

# Применение метода Монжа при проецировании Функций на n плоскостей проекций

Волошин-Челпан Э.К., Вышнепольский В.И., Кадыкова Н.С.,  
МИТХТ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия,  
Ротков С.И., Васильев А.М.,  
НГАСУ, г. Нижний Новгород, Россия

## Реферат

Рассматривается проецирование многопараметрических функций на  $n$  плоскостей проекций. Приводится методика построения номограмм Монжа-Декарта, представляющих собой взаимосвязанную систему абаксов Декарта. Приводятся примеры построения и применения номограмм Монжа-Декарта для графического отображения многопараметрических функций, описывающих некоторые закономерности впервые созданных многих технологий вибрационного формования изделий из различных порошковых материалов.

## Ключевые слова

Многопараметрическая функция, номограмма Монжа-Декарта, плоскость, нормальное напряжение, касательное напряжение, абакс Декарта, метод Монжа.

Широко известно проецирование объектов, описываемых  $N$ -мерными функциями на 3-х плоскостях проекций, используемое в курсе Начертательной Геометрии.

Фактически 6 основных видов изображения объектов на плоскости можно интерпретировать как использование метода Монжа при проецировании на 6 плоскостей проекций.

Однако математические модели в реальных условиях описываются многопараметрическими уравнениями, которые требуют отображения на большое количество плоскостей проекций. Такие задачи находят свое решение при использовании сочетания метода номограмм и метода Монжа. При этом каждая плоскость проекций представляет собой элементарную номограмму – абакс Декарта, а  $n$  плоскостей проекций позволяют не только быстро выполнять расчеты многопараметрических функций, но и получать новые научные результаты, анализируя те или иные закономерности.

Особенно важно то, что рассматриваемый тип номограмм является геометрической моделью закономерностей, описываемых многопараметрическими функциями, и позволяет отображать любые реальные изменения переменных в этих функциях.

Рассматриваемые номограммы следует классифицировать как номограммы Монжа-Декарта.

Рассмотрим несколько примеров построения и применения номограмм Монжа-Декарта для графического отображения и анализа многопараметрических функций, описывающих некоторые закономерности впервые созданных многих технологий вибрационного формирования изделий из различных порошковых материалов [1]. Эти технологии были созданы на основе теории [2]. Одни из основных закономерностей этой теории

описываются функциями суммарного динамического нормального  $\sigma_g$  и сдвигающего  $\tau_g$  напряжений от действующих статических  $p_c$  и вибрационных напряжений в наклонной площадке для случая предельного равновесия с учетом дополнительного воздействия, обеспечивающего сдвиг, соответственно

$$\begin{aligned}\sigma_g &= p_c \cdot \cos\beta - p_b \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos\varphi \quad (1) \\ \tau_g &= p_c \cdot \cos\beta \cdot (\operatorname{tg}\rho - \operatorname{tg}\beta) + \\ &+ p_b \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos\varphi \cdot (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\rho) \quad (2)\end{aligned}$$

В функции (1) содержится 6 параметров, а в функции (2) – 7 параметров. Несмотря на то, что такие количества параметров не создают проблем для построения номограмм Монжа-Декарта, тем не менее, есть возможность уменьшения их количества за счет преобразования функций (1),(2), состоящих из размерных параметров, в безразмерные параметры. Для этого вводятся обобщенные параметры влияния вибрации на нормальные  $k_\sigma$  и касательные  $k_\tau$  напряжения в наклонной площадке, соответственно

$$k_\sigma = \frac{\sigma_g}{\sigma_c} \quad (4),$$

$$k_\tau = \frac{\tau_g}{\tau_c} \quad (5),$$

$$\text{где } \sigma_c = p_c \cdot \cos\beta \quad (6),$$

$$\tau_c = p_c \cdot \cos\beta \cdot (\operatorname{tg}\rho - \operatorname{tg}\beta), \quad (7).$$

С учетом (1), (2), (6), (7) получаем

$$k_\sigma = 1 - q \frac{\cos\varphi}{\cos\beta} \quad (8),$$

$$k_\tau = 1 - q \frac{\operatorname{tg}\rho \cos\varphi + \sin\varphi}{\operatorname{tg}\rho \cos\beta - \sin\beta} \quad (9),$$

где  $q = q_0 \sin\omega t$ ,

$$q_0 = \frac{p_b}{p_c} \quad (10).$$

Таким образом, количество необходимых абаксов Декарта уменьшается с 6 до 5 в функциях (8) и (10), и с 7 до 6 в функциях (9) и (10).

Строим номограмму Монжа-Декарта для функций (8) и (10) в виде трех взаимосвязанных абаксов Декарта, рис.1:

$$\begin{aligned}(k_\sigma - 1) \cdot \cos\beta &= \alpha_1; \\ -q \cdot \cos\varphi &= \alpha_1; \\ q &= q_0 \sin\omega t.\end{aligned}$$

Пример пользования номограммой показывается штриховыми линиями со стрелками.

Положительные значения нормального напряжения  $\sigma_g$  и, соответственно, положительные значения  $k_\sigma$  приводят к уплотнению порошкового материала.

Отрицательные значения  $\sigma_g$  и  $k_\sigma$  приводят к разрыхлению материала, что нежелательно.

В пределах цикла колебательного движения  $q$  в одной половине цикла имеет положительные значения, а в другой – отрицательные. Это является причиной изменения  $k_\sigma$  в пределах цикла, соответственно, от максимальных значений до минимальных, а в некоторых случаях и до отрицательных. Например, при  $q_0=2$ ;  $\varphi=0$  и  $\beta=0$  получаем  $k_{\sigma \max} = 3$ ,  $k_{\sigma \min} = -1$ . Такой режим нежелателен. При том же значении  $q_0=2$ , но  $\varphi=60^\circ$  и  $\beta=0$ , получаем  $k_{\sigma \max}=2$ ,  $k_{\sigma \min} = 0$ .

Таким образом, номограмма позволяет достаточно быстро выбрать оптимальный режим при любых значениях параметров функций (8) и (10).

Строим номограмму Монжа-Декарта для функций (9) и (10), состоящую из пяти взаимосвязанных абаксов Декарта, рис. 2:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \operatorname{tg} \rho \cdot \cos \beta - \sin \beta; \\ \alpha_2 &= \operatorname{tg} \rho \cdot \cos \varphi + \sin \varphi; \\ (k_\tau - 1) \cdot \alpha_1 &= \alpha_3; \\ \alpha_3 &= -q \cdot \alpha_2; q = q_0 \sin \omega t.\end{aligned}$$

Пример пользования показан линиями со стрелками. На оси  $\rho^\circ$  выбирается значение А, соответствующее углу внутреннего трения порошкового материала; от нее одна линия проводится до выбранного значения угла  $\varphi$  отклонения вибрационной силы от нормали к выбранной элементарной площадке и от точки В линия идет вверх до пересечения с выбранными максимальными и

## ЛИТЕРАТУРА

1. Voloshin-Chelpan E. K. "Novel Highly Efficient Technologies of Vibration Compaction Particulate Materials". The proceeding of the 1995 International

минимальными значениями  $q$ , в рассматриваемом примере  $q = \pm 1$ .

Знаки "+" и "-" определяют значения  $q$  в различных половинах цикла колебательного движения. По линиям  $q_{\max}$  и  $q_{\min}$ , а в рассматриваемом случае  $q_{\max} = 1$ ,  $q_{\min} = -1$ . находим эти экстремальные значения  $q$  на оси  $q$  в крайнем левом абаксе Декарта и проводим горизонтальные линии до касания с синусоидой, у которой  $q_0 = |q_{\max}|$ . Эти синусоиды показывают изменение  $q$  в течение цикла колебательного движения.

Теперь от точки А проводим линию вправо до пересечения в точке Е с линией выбранного значения  $\beta^\circ$  и далее вверх до пересечения в точках F и G с лучами, идущими вправо от точек С и D.

Точки А и G лежат на лучах соответственно максимального и минимального значений  $k_\tau$ .

Возможен и другой вариант решения задачи. Можно задать минимальные и максимальные значения  $k_\tau$ , провести линию вниз до пересечения с линией, идущей вправо до известного значения угла и получить значения угла  $\beta^\circ$ . Затем из точки А провести линию влево до пересечения с выбранным значением угла и далее вверх до пересечения с линиями, идущими влево от точек G и F, а далее как в первом варианте решения задачи.

Эффективность применения вибрации определяется значениями параметра влияния вибрации на касательные напряжения, лежащие в области  $k_\tau > 1$ .

Таким образом, номограмма позволяет быстро выбрать несколько таких режимов, отличающихся друг от друга различными значениями параметров  $\rho^\circ$ ,  $\beta^\circ$ ,  $q_0$ .

Conference on powder metallurgy & particulate materials held May 14-17, 1995 in Seattle, USA. P. 100-109.

2. Voloshin-Chelpan E. K. "Vibration Compaction Particulate Materials. Theoretical Basis". The proceeding of the 1995 International Conference on powder metallurgy & particulate materials held May 14-17, 1995 in Seattle, USA. P.91-99.

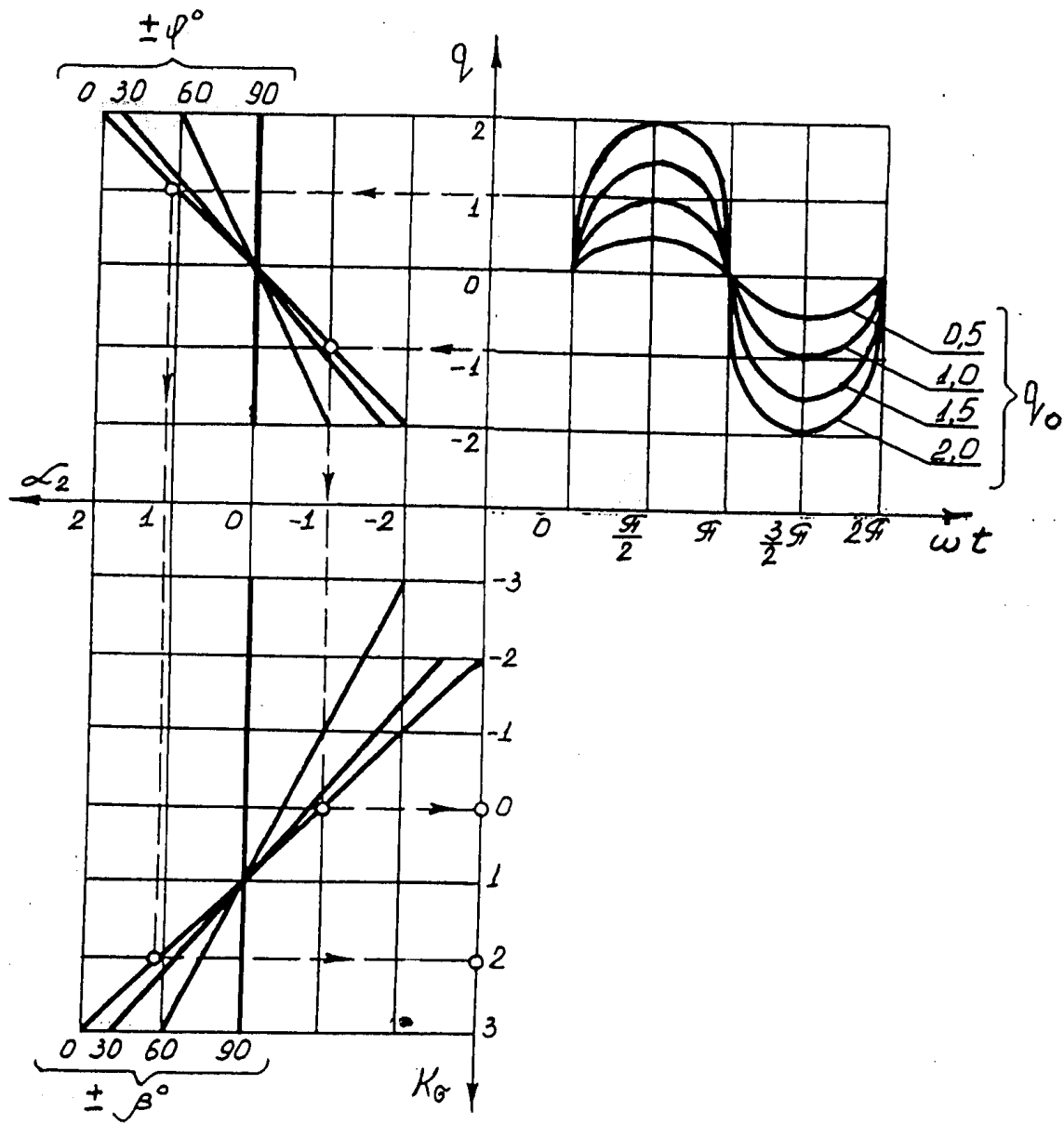


Рис.

Номограмма для расчета обобщенного параметра влияния  
вибрации на нормальное напряжение

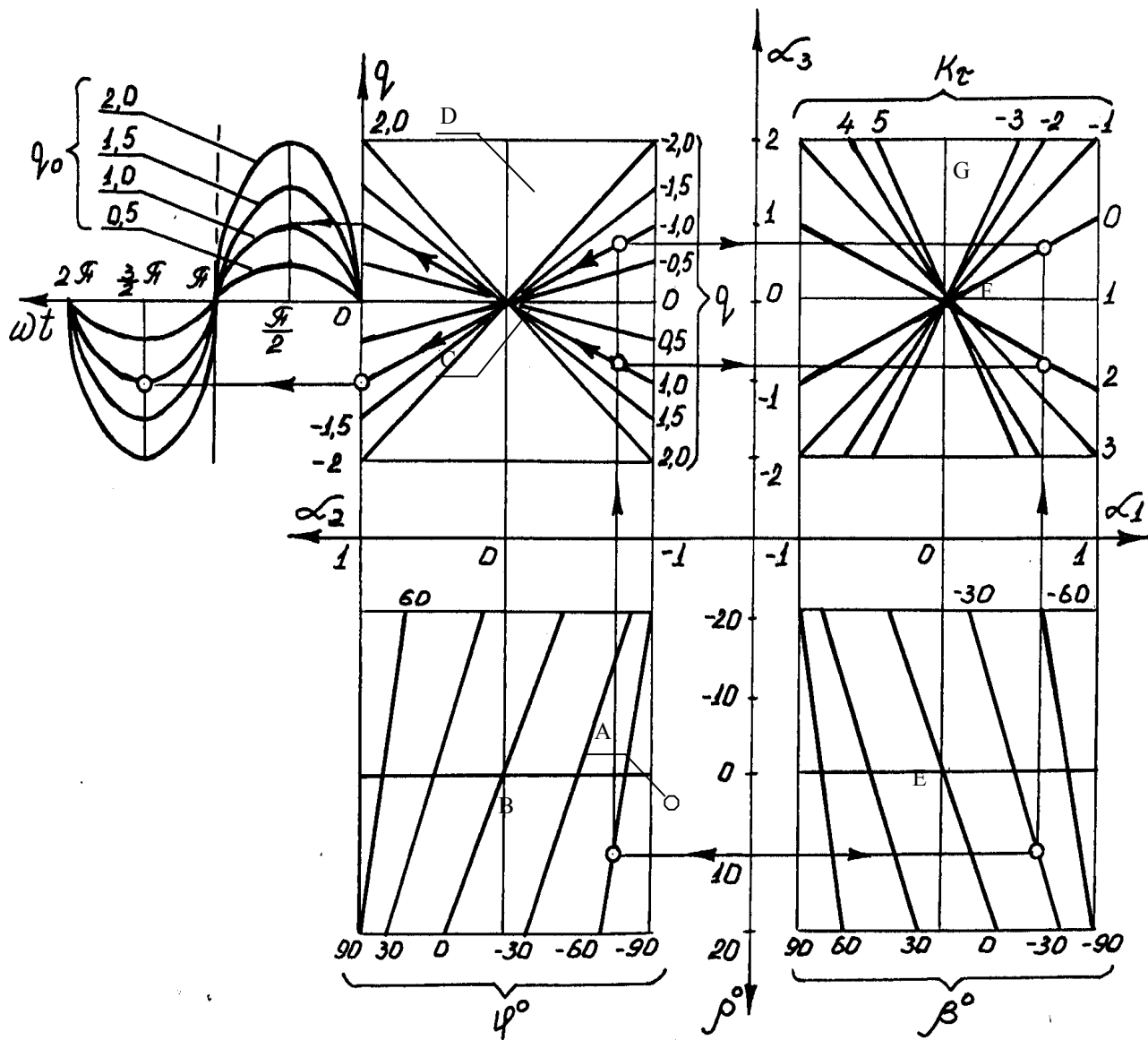


Рис.2

Номограмма для расчета обобщенного параметра влияния  
 вибрации на касательные напряжения