

Метод геометро-динамического формообразования каналовой поверхности по дискретному каркасу ее образующих*

Д. Корчагин
korch-den@yandex.ru

Россия, Омский научно-исследовательский институт приборостроения

В статье рассмотрен метод образования каналовой поверхности по условию задания ее каркасом в виде набора конечного числа образующих. Целью разработки метода является получение гладкой каналовой поверхности в виде отсечков, включающих заданную дискретную последовательность образующих каркаса. В предлагаемом методе поверхность образуется путем гладкой стыковки отсечков по общим образующим каркаса вдоль направляющей линии. Направляющая линия в свою очередь определяется в виде сплайновой кривой с учетом динамических характеристик образующих, таких как центры масс и осевые моменты инерции. Осевые моменты инерции служат для доопределения значений производных радиус-вектора направляющей линии в опорных точках (центрах масс, образующих), требуемых для построения направляющей линии в виде сплайна. Направляющая линия в предлагаемом методе создается последовательно на основе двух типов сплайнов. При этом на начальном этапе используются кубические сплайны, от которых далее совершается переход к составному сплайну Эрмита пятой степени. Условие гладкости стыковки отсечков обеспечивается единственностью трехгранника Френе в опорных точках направляющей линии и непрерывностью функции, моделирующей изменение образующих линий отсечков и обеспечивающей стыковку отсечков по общим образующим заданного каркаса.

Ключевые слова: каналовая поверхность, гладкая стыковка отсечков, направляющая линия, динамические характеристики линии

1. Введение

Рассмотрим метод образования каналовой поверхности в виде отсечков, гладко состыкованных между собой, по условию задания каналовой поверхности каркасом в виде набора конечного числа образующих. Под отсечком каналовой поверхности будем понимать часть проектируемой каналовой поверхности ограниченной смежными образующими заданного каркаса. Предлагаемый метод является развитием каркасно-кинематического метода направляющей линии проектирования и расчета поверхностей сложных технических форм, реализующего движение образующей в пространстве по такому закону, когда образующая проходит через конечное число наперед заданных произвольно ориентированных линий произвольной формы, причем многообразие возможных форм проектируемых поверхностей обеспечивается любым числом параметров формы образующей и сколько угодно сложной по форме направляющей линией [6].

2. Определение направляющей линии

Построение поверхности в предлагаемом методе начнем с определения направляющей линии, связанной с заданным каркасом поверхности. В качестве линий каркаса будем рассматривать плоские замкнутые осесимметричные кривые, произвольным образом ориентированные в пространстве относительно базовой системы координат $Oxuz$. Направляющую линию будем определять в виде кусочной кривой, имеющей в качестве базовых точек

центры масс образующих заданного каркаса при условии, чтобы касательные к направляющей линии в центрах масс были перпендикулярны к плоскостям образующих. Таким образом, направляющую линию можно определить с помощью кубической интерполяции по дискретной информации в виде координат точек и касательным, доопределив длины касательных в центрах масс. Направление касательных будем выбирать совпадающим с направлением перехода от предыдущей образующей к последующей. Длины касательных будем определять через динамические характеристики образующих, а именно осевые моменты инерции площадей сечений, ограниченных образующими. Осевые моменты инерции будем вычислять относительно осей симметрии, проходящих через центры масс образующих и осей перпендикулярных к плоскостям образующих, также проходящих через центры масс образующих, т.е. будем вычислять главные моменты инерции. Для каждой образующей потребуется вычислить по три осевых момента инерции, которые для каждой образующей позволят построить эллипсоид инерции, используя зависимость между моментом инерции J образующей относительно оси, проходящей через точку центра масс, и расстоянием до точки K , принадлежащей эллипсоиду инерции на оси от центра масс образующей O [3]

$$OK = \frac{1}{\sqrt{J}} \quad (1)$$

Вычислив значение полуосей эллипсоидов инерции образующих, лежащих на осях перпендикулярных к плоскостям образующих, примем эти значения в качестве длин касательных направляющей линии.

Работа опубликована по гранту РФФИ №16-07-20482.

Таким образом, сможем записать каждый из фрагментов направляющей линии между заданными образующими в виде уравнений [7]

$$\tilde{x}k(t) = \sum_{j=1}^4 B_{j_x}^{t^{j-1}}, \tilde{y}k(t) = \sum_{j=1}^4 B_{j_y}^{t^{j-1}}, \tilde{z}k(t) = \sum_{j=1}^4 B_{j_z}^{t^{j-1}} \quad (2)$$

где: B^j – коэффициенты, вычисляемые исходя из координат центров масс образующих линий и полуосей эллипсоидов инерции, t – параметр, $0 \leq t \leq 1$. Определенная выше направляющая линия в точках стыка фрагментов будет иметь разные значения второй производной, что ведет к «вращению» трехгранника Френе направляющей линии вокруг касательной [6]. Для исключения этого явления сделаем переход от кубического сплайна к сплайну Эрмита пятой степени [4]. Имея координаты узловых точек направляющей линии, направления и длины касательных в них для вычисления сплайна Эрмита пятой степени будем брать в качестве вторых производных значения вторых производных выше определенного кубического сплайна. Поскольку для смежных фрагментов кубического сплайна эти значения различны, будем выбирать одно из двух вычисленных значений, оценивая выбор по форме получаемой образующей, наиболее приближенной к первоначальному сплайну. В результате вычисленная направляющая линия в виде сплайна Эрмита пятой степени в матричном виде

$$L_n = (\tilde{x}_n(t), \tilde{y}_n(t), \tilde{z}_n(t)) \quad (3)$$

будет иметь в точках стыковки фрагментов совпадение трехгранников Френе, где n – номер сегмента сплайна, описывающего направляющую линию, $n = 1, \dots, q - 1$, q – количество заданных образующих. Для дальнейшего образования поверхности необходима информация об ортах направляющей линии или трехграннике Френе вдоль всей направляющей линии. Уравнения ортов трехгранников Френе рассчитаем через взаимосвязь дифференциально-геометрических характеристик направляющей линии и ее проекций на плоскости базовой системы координат на основании «реконструктивной геометрии кривой линии» [5]. Таким образом, на основании [5] векторы касательной и нормали получим в виде:

$$\tau(t) = \tau_x(t) \cdot i + \tau_y(t) \cdot j + \tau_z(t) \cdot k, 0 \leq t \leq 1, \quad (4)$$

$$\nu(t) = \nu_x(t) \cdot i + \nu_y(t) \cdot j + \nu_z(t) \cdot k, 0 \leq t \leq 1, \quad (5)$$

где: $\tau_x(t), \tau_y(t), \tau_z(t), \nu_x(t), \nu_y(t), \nu_z(t)$ – направляющие косинусы единичных векторов касательной $\tau(t)$ и нормали $\nu(t)$ образованные с ортами i, j, k базовой системы координат $Oxyz$.

На основании известной в дифференциальной геометрии формулы $\beta = \tau \times \nu$ получаем единичный вектор бинормали в виде:

$$\beta(t) = \beta_x(t) \cdot i + \beta_y(t) \cdot j + \beta_z(t) \cdot k, 0 \leq t \leq 1, \quad (6)$$

где: $\beta_x(t), \beta_y(t), \beta_z(t)$ – направляющие косинусы единичного вектора бинормали $\beta(t)$, образованные с ортами i, j, k базовой системы координат $Oxyz$.

3. Образование отсеков канальной поверхности

Дальнейшее изложение метода будем проводить на примере образующих в форме суперэллипсов (которые, как требуется выше, являются плоскими замкнутыми осесимметричными кривыми), заданных уравнениями в параметрическом виде в плоскостях содержащих образующие [8]:

$$\begin{aligned} x_i &= A_i \cdot \operatorname{sgn}(\cos \omega) \cdot |\cos \omega|^{\frac{2}{n_i}}, \\ y_i &= B_i \cdot \operatorname{sgn}(\sin \omega) \cdot |\sin \omega|^{\frac{2}{n_i}} \end{aligned} \quad (7)$$

где: A_i и B_i – полуоси суперэллипса, n_i – положительное число, $\operatorname{sgn}(\cos \omega)$, $\operatorname{sgn}(\sin \omega)$ – кусочно-постоянные функции, определяемые следующим образом [2]:

$$\operatorname{sgn}(\cos \omega) = \begin{cases} -1, \cos \omega < 0 \\ 0, \cos \omega = 0 \\ 1, \cos \omega > 0 \end{cases}, \operatorname{sgn}(\sin \omega) = \begin{cases} -1, \sin \omega < 0 \\ 0, \sin \omega = 0 \\ 1, \sin \omega > 0 \end{cases}$$

где: ω – параметр, $0 \leq \omega \leq 2\pi$. Положение образующих (7) в пространстве задается матрицами поворота относительно осей координат x, Oy, Oz и перемещения относительно центра координат базовой системы координат xyz [7]. Для построения поверхности потребуется график площадей образующих, представляющий собой плоскую кривую, характеризующую закон изменения площадей нормальных сечений проектируемой поверхности вдоль направляющей линии. С этой целью выполним интерполяцию значений площадей заданных сечений с помощью кубических сплайнов. Для обеспечения непрерывности изменения формы образующих проектируемой поверхности при переходе от одной заданной образующей к другой необходимо получить закон непрерывного изменения показателей степеней суперэллипсов вдоль направляющей линии. Для этих целей применим сплайновую интерполяцию. Следующим шагом осуществим вычислим угла α_i между полуосями A_i суперэллипсов и линиями I_i , образованными пересечением нормальных плоскостей трехгранников Френе с плоскостями параллельными плоскости Oxz и проходящими через центры масс образующих. Через углы α_i по ранее вычисленным моментам инерции заданных образующих определим моменты инерции заданных образующих относительно линий I_i и перпендикулярных к ним прямых линий II_i [1], также расположенных в нормальных плоскостях трехгранника Френе

$$\begin{aligned} J_{I_i} &= J_{x_i}(\cos \alpha_i)^2 + J_{y_i}(\sin \alpha_i)^2, \\ J_{II_i} &= J_{x_i}(\sin \alpha_i)^2 + J_{y_i}(\cos \alpha_i)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее интерполируем значения моментов инерции относительно этих осей вдоль направляющей линии между всеми заданными образующими. Таким

образом, в каждой точке направляющей линии будем иметь площадь сечения, ограниченного искомой образующей, значения моментов инерции площади относительно двух прямых Π и Π' , расположенных в нормальных плоскостях трехгранника Френе направляющей линии, а также значение показателя степени суперэллипса. По выражениям для площади и моментов инерции суперэллипса составим систему уравнений

$$\begin{aligned} S_t &= 4A_t B_t \left(\frac{\Gamma(1 + \frac{1}{n_t})^2}{\Gamma(1 + \frac{2}{n_t})} \right), \\ J_{It} &= \rho \frac{1}{2} A_t B_t^3 \varepsilon_t B \left(\frac{3\varepsilon_t}{2}, \frac{\varepsilon_t}{2} \right) (\cos \alpha_t)^2 + \\ &+ \rho \frac{1}{2} A_t^3 B_t \varepsilon_t B \left(\frac{3\varepsilon_t}{2}, \frac{\varepsilon_t}{2} \right) (\sin \alpha_t)^2, \\ J_{II t} &= \rho \frac{1}{2} A_t B_t^3 \varepsilon_t B \left(\frac{3\varepsilon_t}{2}, \frac{\varepsilon_t}{2} \right) (\sin \alpha_t)^2 + \\ &+ \rho \frac{1}{2} A_t^3 B_t \varepsilon_t B \left(\frac{3\varepsilon_t}{2}, \frac{\varepsilon_t}{2} \right) (\cos \alpha_t)^2, \end{aligned} \quad (9)$$

решая которую для каждой точки направляющей линии с текущим параметром t вычислим значения полуосей A_t , B_t и угол поворота α_t полуоси A_t суперэллипса и линией I_t . Таким образом, уравнения (7) можно представить как выражения функции площади и моментов инерции

$$x = x(t, S_t, A_t, B_t, n_t), y = y(t, S_t, A_t, B_t, n_t) \quad (10)$$

Полученный результат позволяет нам производить непрерывный поворот образующих (10) в нормальных плоскостях трехгранника при его непрерывном движении вдоль направляющей линии с помощью матрицы поворота

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_t & \sin \alpha_t & 0 \\ -\sin \alpha_t & \cos \alpha_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

Для получения уравнения, описывающего закон изменения образующих канальной поверхности, остается связать уравнения образующих (10) с трехгранником Френе направляющей линии. Выполним разложение базиса (4), (5), (6) трехгранника по базису базовой системы координат $Oxyz$ в виде матрицы и найдем обратную ей матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} \nu_i & \beta_i & \tau_i \\ \nu_j & \beta_j & \tau_j \\ \nu_k & \beta_k & \tau_k \end{pmatrix}^{-1}, \quad (12)$$

которая задает преобразование, ведущее к получению уравнения образующей в нормальной плоскости трехгранника, записанного в базовой системе координат. Уравнения образующих (10) запишем в виде матрицы

$$G_n = (x_n, y_n, 0) \quad (13)$$

На основании выражений (3), (11), (12), (13) запишем уравнения n отсеков канальной поверхности в матричной форме

$$P_n = L_n + G_n \cdot R_{1n} \cdot R_{2n}$$

На (Рис.1) приведен пример стыковки двух отсеков канальной поверхности, образованных с помощью данного метода, а на (Рис.2) также показана стыковка двух отсеков по тому же каркасу с использованием направляющей линии, для образования которой применялись только кубические сплайны. Визуализация сетки полученных в обоих случаях поверхностей позволяет оценить гладкость

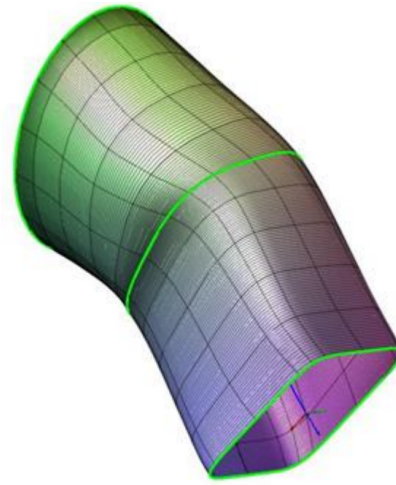


Рис. 1: Стыковка отсеков канальной поверхности с направляющей линией на основе сплайна Эрмита пятой степени.

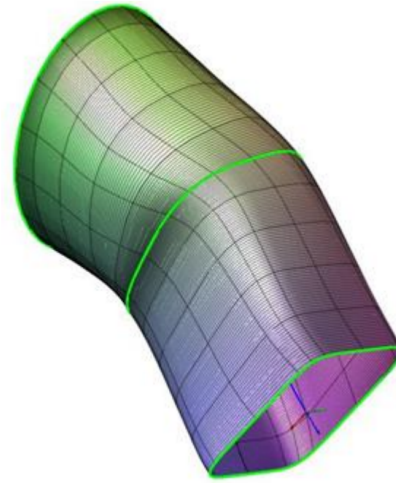


Рис. 2: Стыковка отсеков канальной поверхности с направляющей линией на основе кубического сплайна.

стыковки составляющих их отсеков по общим образующим.

4. Заключение

В статье предложен метод образования канальной поверхности по дискретному каркасу ее образующих, являющийся развитием каркасно-кинематического метода направляющей линии проектирования и расчета поверхностей сложных технических форм. Отличительным условием рассмотренного метода является отсутствие исходной информации о направляющей линии, для образования которой предложен расчетный алгоритм, основанный на динамических характеристиках, заданных образующих, таких как центры масс и осевые моменты инерции. Осевые моменты инерции в ме-

тоде также выступают в качестве параметроносителей образующих проектируемой поверхности.

Литература

- [1] Беляев Н.М., Сопротивление материалов, Москва, 1965.
- [2] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А., Справочник по математике, Москва, 1964.
- [3] Жуковский Н.Е. Теоретическая механика, Москва-Ленинград, 1952.
- [4] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций, Москва, 1980.
- [5] Корчагин Д.С., Панчук К.Л. Реконструктивная геометрия кривой линии, Прикладная геометрия. - 2011. - № 13. - с. 1-11.
- [6] Осипов В.А. Машинные методы проектирования непрерывно-каркасных поверхностей, Москва, 1979.
- [7] Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики, Москва, 2001.
- [8] Jaklic A., Leonardis A., Solina F. Segmentation and Recovery of Superquadrics, Springer Science+Business Media B.V., 2000.