

Метод описания морфологических закономерностей изображений векторным полем

Golov Nickolay
Department of Computational Mathematics and Cybernetics
Moscow State University, Moscow, Russia
golov@forecsys.ru

Аннотация

В статье рассматривается метод описания двумерных изображений векторным полем.

Метод предназначен для описания изображений с ярко выраженной морфологической структурой, например, изображений папиллярных узоров, радужных оболочек или рельефов местности.

Изображения представляются в виде набора векторов. Алгоритм преобразования изображения в набор векторов произволен, это могут быть, например, направляющие векторы ветвей скелета, или касательные к границам.

Для описания набора векторов строится аппроксимирующее векторное поле. Векторное поле строится как набор линейных векторных функций. Используемый тип векторных функций взят из теории систем линейных дифференциальных уравнений. Каждая векторная функция в наборе ищется явно, методом наименьших квадратов.

Особенностью метода является высокая скорость работы, устойчивость результатов его работы к поворотам и сдвигам.

Keywords: Биометрия, векторное поле, идентификация динамической модели, обратная задача, аналитическая аппроксимация, дискретно-непрерывный скелет, биометрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00542).

Данный метод разрабатывался для решения задач биометрической идентификации по изображениям отпечатков пальцев и по изображениям радужных оболочек глаз. В обеих задачах на исходных изображениях присутствовала ярко выраженная морфологическая структура – паутину линий стромы на изображениях радужки и узор папиллярных линий на изображениях отпечатков пальцев удавалось выделить, но по ним не удавалось построить признаковое описание, позволяющее с достаточной степенью надежности проводить идентификацию и верификацию изображений. Наиболее показателен пример папиллярных узоров, которые до сих пор сравниваются по количеству «особых» точек – точек обрыва или схождения папиллярных линий. При этом часть папиллярных узоров полностью лишена таких точек.

Цель разработки данного метода – применение к описанию папиллярных узоров и радужных оболочек подхода, основанного на работах D. Mumford и J. Shah [1], и применяемого многими исследователями: [2], [3], [4], [5]. Данный подход предполагает несколько этапов. На первом

этапе на изображении выделяются примитивы: точки изображения [5], точки построенного на изображении морфологического скелета [4], или векторы нормалей к поверхности [2]. Таким образом, на первом этапе изображение представляется как множество примитивов.

На втором этапе выбирается математическая модель.

На третьем этапе происходит выделение на изображении значимых областей – «meaningful regions» [1]. Значимая область – это подмножество множества примитивов, которое может быть надежно описано выбранной математической моделью. В работе [5] в качестве модели были выбраны трехмерные цилиндры – «sticks». В качестве значимых областей выступали все возможные цилиндрические объекты (например, конечности людей или животных). В работе [4] в качестве математической модели был выбран геометрический хэш, в качестве значимых областей выступали кластеры точек морфологического скелета. В работах [1] и [2] в качестве математической модели были выбраны гладкие непрерывные функции, поэтому в качестве значимых областей использовались фрагменты изображения без резких перепадов яркости, т.е. области, где поверхность может быть описанная гладкой функцией.

На четвертом этапе набор математических моделей, аппроксимирующих найденные значимые области, используется в качестве признакового описания изображения, и применялся для сравнения, поиска, или сопоставления изображений (alignment).

В большинстве описанных работ подбор значимых областей и построение аппроксимирующих математических моделей выполнялся итеративно.

В данной работе сделана попытка описать изображения особого вида, такие как изображения папиллярных узоров или радужных оболочек глаз, используя в качестве математической модели линейное векторное поле.

В качестве примитивов в данной задаче выбраны вектора. Под вектором в данной задаче понимается двухэлементный вектор с заданными координатами начала:

$$\vec{p} = ((x, y); (\partial x, \partial y)), \quad (1)$$

где (x, y) – координаты начала вектора, $(\partial x, \partial y)$ – направление вектора (векторы нормируются до единичной длины). Методы построения векторов из изображения радужной оболочки или папиллярного узора рассмотрены в следующих разделах.

При выборе математической модели учитывались следующие факторы:

- изображение должно быть описано не через локальные особенности, а через наиболее общие закономерности;
- математическая модель должна задаваться небольшим набором параметров;
- математическая модель должна описывать как можно более широкий спектр глобальных особенностей изображения, отчетливо различаемых человечески глазом.

В качестве математической модели было выбрано линейное векторное поле $(\partial x, \partial y) = f(x, y)$:

$$\begin{cases} \partial x = a \cdot x + b \cdot y - m \\ \partial y = c \cdot x + d \cdot y - n \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $(\partial x, \partial y)$ это координаты вектора векторного поля в точке (x, y) .

Вектор $(\partial x, \partial y)$ можно рассматривать как координаты вектора или как дифференциал некоторой параметрической кривой в точке (x, y) . Если рассматривать $(\partial x, \partial y)$ как дифференциал, то векторное поле (2) можно изобразить на плоскости в виде семейства кривых, вектор касательной к которым в каждой точке (x, y) совпадает со значением $(\partial x, \partial y)$, получаемым из (2). Можно также рассмотреть вектор $(\partial x, \partial y)$ как градиент некоторой функции потенциала.

Линейное векторное поле (2) широко известно и хорошо изучено. Оно порождает несколько типов семейств кривых. Эти типы семейств известны как «узел», «седло», «фокус», «полюс», «дискретический узел» и «вырожденный узел». Все шесть типов показаны на рис.1. Одной из основных особенностей векторного поля (2) является взаимно однозначная зависимость между типом порождаемого семейства и собственными значениями матрицы параметров функции (2).

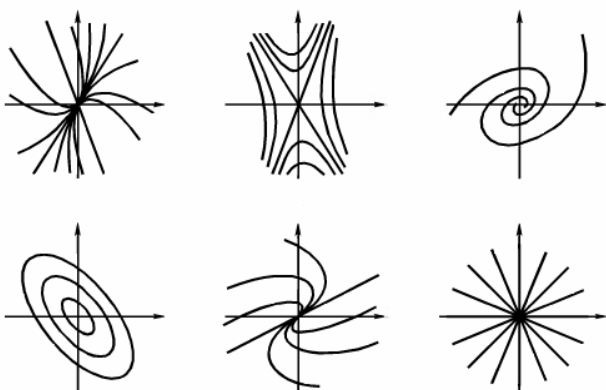


Рис. 1: Виды векторных полей, задаваемых системой (2).

Наряду с приведенными выше аргументами, при выборе в качестве модели векторного поля (2) учитывались следующие факторы. Во-первых, наличие в системе (2) только линейной зависимости позволило применить богатый арсенал методов линейной алгебры для идентификации и

исследования модели. Во-вторых, если рассматривать $(\partial x, \partial y)$ как градиент некоторой функции потенциала, то систему (2) можно рассматривать как линейную составляющую разложения функции потенциала в ряд Тейлора. Разложение функций в ряд Тейлора в окрестностях, в которых сохраняется непрерывность и дифференцируемость, является мощным инструментом исследования поведения функций. Прикладной характер данной задачи не позволяет строго доказать непрерывность или кусочную непрерывность входных данных, однако изучение больших выборок данных из рассматриваемой предметной области заставляет предположить наличие как минимум кусочной непрерывности.

Для успешной реализации описанного выше подхода для выбранных примитивов и математической модели, необходимо разработать алгоритм выделения значимых областей, алгоритм построения аппроксимирующего векторного поля для значимой области, алгоритм сравнения векторных полей и подтвердить применимость алгоритмов к образцам изображений из рассматриваемой предметной области.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Хотя на рис. 1 видно, что векторным полем вида (2) можно описать достаточно широкий класс векторных полей, очевидно, что большинство изображений рассматриваемых предметных областей слишком сложны, чтобы быть адекватно описанными одним полем вида (2).

Поэтому в данном методе предполагается не описывать всё изображение одним векторным полем, а выделять на нем кластеры векторов (1), исходя из критерия качества аппроксимации их векторными полями (2), и описывать каждый кластер отдельным полем вида (2).

Алгоритмы получения множества векторов из исходных изображений вынесены за рамки данной статьи. Тип алгоритма, используемого для получения множества векторов важен только для того, чтобы определить класс изображений, на котором можно ожидать построение устойчивых векторных полей.

Например, множество векторов для дактилоскопического узора строилось как набор направляющих векторов ветвей дискретно-непрерывного скелета [6].

Для изображений радужной оболочки множество векторов строилось по результатам работы алгоритма прослеживания линий [7].

В качестве векторов для множества могут также использоваться касательные к линиям уровня яркости, касательные к границам на изображении, направления сильнейших градиентов на изображении.

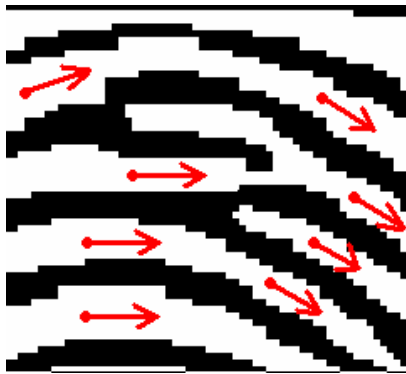


Рис. 2: Пример: папиллярный узор и описывающие его векторы.

Рассмотрим вопрос устойчивости исходных данных к шумам и искажениям.

Определение. Под устойчивостью набора векторов понимается, устойчивость множества кривых, к которым вектора набора могут выступать касательными. Множество кривых на изображении называется устойчивым, если при совмещении исходного и искаженного изображений для каждой точки кривой с одного изображения найдется близкая (лежащая в некоторой \mathcal{E} -окрестности) точка кривой с другого изображения, причем касательные в этих точках должны быть коллинеарны.

Пример. Если рассмотреть на рис. 2., смещение векторов вдоль папиллярных линий или незначительное изменение их количества является устойчивым изменением набора. На рис. 2 в качестве устойчивого множества кривых выступает множество центральных осей папиллярных линий, поэтому добавление в набор любого вектора, касательного к некоторой центральной оси, не нарушает устойчивости набора. Нарушение устойчивости – это отклонения векторов от центральных осей папиллярных линий или отсутствие в наборе векторов, соответствующих отдельным значимым папиллярным линиям.

Устойчивость набора векторов зависит от используемого алгоритма построения набора и от исходного изображения.

Пример. Если набор векторов строится как набор касательных к границам, то изображение с четкими границами порождает устойчивый набор векторов, а изображение без границ – неустойчивый. Если набор векторов строится как набор направляющих векторов ветвей скелета – то устойчивость набора определяется устойчивостью дискретно-непрерывного скелета.

Разрабатываемый метод должен выделять получать на вход изображение в виде устойчивого множества векторов, находить на изображении области, аппроксимируемые векторным полем вида (2) (значимые области), находить параметры векторных полей, аппроксимирующих найденные области, и генерировать устойчивые описания построенных векторных полей.

3. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основным для данного метода является понятие кластера, используемого как эквивалент описанного выше понятия «значимая область».

Определение. Кластер – это подмножество множества векторов.

$$K \in \{p \mid p \in P\}, \quad (3)$$

где P – множество всех векторов, описывающих изображение. Критерием принадлежности векторов кластеру является совокупная ошибка аппроксимации векторов кластера векторным полем вида (2). Подмножество берется вместо всех векторов набора, потому что векторная функция (2) недостаточно мощна, чтобы описывать все возможные изображения. Изображения из рассмотренных предметных областей, такие как изображения папиллярных узоров и радужных оболочек, могут включать несколько глобальных особенностей, подобных приведенным на рис. 1. Поэтому математическая модель, описывающая изображения, тоже может включать несколько функций вида (2). Процесс построения таких функций включает в себя выделение подмножеств векторов (кластеров), хорошо описываемых одной функцией вида (2), и подгонку значений параметров этих функций.

Основной идеей данного метода является идентификация модели векторного поля (2), соответствующей кластеру, которая заключается в подборе наилучших значений следующих параметров:

$$V = \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \end{pmatrix}, \quad (4)$$

На основе кластера может быть вычислен набор моментов.

$$M(K) = \{M_1, M_x, M_{dx}, M_y, M_{dy}, M_{xx}, M_{xy}, M_{yy}, M_{xdx}, M_{xdy}, M_{ydx}, M_{ydy}\}, \quad (5)$$

где $M_1 = \sum_{p \in K} 1$, $M_x = \sum_{p \in K} x_p$, $M_{xdy} = \sum_{p \in K} (x_p \cdot dy_p)$,

$$M_{yy} = \sum_{p \in K} (y_p \cdot y_p), \dots$$

4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ДЛЯ КЛАСТЕРА

Для идентификации модели векторного поля (2), соответствующей кластеру (3), нужно подобрать параметры, минимизирующие суммарную для всех точек разницу между векторами из кластера, и векторами векторного поля в начальных точках векторов кластера (векторами в точках (x, y) , вычисленными согласно (2)).

Ошибку в точке зададим следующим образом:

$$Err(p, V) = (\partial x_p - \partial x_v(x_p, y_p))^2 + (\partial y_p - \partial y_v(x_p, y_p))^2, \quad (6)$$

где (x_p, y_p) – координаты точки, $(\partial x_p, \partial y_p)$ – направление вектора в точке, $(\partial x_v(x_p, y_p), \partial y_v(x_p, y_p))$ – направление вектора векторного поля в точке, полученное из функции (2) с параметрами V .

Суммарная ошибка по кластеру равна

$$Err(K, V) = \sum_{p \in K} Err(p, V) \quad (7)$$

Для данной задачи существует множество итеративных алгоритмов решения; некоторые из них описаны в [8]. Главным недостатком итеративных методов решения является недостаточная скорость и зависимость вычислительной сложности от количества векторов. В данной работе разработан алгоритм аналитической идентификации параметров оптимального векторного поля. В качестве основ берется описанный в работе Arne Storjohann и Gilles Villard [9] подход, основанный на матрице моментов, а также метод наименьших квадратов, описанный в частности в [10].

Необходимо найти параметры (4), минимизирующие ошибку (7). Для этого разделим параметры (4) на две группы. Первая

группа – это основные параметры $\hat{V} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Эти

параметры задают основной узор векторного поля. Вторая группа – это дополнительные параметры $\tilde{V} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$,

задающие смещение центра векторного поля относительно начала координат.

В текущей реализации метода дополнительные параметры выражаются через основные за счет использования опорного вектора.

Определение. *Опорным вектором* в данной задаче называется среднее арифметическое всех векторов кластера.

$$p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \partial x_0 \\ \partial y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 = M_x / M \\ y_0 = M_y / M \\ \partial x_0 = M_{dx} / M \\ \partial y_0 = M_{dy} / M \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Поэтому оптимизация проводится только по четырём основным параметрам.

На основе опорного вектора дополнительные параметры m и n выражаются через основные.

$$\begin{cases} m = a \cdot x_0 + b \cdot y_0 - dx_0 \\ n = c \cdot x_0 + d \cdot y_0 - dy_0 \end{cases}. \quad (9)$$

Подставляя формулы (2) и (9) в формулу для ошибок (6), получаем:

$$Err(p, \hat{V}, p_0) = (dx_p - a \cdot (x_p - x_0) - b \cdot (y_p - y_0) + dx_0)^2 + (dy_p - c \cdot (x_p - x_0) - d \cdot (y_p - y_0) + dy_0)^2 \quad (10)$$

Для получения совокупной ошибки нужно аналогично (7) просуммировать по всем точкам кластера:

$$Err(K, \hat{V}, p_0) = \sum_{p \in K} Err(p, \hat{V}, p_0). \quad (11)$$

Функция (11) зависит от трех групп параметров – кластера, опорного вектора и параметров векторного поля \hat{V} . Если зафиксировать кластер и, как следствие, опорный вектор, то (11) – квадратичный полином от 4 параметров \hat{V} , причем все квадраты входят в него с положительными знаками. Следовательно, если не рассматривать вырожденные случаи, присутствует единственный глобальный экстремум, минимум, в котором все производные по переменным должны быть равны нулю.

Продифференцируем (11) по каждой из переменных a, b, c, d , и потребуем равенство каждой производной нулю. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \sum_{p \in K} [(x_p - x_0) \cdot (x_p - x_0)], \\ S_{xy} &= \sum_{p \in K} [(x_p - x_0) \cdot (y_p - y_0)], \\ S_{yy} &= \sum_{p \in K} [(y_p - y_0) \cdot (y_p - y_0)], \\ S_{xdx} &= \sum_{p \in K} [(x_p - x_0) \cdot (dx_p - dx_0)], \\ S_{ydx} &= \sum_{p \in K} [(y_p - y_0) \cdot (dx_p - dx_0)], \\ S_{xdy} &= \sum_{p \in K} [(x_p - x_0) \cdot (dy_p - dy_0)], \\ S_{ydy} &= \sum_{p \in K} [(y_p - y_0) \cdot (dy_p - dy_0)]. \end{aligned}$$

Запишем уравнения для производных функции ошибки во введенных обозначениях:

$$0 = Err(K, \hat{V})'_a = a * S_{xx} + b * S_{xy} + S_{xdx} \quad (12)$$

$$0 = Err(K, \hat{V})'_b = a * S_{xy} + b * S_{yy} + S_{ydx} \quad (13)$$

$$0 = Err(K, \hat{V})'_c = c * S_{xx} + d * S_{xy} + S_{xdy} \quad (14)$$

$$0 = Err(K, \hat{V})'_d = c * S_{xy} + d * S_{yy} + S_{ydy} \quad (15)$$

Уравнения 12-15 образуют систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей,

$$Av = F, \quad (16)$$

где под v понимается вектор из переменных a, b, c, d .

$$A = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{xx} & S_{xy} \\ 0 & 0 & S_{xy} & S_{yy} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$F = \begin{pmatrix} S_{xdx} \\ S_{xdy} \\ S_{ydx} \\ S_{ydy} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В рассмотренной постановке задачи система (16) распадается на две независимые системы (матрица A образована двумя одинаковыми матрицами на диагонали). Однако подобная структура матрицы вызвана исключительно видом функции ошибки (6). Описываемый в статье подход применим ко многим другим видам функции (6), поэтому система уравнение (16) решается наиболее общим способом.

Согласно теории линейных уравнений, если определитель матрицы (17) не вырожден, то система (16) имеет единственное решение. Для учета вырожденности в практической реализации метода используется сингулярное разложение [10]. Матрица (17) является симметрической, поэтому она может быть представлена в следующем виде:

$$A = U\Lambda W^T, \quad (19)$$

где U и W – ортогональные матрицы, а Λ – диагональная матрица, на диагонали которой стоят сингулярные числа матрицы A . Вырожденность матрицы A эквивалентна наличию нулевых сингулярных чисел. В практических вычислениях из-за ошибок вычисления чисел с плавающей точкой точное равенство сингулярных чисел нулю может не достигаться. Для отслеживания подобных ситуаций вводится

критерий $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$ – отношение максимального и

минимального ненулевого сингулярного числа. Чем больше значение критерия – тем более неустойчиво решение системы (16) к шумам. В случае, если значение критерия превышает 20, или в разложении (19) получаются нулевые сингулярные числа, система (16) рассматривается как неустойчивая и не решается. В противном случае ищется решение системы (16) как обычной невырожденной системы линейных алгебраических уравнений. Попытки получить решение системы напрямую из разложения (16) показали худшее

качество аппроксимации, чем решение системы напрямую. Качество аппроксимации оценивалось по суммарной ошибке (7).

Особенностью матрицы (17) и вектора (18) является то, что их элементы вычисляются из моментов кластера (3):

$$S_{xx} = \sum_{p \in K} [(x_p - x_0) \cdot (x_p - x_0)] = M_{xx} - x_0 \cdot M_x,$$

...

$$S_{xdy} = \sum_{p \in K} [(x_p - x_0) \cdot (dy_p - dy_0)] = M_{xdy} - dy_0 \cdot M_x$$

...

Это значит, что для построения аппроксимирующего векторного поля для кластера K нужно выполнить следующие действия:

1. Вычислить множество моментов (5): $M = M(K)$;
2. Построить аппроксимирующее векторное поле (4): $V = V(M)$.

Приведенная выше схема идентификации модели векторного поля является безусловным преимуществом данного метода, потому что:

- параметры векторного поля находятся аналитически и явно, а не итеративно;
- вычислительная сложность – линейная от количества векторов для вычисления моментов, константа – для идентификации параметров модели по построенным моментам.

5. СЛИЯНИЕ КЛАСТЕРОВ

В данном разделе рассматривается алгоритм выделения на исходном изображении областей, которые могут быть описаны векторным полем вида (2).



Рис. 3: Иллюстрация наличия на изображении трех ярко выраженных векторных полей вида (2).

Кластеры векторов в данном методе строятся итеративно, «снизу-вверх», в ходе агломеративной группировки.

Сначала на изображении, представленном в виде множества векторов (1), строится стартовое разбиение. Все векторы распределяются между локальными кластерами исходя из критериев близости начальных точек и направлений. Для этого на множестве векторов строится триангуляция Делоне,

задающая граф соседства. При построении триангуляции используются только координаты начала векторов. Затем из триангуляции выбираются группы близко расположенных сонаправленных векторов. Часть векторов, значительно отклоняющихся от всех своих ближайших соседей, отбрасывается. При этом, если в некоторой локальной области изображения расположена смесь из векторов двух и более направлений, причем каждое направление представлено значительным процентом векторов, на области будет построено несколько стартовых кластеров. Итогом стартового разбиения является набор кластеров $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$.

Затем для каждого кластера вычисляется и запоминается набор моментов (5).

Как описано в предыдущем разделе, набора моментов полностью достаточно для вычисления аппроксимирующего векторного поля вида (2). Это значительно ускоряет процедуру объединения кластеров.

Если необходимо объединить кластеры K_1 и K_2 (два непересекающихся множества векторов) и построить для них общее векторное поле вида (2), нужно сделать следующее:

1. Вычислить набор объединенных моментов (5):

$$M = M^1 + M^2 = \left\{ \dots, M_x^1 + M_x^2, \dots, M_{ydy}^1 + M_{ydy}^2 \right\}$$
2. Идентифицировать модель векторного поля (4):

$$V = V(M).$$

Объединение кластеров по описанному выше алгоритму – это операция, сложность которой никак не зависит от размеров кластеров.

Начальный набор кластеров $K = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ содержит избыточное количество кластеров, в ходе слияния пар кластеров их количество сокращается, а общность соответствующих кластерам моделей векторного поля – возрастает.

Процедура слияния выполняется по следующему алгоритму.

1. В K ищется пара кластеров K_i и K_j с наименьшей ошибкой (11): $Err(K_i + K_j, \hat{V}(K_i + K_j))$.
2. Если наименьшая ошибка меньше заданного порога – строится объединенный кластер, добавляется в K . Иначе алгоритм прекращает работу.
3. Для кластеров K_i и K_j запоминается, что их объединяет построенный кластер (запоминается ссылка на родительский кластер, у каждого кластера – только один родительский).
4. Кластеры K_i и K_j удаляются из K .

При известных параметрах векторного поля (5) ошибка аппроксимации (11) может быть вычислена только на основе набора моментов $Err(K, V) = Err'(M, V)$, т.е. сложность этой операции мала, и не зависит от размера кластера.

Каждый шаг алгоритма не требует повторного вычисления расстояний между каждой парой кластеров, и проведения поиска максимума с нуля. Эти операции допускают эффективное кэширование.

Результатом работы алгоритма является набор кластеров, каждый с соответствующей моделью векторного поля (2). Количество кластеров определяется величиной порога на втором этапе и структурой исходного изображения.

6. СРАВНЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ МЕТОДА

Рассмотрим результаты применения описанного выше метода к тестовым изображениям.

Сравнение векторных полей проводится по собственным значениям матрицы \hat{V} .

Собственные значения выбраны в качестве критерия сравнения, т.к. в данной задаче они инвариантны к повороту и сдвигу.

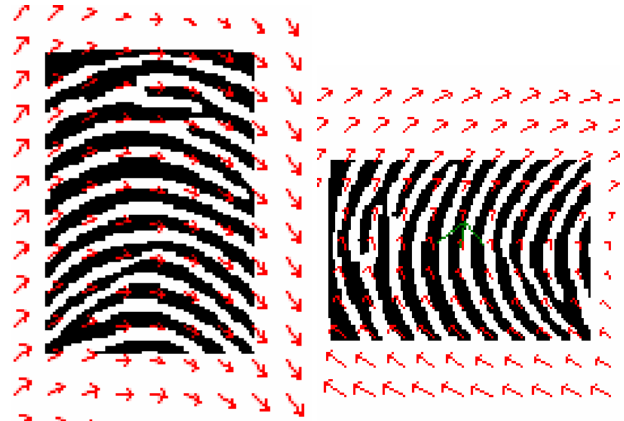


Рис. 4. Два примера векторного поля вида (2), построенного для различных, но однотипных фрагментов.

Выпишем собственные значения построенных векторных полей. Пусть \hat{V}_1 – векторное поле с левой части рис. 4, а \hat{V}_2 – векторное поле с правой части рис. 4. Тогда

$$\lambda(\hat{V}_1) = \begin{pmatrix} -0,00106 + i * 0,0073 \\ -0,00106 - i * 0,0073 \end{pmatrix},$$

$$\lambda(\hat{V}_2) = \begin{pmatrix} -0,00098 + i * 0,008 \\ -0,00098 - i * 0,008 \end{pmatrix}.$$

Модули разностей между собственными значениями равны

$$\left| \lambda(\hat{V}_1) - \lambda(\hat{V}_2) \right| = \begin{pmatrix} 0,000704 \\ 0,000704 \end{pmatrix}.$$

Как абсолютные значения приведенные цифры не очень наглядны, поэтому выпишем относительную разность,

отношение модуля разности к модулю минимального соответствующего собственного значения:

$$\frac{|\lambda(\hat{V}_1) - \lambda(\hat{V}_2)|}{|\lambda(\hat{V}_1)|} = \left(\frac{0,000704/0,007}{0,000704/0,007} \right) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

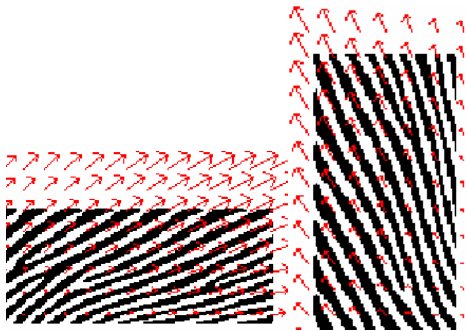


Рис. 5: Пример второй пары векторных полей.

Рассмотрим векторные поля другого типа. Обозначим левое векторное поле с рис. 5 как \hat{V}_3 , правое как \hat{V}_4 . Собственные значения равны:

$$\lambda(\hat{V}_3) = \begin{pmatrix} 0,0133 \\ 0,006 \end{pmatrix}, \lambda(\hat{V}_4) = \begin{pmatrix} 0,016 \\ 0,0051 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем относительные модули разностей между собственными значениями, аналогично предыдущему примеру:

$$\frac{|\lambda(\hat{V}_3) - \lambda(\hat{V}_4)|}{|\lambda(\hat{V}_3)|} = \left(\frac{0,0027/0,0133}{0,0009/0,006} \right) = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,15 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Теперь посчитаем относительные модули разностей между собственными значениями векторных полей различных типов:

$$\frac{|\lambda(\hat{V}_2) - \lambda(\hat{V}_4)|}{|\lambda(\hat{V}_2)|} = \left(\frac{0,017/0,008}{0,01/0,008} \right) = \begin{pmatrix} 2,125 \\ 1,25 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Результаты (20), (21) и (22) наглядно демонстрируют, что расстояние между собственными значениями однотипных векторных полей на порядок меньше расстояния между собственными значениями различающихся полей.

Одной из особенностей векторных полей вида (2) является то, что тип векторного поля (полный список образцов типов см. на рис. 1) можно определить не только по величинам собственных значений, но и по их знаку, и по тому, являются ли они действительными или комплексными.

Обе модели векторного поля с рис. 4 имеют два различных комплексных собственных значения с действительной частью, отличной от нуля, следовательно, относятся к типу «фокус».

Обе модели векторного поля с рис. 5 имеют два различных действительных положительных собственных значения, следовательно, относятся к типу «узел».

Приведенные примеры демонстрируют следующее:

1. Векторное поле вида (2) может описывать характерные особенности изображений.
2. Разработан метод, позволяющий правильно идентифицировать векторные поля для кластера за линейное, относительно размера входных данных, время.
3. Разработанный метод, дополненный кластеризацией, способен находить для изображения несколько векторных полей вида (2), описывающих различные глобальные особенности.
4. Собственные значения матрицы параметров векторного поля (2) являются устойчивым описанием глобальных закономерностей изображения. Они устойчивы к сдвигам, поворотам, и незначительному шуму и искажениям.

Полученные результаты в дальнейшем планируется использовать для построения признакового описания изображений.

В настоящее время проводятся исследования по использованию в подходе альтернативных функций ошибки (6). Также исследуется устойчивость метода к выбору опорного вектора (8), разрабатывается модификация метода, не использующая опорный вектор. Исследуется устойчивость метода относительно кластеризации. Изучаются возможности применения описанного метода в практических задачах биометрической идентификации.

7. БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] D. Mumford and J. Shah *Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems. Comm. in Pure and Appl. Math., 1989 v. XLII, n.5, pp.577-684. [1]*
- [2] William Eric Leifur Grimson *From Images to Surfaces A Computational Study of the Human Early Visual System. The MIT Press Classics, 1981. [2]*
- [3] M. Haseyama, I. Kondo *2-D functional AR model for image identification. Proceedings of the 2003 International Conference on Multimedia and Expo - Volume 1. 2003. Pages 377-380. [3]*
- [4] Chu-Song Chen, Yi-Ping Hung and Ja-Ling Wu *Combining Morphological Feature Extraction and Geometric Hashing for Three-Dimensional Object Recognition Using Range Images. Journal of Information Science and Engineering, Vol.17 No.3, pp.347-369 (May 2001). [4]*
- [5] Marr, D.; Nishihara, H. K. *Representation and Recognition of the Spatial Organization of Three-Dimensional Shapes. Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, Vol. 200, No. 1140 (Feb. 23, 1978), pp. 269-294. [5]*
- [6] Л. М. Местецкий. *Непрерывный скелет бинарного растрового изображения. Труды между. конф. "Графикон-98", Москва, 1998. [6]*

[7] Н. И. Голов. *Отдельные алгоритмы, применяемые в реализации морфологического метода сравнения радужных оболочек глаз. Труды всероссийской конф. "ММРО-12", Москва, 2005* [7]

[8] Andrew Witkin and David Baraff, *Physically Based Modeling: Principles and Practice*. Carnegie Mellon, online Siggraph '97 Course notes. 1997. [8]

[9] Arne Storjohann and Gilles Villard. *Computing the Rank and a Small Nullspace Basis of a Polynomial Matrix. Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (2005)* 309-316. [9]

[10] Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. *Машинные методы математических вычислений*. Мир, 1980

[11] R.H. Glendinning *Model Building for Random Fields. Proceedings of the 4th International Conference on Advances in Intelligent Data Analysis*. 2001. Pages 299-308.

Об авторе

Голов Николай Игоревич, аспирант ВМК МГУ, сотрудник ВЦ РАН им. Дородницына.

Почта: golov@forecsys.ru.

Method of Morphological Features Representation Using Vector Fields

Abstract

In this article the method of 2D images representation using vector fields is observed.

The method is dedicated to the representation of a particular type of images, to the representation of 2D images with distinct morphological structure. Finger prints images, human iris images or the landscape relief images are the examples of images with distinct morphological structure.

Images are to be inputted into the method as a set of vectors. Algorithm of image into vectors set conversion is not strictly defined. Few algorithms were observed, such as usage of image's skeleton branches, or usage of the tangents to the curves.

Main idea of the method lies in construction of approximating vector field as a representation of a set of vectors. Vector field is being constructed as a set of vector functions of particular type. Used type of vector functions was taken from theory of systems of linear differential equations. Identification of each vector function in a set is performed as a fast analytical procedure.

The main advantages of this method lie in its speed and in it's robustness to the shifts and rotations.

Keywords: *vector field, mathematical model identification, inverse problems, analytical approximation, continuous border-skeletal representation, biometrics.*

About the authors

Nickolay Golov is a Ph.D. student at Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics. His contact email is golov@forecsys.ru.