

Эпиполярная геометрия и оценка ее достоверности по результатам восстановления трехмерной сцены алгоритмами факторизации

А.В. Калиниченко*, Н.В. Свешникова**, Д.В. Юрин***

* ВМиК, Московский государственный университет, Москва, Россия

** ФФКЭ, Московский физико-технический институт, кафедра СИМ, Москва, Россия

*** ФГУП НПП ОПТЭКС, Зеленоград, Россия

tooboos@mail.ru, sveshnikova_n@list.ru, yurin_d@inbox.ru

Аннотация

Представленная работа закладывает основу для интеграции двух подходов к восстановлению трехмерных сцен: стерео-алгоритмов и алгоритмов, основанных на факторизации матриц. Демонстрируется аналитический вывод оценок погрешностей вычисления эпиполярной геометрии на основе результатов восстановления алгоритмами факторизации.

Ключевые слова: Эпиполярная геометрия, погрешности, восстановление трехмерных сцен, метод факторизации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует большое количество различных алгоритмов и подходов к задаче восстановления трехмерных сцен по набору цифровых изображений. Эти подходы требуют различных исходных данных, базируются на различных физических принципах и математических методах и имеют различные диапазоны применимости. К примеру, восстановление трехмерной сцены стерео алгоритмами [1, 2] способно восстановить трехмерный образ практически для всех точек исходного изображения, однако требует точной информации о положении и ориентации камер. Алгоритмы, основанные на факторизации матриц [3, 4], не требуют априорных данных о параметрах съемки или форме сцены, но нуждаются в большом количестве кадров (не менее ~10) и в выделении на них всех набора так называемых характеристических отметок, что является отдельной задачей, изучаемой и решаемой в области компьютерного зрения [5]. Тем не менее, эти алгоритмы, восстанавливают трехмерные координаты характеристических отметок и камер, ориентацию камер в пространстве, а также оценку точности результата [4]. Восстановленная сцена представляется в виде набора точек, количество которых, как правило, недостаточно, чтобы адекватно отобразить форму объекта.

Представляется разумным интегрировать эти подходы. Алгоритмы, основанные на факторизации матриц способны предоставить информацию с известной точностью о параметрах съемки, а также трехмерные координаты некоторых точек сцены для работы стерео алгоритмов, дающих плотное восстановление (для каждого пикселя изображения).

2. ЭПИПОЛЯРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Применение проективной геометрии в случае стерео задачи (рис. 1) дает эпиполярную геометрию [6]. Точка трехмерного объекта и два центра проецирования (точки, в которых расположены камеры) формируют эпиполярную плоскость. Пересечения этой плоскости с плоскостями изображений есть эпиполярные прямые (ЭП). Линия, соединяющая центры проецирования пересекает плоскости изображения в сопряженных точках, которые называются эпицентрами.

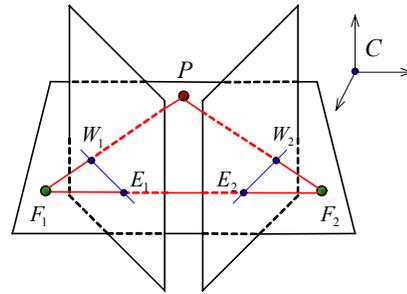


Рис. 1. Эпиполярная геометрия

Основным результатом эпиполярной геометрии является линейное соотношение между проекциями точки P на плоскости первого и второго изображений $\vec{x} = (u, v, 1)$ и $\vec{x}' = (u', v', 1)$ соответственно:

$$\vec{x}^T \mathbf{F} \vec{x}' = 0 \quad (1)$$

Компоненты фундаментальной матрицы \mathbf{F} (ФМ) выражаются следующим образом [7]:

$$F_{mn} = e_{cda} (\vec{t}' - \vec{t})_d r_{ma} r'_{nc}, \quad m, n = 1..3, \quad (2)$$

где e_{cda} - единичный антисимметричный тензор третьего ранга, \vec{t}, \vec{t}' - координаты центров проецирования, r_{ma}, r'_{nc} - компоненты матриц ориентации первой и второй камер соответственно. Матрицы ориентации задаются как правые тройки ортонормированных векторов:

$$\mathbf{R} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})^T, \quad \mathbf{R}' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')^T,$$

Выражение (2), как указывалось в [4], есть смешанное произведение вектора трансляции $(\vec{t}' - \vec{t})$ и строк матриц ориентации.

3. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА И РЕЗУЛЬТАТ ФАКТОРИЗАЦИИ

В результате работы алгоритма факторизации в некоторой системе координат восстанавливаются параметры съемки и их погрешность. Выберем два наиболее удаленных друг от друга кадра, характеризующиеся положениями камер \vec{i} и \vec{i}' , ориентациями $\mathbf{R} = (\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k})^T$ и $\mathbf{R}' = (\vec{i}' \ \vec{j}' \ \vec{k}')^T$, и фокусными расстояниями g и g' , и получим стерео пару. Здесь и далее используются обозначения, введенные в [4].

Рассмотрим подробнее, что представляет собой ФМ, полученная в результате восстановления алгоритмами факторизации. Вектора \vec{k} и \vec{k}' направлены на объект [4]. Как правило, при восстановлении сцены алгоритмами факторизации эти вектора направлены на центр масс восстанавливаемого массива точек, т.к. для работы этих алгоритмов необходимо, чтобы все характеристические точки были видны на всех изображениях. В этот же центр масс помещают и начало координат. В этом случае, вектор, определяющий положение камеры, может быть представлен в виде:

$$\vec{i} = -z\vec{k}, \quad \vec{i}' = -z'\vec{k}', \quad (3)$$

где z и z' - расстояния от центра масс сцены до камер.

Используя (3), можно расписать выражение для каждой компоненты ФМ (2) и, упростив, получить:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} z'(\vec{j}', \vec{i}) + z(\vec{j}, \vec{i}') & -z'(\vec{i}', \vec{i}) + z(\vec{j}, \vec{j}') & z(\vec{j}, \vec{k}') \\ z'(\vec{j}', \vec{j}) - z(\vec{i}, \vec{i}') & -z'(\vec{i}', \vec{j}) - z(\vec{i}, \vec{j}') & -z(\vec{i}, \vec{k}') \\ -z'(\vec{j}', \vec{k}) & -z'(\vec{i}', \vec{k}) & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

4. ПОГРЕШНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Результаты восстановления параметров съемки всегда содержат погрешность. В случае восстановления алгоритмами факторизации, среднеквадратичные величины погрешностей восстановления могут быть оценены как на основе априорных данных о параметрах съемки и сцены, так и апостериорно, в ходе выполнения алгоритмов. Предложенная в [4] методика оценки погрешностей позволяет определить среднеквадратичные относительную погрешность восстановления расстояния до камер \mathcal{E}_z и погрешность восстановления векторов ориентации \mathcal{E}_R , которая есть, по сути, угол, на который восстановленная тройка векторов повернута относительно идеальной.

Рассмотрим скалярное произведение одного из векторов ориентации первой камеры на один из векторов ориентации второй, например $\zeta = (\vec{j}, \vec{i}')$. При наличии погрешности, величина угла между этими векторами будет возмущена. Полагая, что это возмущение имеет тот же порядок, что и среднеквадратичная погрешность восстановления этих векторов, т.е. \mathcal{E}_R , выразим приращение ζ :

$$\Delta\zeta = (\vec{j}, \vec{i}') - (\vec{j}_0, \vec{i}'_0) = \mp \mathcal{E}_R \sqrt{1 - (\vec{j}_0, \vec{i}'_0)^2} \quad (5)$$

Оценивая приращение (5) сверху, заменим его более простым выражением

$$|\Delta\zeta| \leq \mathcal{E}_R \quad (6)$$

Аналогичные соотношения можно получить и для других скалярных произведений, входящих в выражение (4).

Перейдем к построению погрешности ФМ. Запишем дифференциалы для каждой компоненты ФМ (4), на примере F_{11} :

$$dF_{11} = \frac{\partial F_{11}}{\partial z} dz + \frac{\partial F_{11}}{\partial z'} dz' + \frac{\partial F_{11}}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 + \frac{\partial F_{11}}{\partial \zeta_2} d\zeta_2,$$

где $\zeta_1 = (\vec{j}', \vec{i})$, $\zeta_2 = (\vec{j}, \vec{i}')$

Приближая дифференциалы приращениями, получим:

$$\Delta F_{11} \approx \left(z \frac{\partial F_{11}}{\partial z} \right) \frac{\Delta z}{z} + \left(z' \frac{\partial F_{11}}{\partial z'} \right) \frac{\Delta z'}{z'} + z' \Delta \zeta_1 + z \Delta \zeta_2$$

Заменяя относительную погрешность расстояния до камер среднеквадратичной погрешностью \mathcal{E}_z , и оценивая сверху погрешности скалярных произведений согласно выражению (6) среднеквадратичной погрешностью \mathcal{E}_R , получим:

$$\Delta F_{11} \leq \mathcal{E}_z F_{11} + \mathcal{E}_R (z' + z) \quad (7)$$

Производя аналогичные операции над всеми компонентами ФМ, получим окончательно в матричном виде:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathcal{E}_z \mathbf{F} + \mathcal{E}_R \mathbf{\Phi} \quad (8)$$

Компоненты матрицы $\mathbf{\Phi}$ - есть множители при \mathcal{E}_R :

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} z' + z & -z' + z & g' z' \\ z' - z & -z' - z & -g' z' \\ -gz & -gz & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

5. ПОГРЕШНОСТИ ЭПИПОЛЯРНОЙ ПРЯМОЙ

Рассмотрим погрешности восстановления эпиполярных прямых (ЭП). Уравнения ЭП будем задавать в общем виде:

$$\vec{A}\vec{x}' = 0 \quad \text{или} \quad A_1 u' + A_2 v' + A_3 = 0, \quad (10)$$

который легко привести к нормальному виду с помощью нормировки. В этом случае погрешность нормированного коэффициента A_3 будет погрешностью определения расстояния от начала координат до ЭП, а погрешности остальных коэффициентов - погрешностями угла между осями координат и ЭП. Из (1) коэффициенты уравнения ЭП есть:

$$\vec{A} = \vec{x}\mathbf{F}, \quad \text{т.е.} \quad A_i = (\vec{F}_i, \vec{x}) \quad (11)$$

Векторами \vec{F}_i , $i = 1..3$ будем обозначать столбцы ФМ. Из (11) построим приращение коэффициентов ЭП, считая, что \vec{x} не варьируется.

$$\Delta \vec{A} = \vec{x} \Delta \mathbf{F}, \quad \text{т.е.} \quad \Delta A_i = (\Delta \vec{F}_i, \vec{x}) \quad (12)$$

Из (12) следует, что погрешность зависит от положения отметки на кадре, но нас будет интересовать среднеквадратичная ошибка для всего изображения в целом:

$$\Delta \tilde{A}_i = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_p (\Delta \bar{F}_i, \bar{x}_p)^2} \quad (13)$$

Пусть отметки на изображении распределены случайным образом и известна нормированная функция распределения $\nu(u, v)$. Тогда можно перейти от суммы к интегралу:

$$\Delta \tilde{A}_i^2 = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (\Delta \bar{F}_i, \bar{x})^2 \nu(u, v) du dv \quad (14)$$

Предположим для простоты, что отметки распределены случайно-равномерно по всему изображению. Тогда в результате вычисления интеграла (14) получим:

$$\Delta \tilde{A}_i = \frac{1}{2\sqrt{3}} |\Delta \bar{F}_i| \sqrt{\left(1 + 11 \frac{\Delta F_{3i}^2}{\Delta \bar{F}_i^2}\right)} \quad (15)$$

6. РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА

Проверка полученных оценок проводилась методами численного моделирования. Использовалась описанная в [4] модель «Точки», представляющая собой случайный набор точек, равномерно распределенных внутри эллипсоида.

Проверка полученных оценок строилась по следующей схеме:

1. Построение трехмерной модели в среде MatLab, вычисление ее изображений с привнесением погрешности оцифровки, вычисление эталонной ФМ для пары наиболее удаленных друг от друга кадров
2. Восстановление трехмерного образа модели алгоритмами факторизации [3] программой на С++ и вычисление ФМ для выбранной ранее пары кадров.
3. Вычисление ЭП по эталонной ФМ и восстановленной. Сравнение полученных практических погрешностей с теоретическими оценками (8), (15).

Ниже приведены графики зависимостей погрешности угла наклона ЭП и расстояния до начала координат от отношения τ максимальной из полуосей эллипсоида (16) к расстоянию до него и от угла между главными осями камер стереопары α . Остальные параметры модели те же, что и в [4].

На рис. 2-3 приведены результаты сравнения теоретических оценок и практических погрешностей восстановления ЭП. Маркерам «1», «2» соответствуют среднеквадратичные погрешности угла и расстояния, полученные в результате сравнения исходной модели и восстановленного в перспективной проекции образа. Сплошной «3» и штрихпунктирной линии «4» соответствуют оценки погрешностей (8), (15) угла и расстояния соответственно. Погрешность угла измеряется в радианах, погрешность расстояния – как отношение погрешности в пикселях к количеству пикселей в строке изображения.

На вспомогательных графиках рис. 2-3 приведено отношение теоретических оценок погрешностей к практическим погрешностям. Линия «1» соответствует оценке погрешности угла наклона, линия «2» - оценке погрешности расстояния до начала координат. Оценки оказываются завышенными при-

мерно в 2 раза, что соответствует результатам проверки оценок погрешностей в [4]. Точность оценки при малых углах между камерами несколько ухудшается из-за использования оценки сверху (6) вместо более точного выражения (5). Тем не менее, точность оказывается вполне приемлемой.

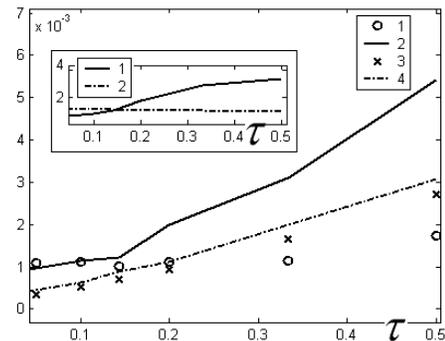


Рис. 2. Зависимость погрешности восстановления ЭП от параметра τ

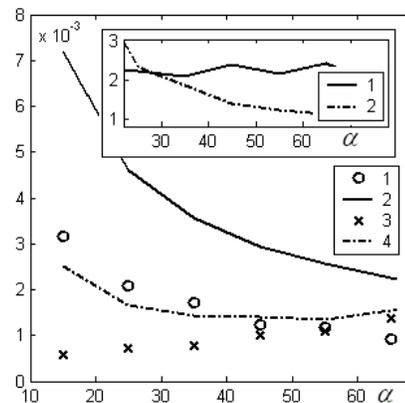


Рис. 3. Зависимость погрешности восстановления ЭП от угла между камерами α

7. РЕАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Результаты восстановления алгоритмами факторизации использовались также для восстановления эпиполярной геометрии реальной сцены (рис. 4). Характеристические отметки на последовательности цифровых изображений выбирались вручную (эти отметки обозначены крестиками). В результате восстановления итерационным алгоритмом, основанным на факторизации [3], были выбраны два наиболее удаленных друг от друга кадра, для этой пары вычислялась ФМ и ЭП. Чтобы не загромождать рисунок, на рис. 4 изображены всего несколько ЭП, их диапазон погрешности, вычисленный в ходе восстановления трехмерной сцены, показан тонкими линиями. Кружками обозначены точки, для которых эти ЭП строились. Рис. 4 демонстрирует хорошую точность восстановленной эпиполярной геометрии.

Рассматриваемые изображения имели разрешение 2048 x 1536 пикселей, погрешность восстановления ориентации и положения камер алгоритмом [3] составляла согласно апостериорным оценкам [4]: $\varepsilon_R \approx 2 \times 10^{-2}$ и $\varepsilon_z \approx 4 \times 10^{-3}$. Следовательно, согласно (8), (15) погрешность угла наклона ЭП не превышает $2,9 \times 10^{-2}$ радиана, а погрешность расстояния между ЭП и началом координат ограничена пятнадцатью

пикселями. Большая часть погрешности обусловлена неточностью ручной разметки.

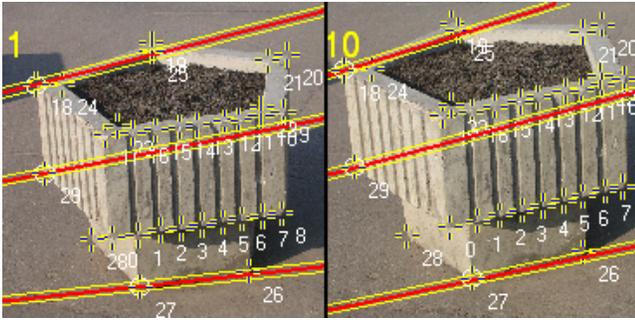


Рис. 4. Эпиполярные линии, построенные на основе параметров съемки, восстановленных алгоритмом ИПП

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе дан анализ погрешностей вычисления эпиполярной геометрии на основе результатов восстановления трехмерной сцены итерационным алгоритмом в перспективной проекции, основанным на факторизации матриц [3]. Получены аналитические оценки точности восстановления эпиполярной геометрии (8), (15), которая в дальнейшем может быть использована стерео алгоритмами [1, 2].

Проверка аналитических оценок погрешностей проводилась на модельных данных и показала хорошую точность. Оценки получаются завышенными примерно в 2 раза, что является вполне приемлемой точностью для оценок погрешности. Визуальная оценка качества результата проводилась как на модельных, так и на реальных сценах (рис. 4) и подтвердила хорошую точность восстановления в обоих случаях.

9. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 05-07-90344 и 05-07-90390 и 06-01-00789. Авторы выражают благодарность зав. кафедрой СИМ МФТИ д.ф.-м.н., проф. Клименко С.В. за проявленное к работе внимание и поддержку.

10. БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Michael H. Lin, Carlo Tomasi: *Surfaces with Occlusions from Layered Stereo*. //IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2003.
- [2] Vladimir Kolmogorov and Ramin Zabih. *Computing Visual Correspondence with Occlusions using Graph Cuts*. In: *International Conference on Computer Vision, July 2001*. <http://www.cs.cornell.edu/rdz/Papers/KZ-ICCV01-tr.pdf>
- [3] Н. В. Свешникова, Д. В. Юрин. *Априорный и апостериорный расчет погрешностей восстановления трехмерных сцен алгоритмами факторизации*. //Программирование 2004, Т.30, № 5, С. 48-68..
- [4] N.V. Sveshnikova, D.V. Yurin The Factorization Algorithms: Results Reliability and Application for the Epipolar Geometry Recovery. //In Conference Proceedings. 16-th International Conference on Computer Graphics and Application GraphiCon'2006 July 1 - 5, 2006 Novosibirsk Akademgorodok, Russia.

[5] Carlo Tomasi, Takeo Kanade. *Shape and Motion from Image Streams: a Factorization Method, Part 3, Detection and Tracking of Point Features* //Technical Report CMU-CS-91-132 / School of Computer Science, Carnegie Mellon University. — April 1991. http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub_2543.html

[6] Ali Azarbayejani Tony Jebara and Alex Pentland. *3d structure from 2d motion*. Technical report, MIT Media Laboratory, May 1999. *Perceptual Computing Tech. Rep.*#523.

[7] H.C. Longuet-Higgins. *A Computer Algorithm for Reconstructing a Scene From Two Projections*, "Nature", vol. 293, pp. 133-135, Sept 1981.

Об авторах

Калининченко Алексей Владиславович – студент 4-го курса ВМК Московского Государственного Университета, кафедра Математической физики.

E-mail: tooboos@mail.ru

Свешникова Наталья Владимировна – аспирантка ФФКЭ Московского физико-технического института, кафедра СИМ.

E-mail: sveshnikova_n@list.ru

Юрин Дмитрий Владимирович – кандидат физ.-мат. наук, ФГУП НПП ОПТЭКС (Федеральное Государственное Унитарное Предприятие Научно-Производственное Предприятие "Опτικο-электронные комплексы и системы"), главный специалист

Телефон: +7-(916)-387-7367, +7-(495)-535-4887

E-mail: yurin_d@inbox.ru

The Epipolar Geometry and its Accuracy from the Results of the Factorization Recovery

Abstract

The paper lays the groundwork for the integration of the 3D recovery methods such as stereo and factorization algorithms. The latter is used for the 3D motion recovery and hence for the epipole geometry computation. The derivation of the epipole geometry error estimate is presented. The results were tested out with synthetic and real data.

Keywords: 3D recovery, factorization methods, recovery errors, epipolar geometry.

About the authors

Aleksey V. Kalinichenko is a fourth-year student at Moscow State University, Department of Calculus Mathematics and Cybernetics, sub-faculty of Mathematical Physics. E-mail: tooboos@mail.ru

Natalya V. Sveshnikova is a Ph.D. student at Moscow Institute of Physics and Technology, Department of Physical and Quantum Electronics, sub-faculty of SIM. Her contact email is sveshnikova_n@list.ru.

Dmitry V. Yurin, PhD, is a chief specialist in FGUP RPE OPTECS and a senior researcher at Moscow State University, Department of Computational Mathematics and Cybernetics. His contact email is yurin_d@inbox.ru.