Конструирование и оптимизация разностных схем с применением методов визуализации

Александр Бондарев
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Москва, Россия

Аннотация

В данной работе рассматриваются проблемы конструирования и оптимизации свойств гибридных разностных схем. Применяется подход численно-визуального исследования, позволяющего модифицировать и изучить параметрические свойства разностной схемы с помощью визуального представления. Данный подход продемонстрирован на примере конкретной задачи сверхзвукового течения в дальнем следе, моделируемой с помощью относящейся к классу гибридных схем разностной схемы [1,2].

Ключевые слова: *гибридные разностные схемы, вычислительная аэрогазодинамика, визуализация данных.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительных средств, усложнение современных задач математического моделирования, и в частности, задач вычислительной аэрогазодинамики, приводит к тому, что визуальное представление данных численного эксперимента приобрело новый смысл. Из иллюстративного инструмента визуальное представление данных численного эксперимента превратилось в полноправный инструмент познания окружающего мира. Получить и понять научный результат становится возможным зачастую только с помощью совокупности методов и концептуальных подходов визуального представления численных данных. Это новое качество визуального представления численных полей называют научной визуализацией.

Проблемы, задачи и пути развития научной визуализации были подробно представлены в работах [3-5] на примере такого важного раздела математического моделирования как вычислительная аэрогазодинамика.

Данная работа посвящена изучению, конструированию и оптимизации самих разностных схем, применяющихся для решения конкретных задач вычислительной аэрогазодинамики. Эти процессы проводятся с помощью визуального представления параметров, определяющих аппроксимирующие и стабилизирующие свойства разностных схем.

Рассматриваемые ниже разностные схемы относятся к классу гибридных разностных схем.

2. ГИБРИДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Для наиболее точного моделирования различных физических явлений в счетной области необходимо использовать различные свойства разностных схем.

Например, в тех областях, где решение гладкое естественно применять схемы повышенного порядка точности. Для того чтобы не допустить возникновения нежелательных нефизических осцилляций в окрестностях разрывов надо применять разностные схемы с искусственной вязкостью или монотонные схемы первого порядка. *Гибридные* разностные схемы используются для того, чтобы наилучшим образом сочетать свойства разностных схем с целью удовлетворить этим требованиям.

В простом случае гибридную схему можно записать как комбинацию $GS1 + (1\text{-}G)S2$, где G – коэффициент гибридности, S1 и S2 – разностные схемы, обладающие различными интересующими исследователя свойствами. Например, S1 – схема первого порядка точности, а S2 – второго порядка.

Большинство применяемых для решения практических задач аэрогазодинамики являются гибридными. К гибридным схемам относятся такие широко известные алгоритмы как FCT (flux corrected transport), различные типы TVD (total variation diminishing) разностных схем, схемы типа ENO (essentially non-oscillatory) и WENO (weighted essentially non-oscillatory) и многие другие. Подробное описание и классификация различных типов гибридных разностных схем приведена в [6].

Таким образом, использование гибридных схем чрезвычайно полезно и удобно, так как позволяет исследователю использовать наилучшие свойства разных схем. В то же время возникает и неудобство – надо тщательно изучать свойства и ограничения коэффициентов гибридности (или весовых коэффициентов) для того, чтобы используемое свойство соответствовало физической модели рассматриваемой задачи.

Попробуем проделать это на примере конкретной разностной схемы, относящейся к классу гибридных схем.

3. АНАЛИЗ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Рассматривается WW (with weights) – разностная схема, разработанная автором в 1990-х годах [1,2]. Приведем ее на примере уравнения Бюргерса, являющегося одномерным аналогом уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3.1)$$

Введем обозначения для разностей

$$\sigma_1 u_m^n = u_{m+1}^n - u_m^n; \quad \sigma_2 u_m^n = u_{m+1}^n - u_{m-1}^n .$$

Тогда для уравнения (3.1) WW- схема записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= s_1 u_m^n + (1-s_1)0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) - \\ &- 0.5\frac{\tau}{h}(s_2\sigma_2 u_m^{n+1} + (1-s_2)\sigma_2 u_m^n) + \qquad (3.2) \\ &+ \frac{\nu\tau}{h^2}(s_2(\sigma_1 u_m^{n+1} - \sigma_1 u_{m-1}^{n+1}) + \\ &+ (1-s_2)(\sigma_1 u_m^n - \sigma_1 u_{m-1}^n)) , \end{aligned}$$

где s_1, s_2 - весовые коэффициенты; τ, h - шаг по времени и пространственной переменной.

Нетрудно заметить, что при выборе $s_2 = 0.5$ разностная схема (3.2) является линейной комбинацией схемы Крэнка-Никольсона, обладающей вторым порядком точности по времени и пространству, и схемы Лакса, обладающей существенной искусственной вязкостью.

При выборе $s_k = \frac{1-s_1}{\tau}$ добавочный член с искусственной вязкостью записывается как

$$s_k \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \qquad (3.3)$$

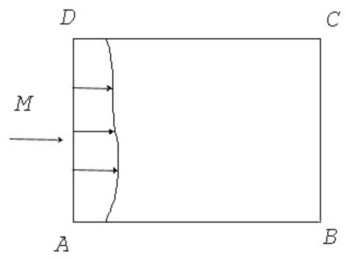
Таким образом, WW –схема представляет собой неявную безусловно устойчивую гибридную схему второго порядка по времени и пространству, обладающую искусственной вязкостью, позволяющей устранять нефизические осцилляции вблизи разрывов. Управление искусственной вязкостью осуществляется путем выбора весов. Несомненным достоинством данной разностной схемы является то обстоятельство, что искусственной вязкостью можно управлять, непосредственно задавая соответствующее значение весового коэффициента s_k .

Данная разностная схема успешно использовалась для широкого круга модельных и практических задач [7,8,].

Рассмотрим WW-схему на примере задачи течения в дальнем следе.

<u>Постановка задачи</u>

В расчетной области ABCD (рис.1) рассматривается течение вязкого сжимаемого теплопроводного газа, описываемое полной системой нестационарных уравнений Навье-Стокса. На границе AB задаются граничные условия симметрии. На границах DC и CB задаются «мягкие» граничные условия типа линейной экстраполяции.



.

Рис.1

На входной границе AD задаются распределения газодинамических параметров, полученные из расчетов обтекания осесимметричного тела и участка следа за ним. Эти начальные распределения давления P и скорости U представлены на рис.2,3.

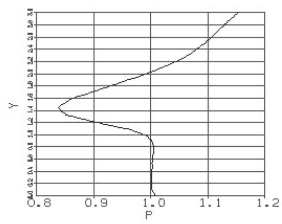


Рис.2

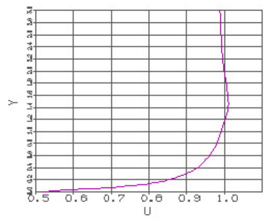


Рис.3

Данная задача решалась для широкого диапазона чисел Рейнольдса Re_∞. При достаточно больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty \ge 10^5$ течение можно считать турбулентным. В этом случае решение задачи определяется выбором и точностью модели турбулентности, так как турбулентная вязкость существенно превышает ламинарную.

В случае меньших значений чисел Re_∞, т.е. в ламинарном диапазоне возникает необходимость тщательного изучения свойств искусственной вязкости, заложенных в гибридной разностной схеме. Необходимо изучать, как управлять схемной вязкостью с помощью выбора весовых коэффициентов, какие существуют ограничения на значения весовых коэффициентов и т.д. Это все нужно в конечном итоге для того, чтобы четко представлять, какая вязкость в конкретном расчете определяет численное решение:

физическая вязкость математической модели или искусственная вязкость разностной схемы.

С этой целью исследуем свойства s_k на примере задачи дальнего следа и частично определим существующие для s_k ограничения.

<u>Организация расчетов.</u>

Рассмотрим предельный случай. Пусть $\mathrm{Re}_\infty \to \infty$, тогда мы решаем систему невязких уравнений Эйлера.

Введем понятие «решения без осцилляций» следующим образом. Выберем решение для определенного значения s_k где не возникает нефизических осцилляций, и проанализируем количество локальных экстремумов в счетной области, обозначив это количество как $\Phi_э$. Пусть $\Phi(s_k, N_x, N_y)$ - функционал, характеризующий количество локальных экстремумов в счетной области в зависимости от выбора веса s_k и сеточного разбиения (при условии равномерного разбиения) по соответствующим направлениям N_x и N_y. Тогда задача формулируется так: определить при каких значениях s_k для каждого набора (N_x, N_y) сеточного разбиения

$$\Phi(s_k, N_x, N_y) = \Phi_э \qquad (3.4)$$

Иначе говоря, для каждого набора (N_x, N_y) нужно решить обратную задачу, варьируя s_k до тех пор, пока не будет выполнено условие (3.4).

Схема расчета выглядит следующим образом. При $\mathrm{Re}_\infty \to \infty$ для каждого сеточного разбиения (N_x, N_y) решается прямая задача моделирования течения в дальнем следе с помощью WW- схемы при некотором заданном начальном значении s_k. В счетной области определяется значение $\Phi(s_k, N_x, N_y)$ - количество локальных экстремумов. Далее решается классическая обратная задача путем вариации s_k до выполнения условия (3.4). Одновременно проводится в режиме online визуальное представление s_k в виде поверхности $s_k = s_k(N_x, N_y)$.

Таким образом, в результате должна получиться поверхность $s^*{}_k = s_k(N_x, N_y)$ предельных весовых коэффициентов. При выборе веса $s_k < s^*{}_k$ для каждого (N_x, N_y) в численном решении возникают нефизические осцилляции, которые могут приводить к развалу решения.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Полученная в результате расчетов поверхность значений предельных весовых коэффициентов $s^*{}_k = s_k(N_x, N_y)$ представлена на рис.4. Эти же данные представлены в виде изолиний на рис.5.

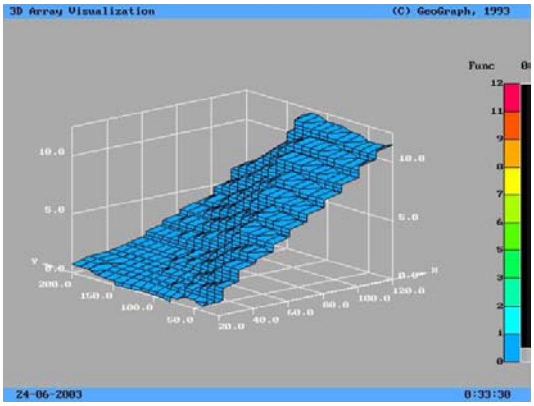


Рис.4

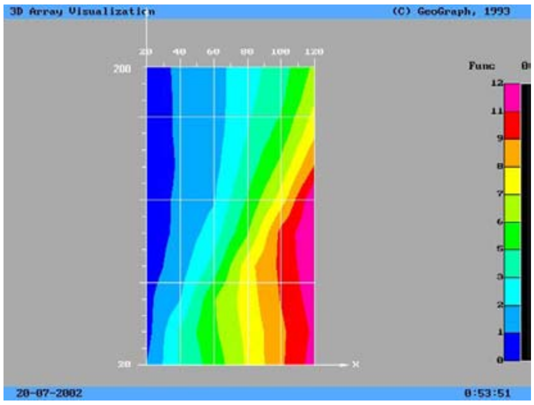


Рис.5

Анализируя вид данных, представленных на рис.4,5, естественно применить преобразование данных и представить их в виде $F = s^*{}_k N_y / N^2{}_x$. Вид поверхности после применения преобразования представлен на рис.6,7.

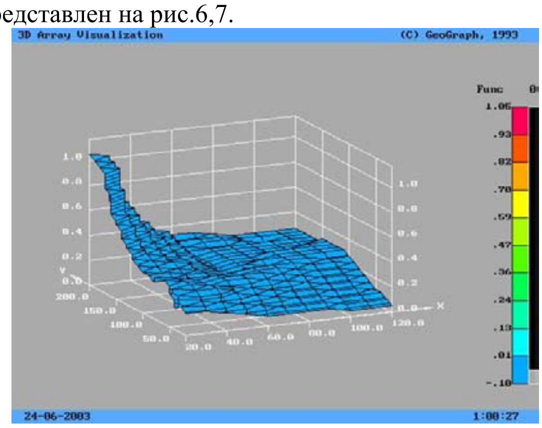


Рис.6

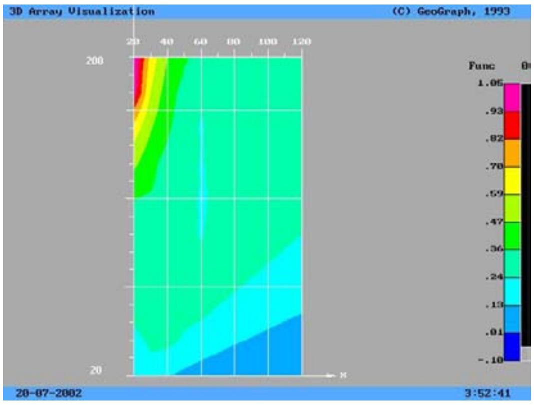


Рис.7

Характер данных на рис. 6,7 свидетельствует о том, что для набора (N_x, N_y) при условии $N_x \approx N_y$ выполняется соотношение $F = const$. Следовательно, значения предельного веса s_k, при котором не возникает нефизических осцилляций, может определяться как

$$s^*_k = N_x^2 const / N_y \quad (4.1)$$

Или учитывая что $N_x = \frac{1}{h_x}$, $N_y = \frac{1}{h_y}$, выражение (4.1) можно представить как

$$s^*_k = h_y const / h_x^2 \quad (4.2)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный выше способ позволяет уточнять аппроксимирующие свойства гибридных разностных схем и, следовательно, может играть существенную роль при верификации результатов математического моделирования. В вышеизложенном конкретном случае он позволяет для любого набора сеточных разбиений определять предельный весовой коэффициент без дополнительных вычислений, пользуясь лишь свойствами визуально представленной поверхности и полученным с ее помощью аналитическим выражением.

Концептуальный подход к анализу свойств разностной схемы заключается в сочетании решения обратной задачи для каждого сеточного разбиения с визуальным представлением предельных весовых поверхностей. Данный подход имеет важное методическое значение, т.к. позволяет эффективно изучать и представлять свойства гибридных разностных схем в процессе их конструирования. Визуальное представление online позволяет резко ускорить процесс анализа численного решения.

Иллюстрации получены при помощи комплекса GeoGraph, разработанного под руководством В.Н.Кочина, которому автор выражает свою признательность.

6. ЛИТЕРАТУРА

[1] А.Е.Бондарев «Численное решение уравнения Бюргерса в области высоких градиентов» Препринт ИПМ им М.В.Келдыша РАН, М., № 12, 1990, 13 с.

[2] А.Е.Бондарев «Разработка метода численного исследования отрывных течений вязкого газа». Отчет ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, N 170-90, 1990, 16 с.

[3] А.Е.Бондарев «Визуализация в вычислительной аэрогазодинамике: проблемы развития». Тр. ГРАФИКОН-99, М., МГУ, 1999, с.9-13.

[4] А.Е.Бондарев, Е.Н.Бондарев «Функции визуализации в вычислительной аэрогазодинамике» Общероссийский научно-технический журнал «Полет», М., «Машиностроение», N 10, 2000, с.53-60.

[5] А.К.Алексеев, А.Е.Бондарев, Ю.А.Молотилин «О визуализации сопряженных полей при идентификации и управлении трехмерным течением вязкой жидкости». Сб. «Применение методов научной визуализации в прикладных задачах», М., МГУ, 2000, с.8-18.

[6] А.Г.Куликовский,Н.В.Погорелов, А.Ю.Семенов «Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений» М, Физматлит, 2001, 608 с.

[7] А.Е.Бондарев «Влияние параметров сверхзвукового потока на характерное время установления течения при обтекании уступа» Изв.АН СССР, МЖГ, N 4, 1989, с.137-140.

[8] A.K.Alexeev, A.E.Bondarev, Y.A.Molotilin « On Inverse Problems for 3D Time-Dependent Free Convection Heat Transfer» Proc. of National Heat Transfer Conference ASME, v.10, 1995, p.113-122.

Автор:

Александр Бондарев научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.
Адрес: 125047, Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН
Телефон: (095) 250-78-17
E-mail: bond@spp.keldysh.ru

Finite-Difference Schemes Design and Optimization by Visualization Methods

The problems of finite-difference schemes design and optimization are considered. Numerical-visual approach allows fast and effective optimization of hybrid finite-difference schemes properties .