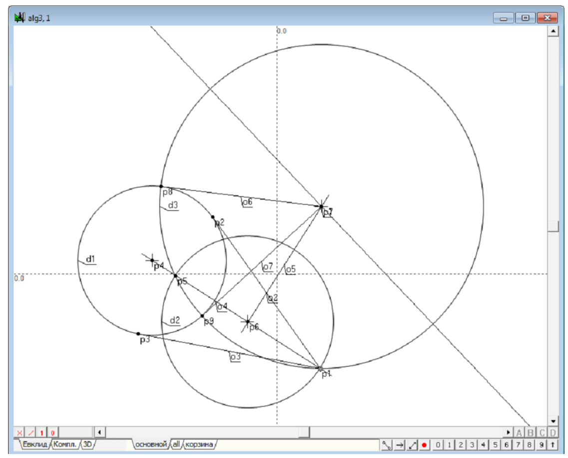

Рис. 6: Построение окружности, ортогональной к окружности, прямой и проходящей через фиксированную точку

Пусть заданы окружность d1, прямая линия и точка. Построим окружность, проходящую через точку p1 и пересекающую прямую и окружность под прямыми углами. Задача легко решается путем нахождения радикального центра, как точки пересечения радикальных осей, индуцированными исходными объектами задачи (рис. 6).

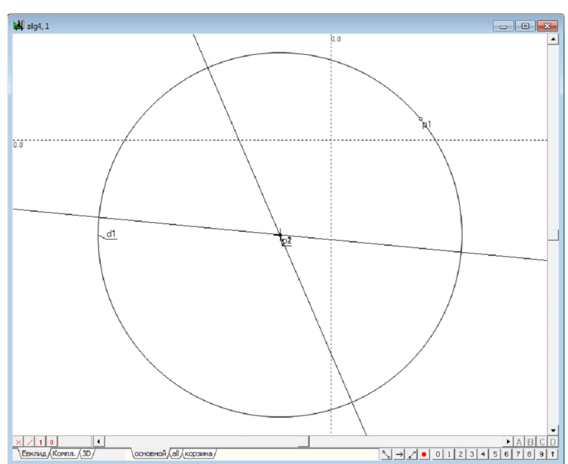

Рис. 7: Построение окружности, ортогональной к двум прямым и проходящим через заданную точку

Пусть на плоскости заданы точка p1 и две непараллельные прямые o1 и o2. Найдем окружность, проходящую через точку p1, и ортогональную к заданным прямым. Решение задачи исключительно просто. Поскольку радикальная ось двух прямых вырождена в точку и является точкой их пересечения, то результат решения задачи – окружность d1, проведенная через точку p1 с центром в месте пересечения прямых o1 и o2 (рис. 7).

Как видно из примеров, решение задач на построение ортогогальных окружностей к комбинациям различных объектов легко выполняется на основе построения соответственных радикальных осей.

3. Обобщение задачи аполлония на случай сопряжения окружностей и прямых линий

Рассмотрим теперь решение задачи Аполлония и покажем общий принцип ее применения для определения сопряжений к различным тройкам объектам, составляемым из окружностей, прямых линий и точек.

Как известно, решение задачи Аполлония – это пара окружностей, касательных к трем заданным окружностям. В общем случае задача имеет четыре решения. Без потери общности, покажем это решение на основе алгоритмов построения ортогональных окружностей к различным комбинациям объектов.

Прежде всего рассмотрим классический случай. Пусть на плоскости заданы три произвольные, но не вложенные друг в друга окружности d1, d2 и d3 (рис.8). Определим центры этих окружностей и построим на них, как на вершинах, треугольник со сторонами o1, o2 и o3. Установим инволюцию pr1 на прямой o1 парами точек p4-p5 и p6-p7 и найдем двойные точки этой инволюции p17, p18. Центр p19 окружности d4, определенной на точках p17, p18 как на диаметральных, задает положение радикальной оси окружностей d1 и d2, как перпендикуляра к прямой o1, проходящего через точку p19. Теперь на прямой o1 зададим новую инволюцию pr1a парами точек, составляющих две вершины треугольника p1 и p2, а также точки p17 и p18. Найдя двойные точки этой инволюции, определим положение точек пересечения двух касательных, проведенных к окружностям d1 и d2, причем сразу получим варианты для «внешнего» и «внутреннего» касания. Полученные точки можно трактовать, как образы окружностей нулевого радиуса, подобных двум заданным, а саму прямую o1 можно понимать, как окружность-прямую, ортогональную к трем заданным d1, d2 и p21 (p22). Аналогичные построения выполним и для пар окружностей d1-d3 и d2-d3. В результате построения обнаружим, что на чертеже образовались следующие тройки точек, принадлежащих единым прямым линиям: p21, p28, p35; p21, p36, p29; p22, p29, p35; p22, p36, p28. Без потери общности рассмотрим прямую o8 и три расположенные на ней точки p21, p28, p35. Все эти точки есть образы окружностей нулевого радиуса, полученных в результате построения, поэтому прямую o8 можно считать окружностью, проходящей ортогонально через эти три точки. Построим теперь окружность d7, ортогональную к исходным окружностям d1, d2 и d3. Рассматривая прямую o8, как окружность, проведем ортогонально по отношению к ней, к окружности d7, а также к каждой из исходных окружностей d1, d2 и d3, окружности d8, d9 и d10, и найдем соответственные точки пересечения p47, p48; p49, p50; p51,p52. Нетрудно видеть, что точки p47, p50 и p51 определяют внешнюю касательную окружность d11 по отношению к заданным, а точки p48, p49 и p52 – внутреннюю касательную окружность d12.

Кажущаяся громоздкость алгоритма обусловлена лишь стремлением показать проективную сущность, проявляющуюся в объектах и построениях задачи Аполлония. Практически же решение задачи сводится к построению оси подобия o8 трех исходных окружностей d1, d2 и d3; построению ортогональной окружности d7 и нахождению трех ортогональных окружностей к объектам o8-d7-d1, o8-d7-d2 и o8-d7-d3.

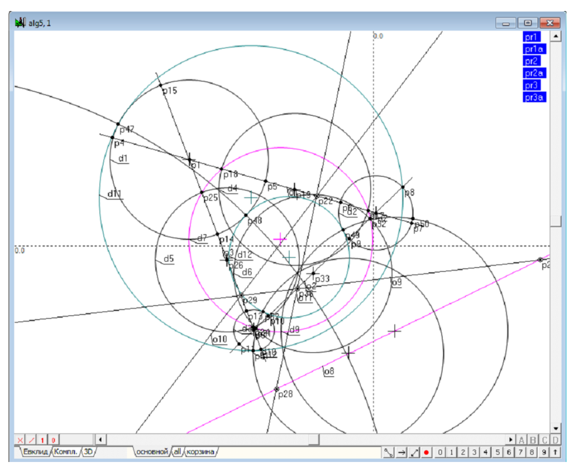

Рис. 8: Иллюстрация общего принципа построения окружностей, касательных к заданным трем окружностям, на основе единого прринципа построения ортогональных окружностей

Таким образом показано, что внутренняя природа задачи Аполлония строится на принципах проективной геометрии, состоит в соотнесении друг с другом совокупностей ортогональных окружностей и полностью может решаться этим единым методом без применения методов геометрии аффинной.

Следует заметить, что окружность d7 является окружностью инверсии по отношению к окружностям-результатам d11 и d12, а сама задача проявляет множество интереснейших геометрических свойств проективного характера, обсуждение которых, к сожалению, выходит за рамки настоящей статьи.

Рассмотрим теперь несколько примеров использования алгоритма задачи Аполлония для решения задач сопряжения объектов иной природы, нежели окружностей. Пусть заданы две окружности d1, d2 и прямая o1 (рис. 9). Необходимо построить окружности, касательные к этим объектам. Рассмотрим эту задачу в контексте решения задачи Аполлония. Построим окружность d3, ортогональную к заданным объектам. Проведем касательные o2 и o3 к окружностям d1 и d2 и получим нулевую окружность-точку p5. Общая касательная окружности d2 и прямой o1 проходит через точку p8 (p9) окружности и бесконечно удаленную точку. Зная точки p8 и p5 можно построить ось подобия o5. Построим теперь три окружности, ортогональные к оси подобия, окружности d3 и к каждому из исходных объектов. Тем самым получим окружности d4, d5 и d6, а также точки их пересечения с исходными объектами p10-p11, p12-p13 и p14-p15. Проведем теперь окружность d8, касательную к исходным объектам, через точки p10, p13 и p4, а окружность d7 через p11, p12, p15. Задача решена.

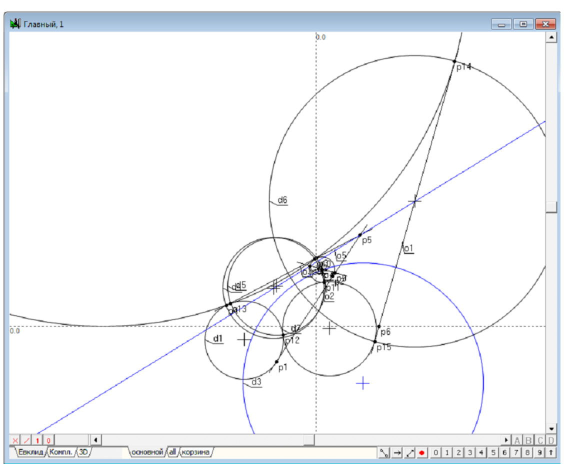

Рис. 9: Сопряжение двух окружностей и прямой линии методом задачи Аполлония

Пусть теперь задана окружность d1 и две прямые o1 и o2 (рис. 10). Найдем центр окружности p1. Проведем окружность d2, ортогональную к исходным объектам. Точки p2 и p5 – точки соприкосновения касательных к окружности и соответственных прямых o2 и o1. Зная эти точки, можно построить ось подобия o3 и провести по отношению к ней и окружности d2 три окружности, ортогональные к исходным объектам. Найдя точки пересечения построенных окружностей с соответственными исходными объектами, определим точки соприкосновения искомых окружностей с исходными объектами.

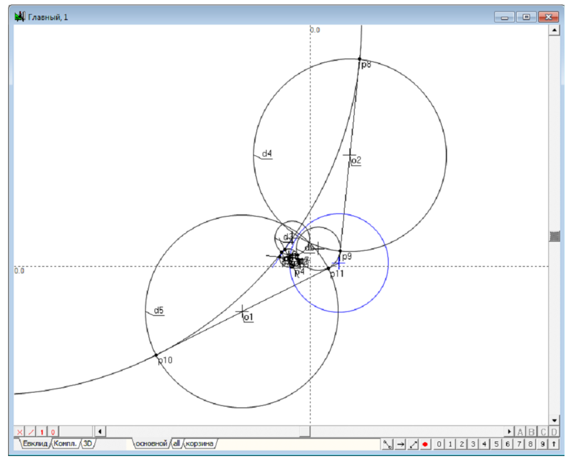

Рис. 10: Сопряжение двух прямых линий и окружности методом задачи Аполлония

4. Заключение

Из представленных примеров видно, что решение всех представленных задач на сопряжение трех объектов окружностью – суть решение задачи Аполлония, которая в свою очередь сводится к построению множеств ортогональных окружностей. Аналогичные рассуждения, проведенные в пространствах более высоких размерностей, а также использование аппарата преобразования инверсии, открывают возможность относительно простого и понятного построения проекционных моделей для сопряжения поверхностей и гиперповерхностей, без необходимости использования объектов-посредников, отличающихся от сферических.

Литература

[1] Свойства циклиды Дюпена и их применение. Часть 1 [Текст] / Н.А.Сальков // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3. – № 1. – С. 16-28.

[2] Свойства циклиды Дюпена и их применение. Часть 2 [Текст] / Н.А.Сальков // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3. – № 2. – С. 9-23.

[3] Свойства циклиды Дюпена и их применение. Часть 3 [Текст] / Н.А.Сальков // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3. – № 4. – С. 3-15.