

# Поверхности и патчи свободных форм на основе скалярных и аналитических функций возмущения

Вяткин С.И., Долговесов Б.С.

[sivser@mail.ru](mailto:sivser@mail.ru), [bsd@iae.nsk.su](mailto:bsd@iae.nsk.su)

Институт автоматизации и электротехники СО РАН, Новосибирск, 630090 Россия

## Аннотация

Рассматриваются поверхности свободных форм на основе скалярных функций возмущения и патчи свободных форм на основе аналитических функций возмущения.

Особенностью поверхностей свободных форм на основе скалярных функций возмущения и метода их визуализации является независимость времени геометрической обработки и количества данных, необходимых для моделирования поверхности, от ее геометрической формы. Патчи свободных форм на основе аналитических функций возмущения обладают достоинством сплайнового представления поверхностей - высокой степенью гладкости, но главной их отличительной чертой является произвольность формы при небольшом количестве функций возмущения.

**Ключевые слова:** *поверхности свободных форм, патчи свободных форм, функции возмущения.*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в компьютерной графике используется несколько типов представления геометрических объектов, каждый из которых, в силу своих свойств, используется в различных областях от систем 3D -моделирования и CAD систем, до систем визуализации реального времени. Аналитическое и функциональное представление наиболее точно из всех существующих описывает геометрию объекта и имеет наименьший размер данных, необходимых для описания геометрии объекта. К недостаткам можно отнести сложность геометрической обработки и визуализации в реальном времени. Описанные в [1] способы функционального задания (F-ger), демонстрируют компактность и гибкость задания поверхностей, а также объектов, являющихся результатами логических операций над объемами или CSG (constructive solid geometry).

Полигональное задание поверхности, по сути, является кусочно-линейной интерполяцией некой поверхности. Достоинства такого задания заключаются в исключительной простоте представления и универсальности. Ведь кусочно-линейное представление существует для любой поверхности. Так же стоит отметить небольшие вычислительные затраты, необходимые для визуализации и геометрических преобразований, например, вычисления линии пересечения двух объектов. Недостатки заключаются в больших размерах баз данных, необходимых для хранения информации о геометрии поверхности, и ломаная структура

объекта, главным образом на силуэте, проявляющаяся при его визуализации.

Задание поверхностей на основе сплайнового представления [2], наряду с аналитическим, используется в основном в моделирующих системах типа AutoCAD, 3D Studio. Данное задание отличается высокой точностью представления как двух, так и трехмерных объектов. В системах визуализации такое представление поверхностей пока не нашло своего применения, так как требует очень высоких вычислительных затрат на обработку и визуализацию.

Существует так же ряд специфичных способов задания поверхностей: в виде карты высот, в виде набора сечений или контуров и т. д. Такие способы задания используются в основном для решения узко-специализированного круга задач и применяются, в основном, в программах моделирования и проектирования.

В данной работе рассмотрены, во-первых, *поверхности свободных форм на основе скалярных функций возмущения* и преимущества данного способа задания перед существующими методами (сплайн базированное и полигональное представление объектов), а также основные ограничения предложенного способа. Предлагаемый способ задания сложных поверхностей обладает главным достоинством сплайнового представления поверхностей - высокой степенью гладкости. При использовании бикубической интерполяции, поверхность, смоделированная предложенным способом, описывается функцией 3-го порядка и имеет гладкость степени  $C^2$  в рамках *одного* узла карты высот. Поверхность же целиком может иметь порядок значительно превосходящий третий, и в то же время моделироваться *одной* картой высот, что эквивалентно заданию такой же поверхности большим количеством сплайн патчей. Большое количество патчей для сплайнового представления поверхностей, соответственно, увеличивает время геометрической обработки поверхности на величину, прямо пропорциональную их количеству. Использование бикубической интерполяции позволяет снизить объем данных, представляющих модель в предлагаемом способе.

Во-вторых, в данной работе предлагаются *патчи свободных форм на базе аналитических функций возмущения*. Особый интерес в настоящее время вызывает небольшой подкласс морфинга - скиннинг, обтягивание скелета мышцами и кожей. Для создания и анимации органических моделей. *Патчи свободных форм*, которые в данной работе представлены, как нельзя лучше подходят для этой задачи.

## 2. ПОВЕРХНОСТИ СВОБОДНЫХ ФОРМ НА ОСНОВЕ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕНИЯ

Определим основные понятия и термины, которые будут использоваться в дальнейшем. Более подробно общая теория поверхностей описана в [3].

Открытое односвязное множество точек на плоскости будем называть плоской областью. Пусть  $D$  плоская область, и  $\bar{D}$  ее замыкание. Введем на плоскости координатную систему  $(u, v)$ . Пусть  $x, y, z$  прямоугольные декартовы координаты точек в трехмерном евклидовом пространстве  $E^3$ . Зададим на множестве  $\bar{D}$  три непрерывные функции

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v). \quad (1)$$

И предположим что функции (1) обладают следующими свойствами.

*Свойство А.*

Если  $(u_1, v_1)$  и  $(u_2, v_2)$  различные точки множества  $\bar{D}$ , то точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  пространства  $E^3$  координаты которых вычислены по формулам (1)

$$x_1 = \varphi(u_1, v_1), y_1 = \psi(u_1, v_1), z_1 = \chi(u_1, v_1) \quad (2)$$

$$x_2 = \varphi(u_2, v_2), y_2 = \psi(u_2, v_2), z_2 = \chi(u_2, v_2)$$

тоже различны.

*Определение* множество  $S$  точек  $M(x, y, z)$  координаты  $x, y, z$  которых определяются соотношениями

$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$ , где функции  $\varphi, \psi, \chi$  в замыкании  $\bar{D}$  области  $D$  обладают свойством А, называется *простой поверхностью*.

Далее *поверхностью свободной формы F*, будем называть *простую поверхность*, являющуюся графиком функции, определенной в 3-х мерном пространстве  $z = f(x, y)$ .

Задание поверхности свободной формы на основе скалярного поля представляет собой совокупность некой *базовой поверхности P*, находящейся в той же системе координат, что и F, и *связанной* с базовой поверхностью P, *карту высот*.

В качестве базовой поверхности может быть использована любая поверхность, но на практике используются простые поверхности типа плоскости, эллипсоида, цилиндра.

Карта высот представляет собой двумерный *прямоугольник*, который далее будет именоваться *областью возмущения D<sub>p</sub>*, базовой поверхности P, внутри которого задана функция возмущения  $h(u, v)$ . Которая, в свою очередь, определяет само возмущение. Область определения функции  $h(u, v)$   $D_{h(u, v)} = \{U, V\}$ , где U и V размеры прямоугольника.

То, что карта высот *связана* с базовой поверхностью, означает, что существует преобразование G ( $\mathcal{R}^3 \Rightarrow \mathcal{R}^2$ ) из системы координат, в которой находятся F и P в систему координат карты высот, как правило, таким преобразованием является параллельная проекция.

Значение функции  $h(G(d))$  характеризует отклонение точки  $d_F$ , лежащей на поверхности F от точки  $d_P$ , являющейся проекцией этой точки на поверхность P. Другими словами, значение функции  $h(G(d_F))$  равно модулю вектора:

$$\vec{v} = (\vec{d}_F - \vec{d}_P) \quad (3)$$

Следовательно, область поверхности свободной формы можно определить как множество точек в  $\mathcal{R}^3$  определяемых векторным уравнением.

$$\vec{F} = G(\vec{v}) + \vec{n} * h(G(\vec{v})); \forall \vec{v} \in \mathcal{R}^3 \quad (4)$$

, где  $\vec{n}$  - нормаль базовой поверхности.

В случае, если  $v$  находится за пределами области возмущения, вектор  $\vec{n} * h(G(v)) = 0$ . А вектором F является вектор на базовой поверхности.

Таким образом, для задания формы возмущающей поверхности можно использовать таблицу чисел, а в качестве функции  $h$  - можно использовать функцию интерполяции по узловым значениям, которые берутся из таблицы (рис. 1).

В таком случае можно сказать, что в области возмущения  $D_p$  будет задано скалярное поле.

Функция  $h$  имеет следующий вид:

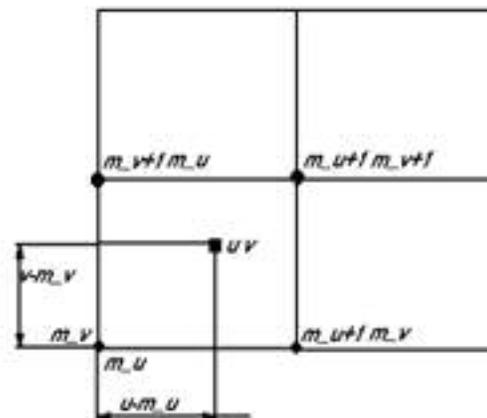


Рис. 1. Таблица чисел карты высот.

$$h(u, v) = f_0 + (f_1 - f_0) * (v - m_v)$$

где

$$f_0 = (1 - (u - m_u)) * \text{table}[m_u, m_v] + (u - m_u) * \text{table}[m_u + 1][m_v];$$

$$f_1 = (1 - (u - m_u)) * \text{table}[m_u, m_v + 1] + (u - m_u) * \text{table}[m_u + 1][m_v + 1];$$

$m_u$  - есть целая часть от  $u$

$m_v$  - есть целая часть от  $v$

(5)

где  $\text{table}[m_u][m_v]$  есть  $m_u, m_v$ -ый элемент таблицы на рисунке 1.

Обобщая, задание поверхности свободной формы F на основе скалярного поля есть:

- Базовая поверхность.
- Преобразование из системы координат базовой поверхности в систему координат карты высот.
- Функция возмущения.
- Таблица чисел, характеризующих отклонения поверхности F от базовой, в контрольных точках.

Все вышесказанное хорошо иллюстрируется на рисунке 2.

На практике, в качестве базовой поверхности практически всегда используется плоскость, использование других типов поверхностей, приводит к осложнениям, связанным с тем, что, во-первых, для абсолютно произвольной поверхности трудно найти преобразование G. Использование же в качестве поверхности простых геометрических тел,

отличных от плоскости, типа эллипсоида или цилиндра так же не эффективно ввиду ограничений, о которых будет сказано ниже.

Далее будет рассматриваться задание поверхностей свободных форм на основе плоскостей, (но все нижесказанное справедливо так же и для других видов базовых поверхностей). В этом случае, преобразованием G

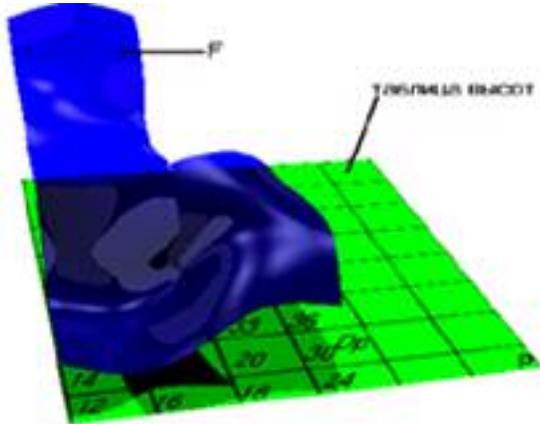


Рис. 2. Функция возмущения и базовая плоскость.

является параллельная проекция в направлении противоположном вектору нормали базовой плоскости. Будем использовать понятие поверхности свободной формы F как комбинацию *плоскости* и *возмущающей поверхности* с прямоугольным контуром (рис. 3) или поверхности определяемой векторным уравнением (4).

Особенность поверхности ландшафта заключается в том, что ландшафт, в рамках модели, можно считать поверхностью большой, т.е. выходящей за границы видимости. Значит, он может моделироваться на базе



Рис. 3. Комбинация базовой плоскости и области возмущения.

плоскости и прямоугольной области возмущения, в которой задано скалярное поле [4]. В то время как поверхность, представляющая некий физический объект, ограничена. Другими словами, если ландшафт можно смоделировать как поверхность имеющую форму квадратной области, вырезанной из земной поверхности, вследствие того, что значительная часть его обрезается пирамидой видимости, то небольшие, в рамках модели, объекты, так представить

нельзя, так как они имеют границу представляющую собой не *прямоугольную*, а *кривую* линию.

Соответственно, смоделировать объект, на основе скалярных функций возмущения вышеописанным способом не удастся, так как все объекты смоделированные этим

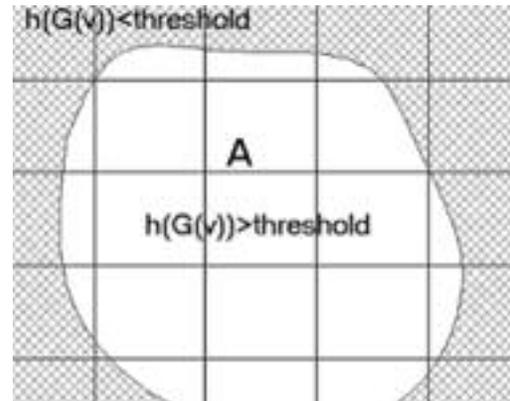


Рис. 4. Область возмущения.

способом имеют прямоугольную границу. Исходя из этого, вышеописанный алгоритм построения поверхностей, был модифицирован так, чтобы стало возможным отображать объекты с “нелинейной” границей.

Для этого введем понятие порогового значения, находящегося в узле таблицы и изменим критерий принадлежности точки пространства (4) на нижеследующую систему.

$$\begin{cases} F = G(v) + n * h(G(v)) \\ h(G(v)) \geq threshold \\ G(v) \in D_p \end{cases} \quad (6)$$

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

где n нормаль базовой поверхности и

$$threshold = const \in \mathbb{R}$$

и означает пороговое значение

Введение требования принадлежности образа вектора v - G(v) к области возмущения D<sub>p</sub> позволяет отсекал части пространства, которые отображаются в область находящуюся вне области возмущения. По критерию h(G(v)) ≥ threshold отсекаются элементы пространства, образ которых лежит в области возмущения, но которые не принадлежат моделируемому объекту. Область в карте высот, определяемая этими требованиями, определяет в области возмущения многосвязную область, которая и используется при моделировании объекта. Данная область соответствует области A на рисунке 4, заштрихованная область – область в карте высот не используемая для моделирования поверхности. Поверхность, смоделированная первым способом, изображена на рисунке 3, на рисунке 5 изображена поверхность, смоделированная вторым способом. Описанный метод создания поверхностей, обладает существенным ограничением на класс моделируемых объектов. Требование от F (рис. 2) того, чтобы она была поверхностью нулевого уровня некой функции, означает то, что каждой точке на базовой плоскости можно поставить в соответствие одну и только одну точку на поверхности F. Таким образом смоделировать одной картой высот, например, поверхность вращения

нельзя, так как в этом случае одной точке на плоскости будет соответствовать две точки на поверхности. Для моделирования поверхностей не являющихся поверхностями нулевого уровня функции предлагается метод *раздельного моделирования*.

Метод раздельного моделирования заключается в разбиении плоскостями исходной поверхности  $F$  на составляющие ее подповерхности  $F = F_1 \cup F_2 \dots \cup F_{i-1} \dots \cup F_n$ , построении



Рис. 5. Поверхность свободной формы.

вышеописанным способом карт высот по отдельности для каждой из этих разбивающих плоскостей, и моделировании с помощью операций CSG исходной поверхности из набора моделей подповерхностей. При этом расположение каждой из разбивающих плоскостей происходит по двум критериям.

Первый заключается в возможности построения карты высот применительно к данной разбивающей плоскости, части объекта, расположенной в той части полупространства, которая находится в направлении



Рис. 6. Объект, состоящий из двух поверхностей свободных форм.

вектора нормали разбивающей плоскости.

Второй критерий заключается в возможности построения исходного объекта с помощью операций CSG из

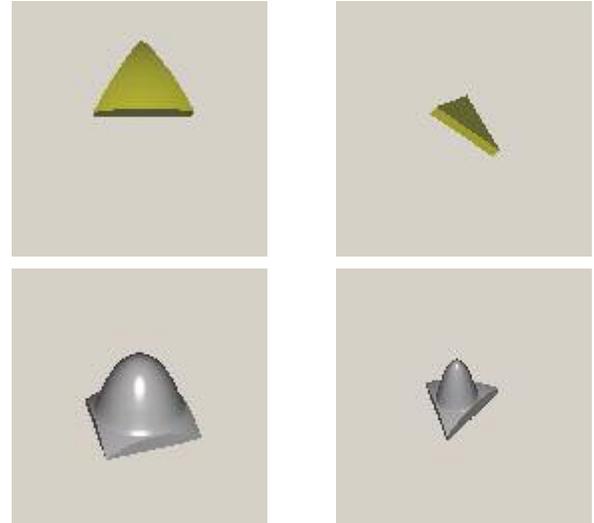


Рис. 7. Примеры сферического и плоского треугольников и возмущенных одной функцией сферических четырехугольника и треугольника (патчи свободных форм).

полученных моделей подповерхностей. Другими словами, должно существовать разбиение объекта плоскостями, такое, чтобы части отсекаемые плоскостями в совокупности представляли собой исходный объект. Применение такого подхода значительно расширяет класс моделируемых поверхностей. На рисунке 6 изображен объект, состоящий из плоской детали и поверхности вращения, построенной с помощью метода раздельного моделирования, используя разбиение одной плоскостью и, соответственно, две карты высот для моделирования поверхности с помощью вышеописанных методов.

### 3. Патчи свободных форм на основе аналитических функций возмущения.

Предлагается описывать патчи свободных форм, задавая функцию отклонения (второго порядка - квадрики) от базовых плоских и сферических треугольников и четырехугольников (многоугольников) (рис. 7). Патч свободной формы есть композиция базовых плоских или сферических многоугольников и возмущения  $F'(x,y,z) = F(x,y,z) + R(x,y,z)$ , где функция возмущения  $R(x,y,z)$  находится следующим образом:

$$R(x,y,z) = \begin{cases} Q^2(x,y,z), & \text{при } Q(x,y,z) > 0 \\ 0, & \text{при } Q(x,y,z) \leq 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $Q(x,y,z)$  – возмущающая квадратика.

В качестве  $Q$  так же может быть возмущенный многоугольник (патч свободной формы). Другими словами, композиция базового многоугольника и функции отклонения являются новой функцией возмущения, т.е. производной для другого базового многоугольника. Так как  $\max[Q + R] \leq \max[Q] + \max[R]$ , то для оценки максимума  $Q$  на некотором интервале необходимо вычислить максимум функции возмущения на этом же интервале [5].

Получающаяся поверхность патча будет гладкой (рис. 8, 9),

и потребуется небольшое количество функций возмущения для создания сложных форм патчей.

#### 4. Заключение

Прежде всего, хотелось бы отметить, что метод задания поверхностей на основе скалярных функций возмущения

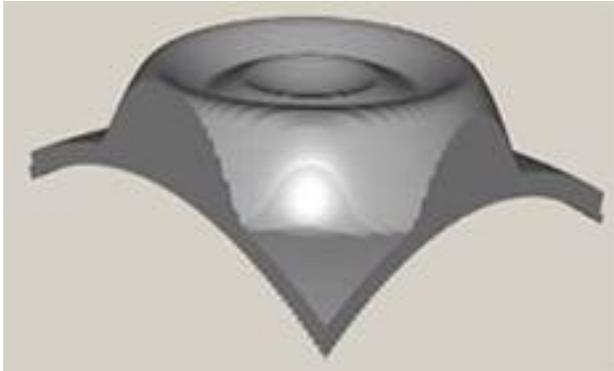


Рис. 8. Возмущенный тремя функциями сферический четырехугольник (патч свободной формы).

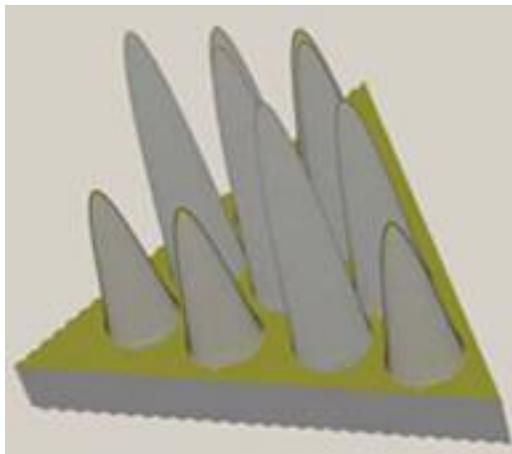


Рис. 9. Возмущенный девятью функциями плоский треугольник (патч свободной формы).

был разработан для применения в системах визуализации реального времени, а не для точного моделирования объектов.

Особенностью предлагаемого метода моделирования поверхностей и сложных объектов, является независимость времени геометрической обработки и количества данных, необходимых для моделирования поверхности, от ее геометрической формы (в пределах одной базовой плоскости).

Представление объектов на базе сплайнов, обладает следующими достоинствами:

- Небольшие объемы данных необходимых для описания модели.
- Поверхности на базе сплайн – патчей в рамках одного патча имеют гладкость  $C^2$ .

К недостаткам сплайнового представления можно отнести:

- Высокую вычислительную сложность алгоритмов обработки.
- Низкую эффективность при моделировании поверхностей с высокой кривизной, например поверхностей земного ландшафта.

Перечисленных недостатков нет у предложенных патчей свободных форм, кроме того, объем данных необходимых для описания модели еще меньше, чем для сплайн-патчей.

Вышеописанный способ задания сложных поверхностей на базе скалярных функций возмущения, обладает главным достоинством сплайнового представления поверхностей - высокой степенью гладкости. Полигональное представление объектов обладает нижеследующими достоинствами:

- Возможность моделирования поверхностей и объектов любой сложности.
- Низкие вычислительные затраты необходимые для обработки одного примитива.

Основным недостатком такого представления, является большое количество примитивов, необходимое для моделирования высоко детализированных и гладких поверхностей, что ведет к значительному увеличению объема данных, описывающих модель и времени ее геометрической обработки. В сравнении с полигональным способом, предложенный метод обладает рядом достоинств. Использование бикубической интерполяции позволяет снизить объем данных, представляющих модель. Но даже в случае описания поверхности имеющей  $n \cdot n$  вершин ее представление на базе полигонов требует  $3 \cdot n^2$  вещественных чисел, необходимых для описания вершин и  $6 \cdot (n-1)^2$  целых чисел, необходимых для описания треугольников. В то время, как задание такой же поверхности на базе скалярного поля требует  $n^2$  вещественных чисел, необходимых для описания возмущения. Если учесть, что размер одного вещественного числа равен размеру 2-х целых чисел, то коэффициент сжатия размера исходных данных  $k = (3 \cdot n^2 + 3 \cdot (n-1)^2) / n^2 \approx 6$ .

Если же поверхность является гладкой, то в предположении что использование бикубической интерполяции позволяет использовать карту высот размерности меньшей исходной в  $l$  раз то коэффициент сжатия  $(n = l \cdot m) \quad k = (3 \cdot (l \cdot m)^2 + 3 \cdot (l \cdot (m-1))^2) / m^2 \approx 6 \cdot l^2$ .

К недостаткам предлагаемого метода, можно отнести то, что моделируемая поверхность обязана быть *графиком функции*. Это накладывает сильные ограничения на класс моделируемых поверхностей. Но в то же время этот недостаток частично компенсируется использованием метода раздельного моделирования. Если исходную поверхность, не удовлетворяющую данному требованию, можно разбить на  $m$  подповерхностей, каждая из которых ему удовлетворяет, а затем построить  $m$  моделей предложенным методом. После чего, модель поверхности можно построить, используя операции CSG над  $m$  моделями, представляющими подповерхности. Использование в качестве базовой поверхности плоскости, связано, в основном, с простотой реализации алгоритма в этом случае. А так же тем, что использование в качестве базовой поверхности плоскости требует меньших вычислительных затрат, необходимых для визуализации, приблизительно в 1.5 раза, в сравнении с моделями использующими в качестве базовых эллипсоид или же

цилиндр. Повышение вычислительных затрат связано с тем, что вычислительная сложность преобразования  $G$  в этом случае выше, чем вычислительная сложность преобразования  $G$  в случае использования плоскости в качестве базовой поверхности. В самом деле, в случае использования в качестве базовой поверхности плоскости, преобразованием  $G$  является параллельная проекция. А именно,  $u$  и  $v$  координатами являются  $x$  и  $y$ , соответственно, в то время как для модели на базе эллипсоида или цилиндра, требуется преобразование из прямоугольной декартовой системы координат в сферическую или цилиндрическую соответственно. Так же при использовании сферической системы координат карты высот, возникают сложности с вычислением уровней детализации, что так же повышает вычислительные затраты. К тому же эллипсоид и цилиндр не обладают той степенью гибкости присущей плоскости, что, в свою очередь, осложняет использование метода раздельного моделирования и, соответственно, сужает класс моделируемых объектов.

В данной работе для визуализации применялся алгоритм рекурсивного деления объектного пространства системы Voxel Volumes [4].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 В. Аджиев, А. Пасько, В. Савченко. Моделирование форм с использованием вещественных функций// Открытые системы, № 5, 1996, стр. 15-18.
- 2 Г. Марчук. Методы вычислительной математики. Наука М. 1980.
- 3 Э. Позняк, Е. Шишкин. Дифференциальная геометрия// из-во МГУ 1990.
- 4 Vyatkin S., Dolgovesov B., Yesin A., et al., Voxel Volumes volume-oriented visualization system, *International Conference on Shape Modeling and Applications* (March 1-4, 1999, Aizu-Wakamatsu, Japan) IEEE Computer Society, Los Alamitos, California, 1999, pp. 234-241.
- 5 Vyatkin S., Dolgovesov B., Guimaoutdinov O., Synthesis of Virtual Environment Using Perturbation Functions, volume III (Emergent Computing and Virtual Engineering), *World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics Proceedings*, Orlando, FL, USA, July 22-25, 2001, pp. 350-355.

### Сведения об авторах:

Лаборатория Синтезирующих Систем Визуализации, ИАиЭ СО РАН. Россия 630090, Новосибирск, пр. Коптюга, 1.  
телефон: (+7-3832) 33-36-30

к.т.н., н.с. Вяткин С.И., [sivser@mail.ru](mailto:sivser@mail.ru),

к.т.н., зав. лаб. Долгovesов Б.С., [bsd@iae.nsk.su](mailto:bsd@iae.nsk.su).

## Freeform surfaces and patches based on scalar and analytical perturbation functions

Sergei I. Vyatkin, Boris S. Dolgovesov

*Institute of Automation and Electrometry, SB RAS, Novosibirsk, Russia*

The freeform surfaces and patches are discussed. New techniques for specifying freeforms without their approximation

by polygons or spline-patches are considered. A freeform surface is coded as differential height map, i.e. the carrier surface is defined by algebraic means and only deviation from this basic surface is stored in the each node. Such modeling method simplifies creation of smooth detail levels and shading. For skinning of organic skeletal models we suggest a freeform patches which are constructed with the use of analytical perturbation functions. A recursive algorithm of Voxel Volumes system for object space subdivision with masking of invisible surfaces and an effective technique of projective transformation for perspective imaging we used for visualization. Examples of images obtained by modeling of the algorithm with different ways of defining the objects are presented.