

Визуализация динамики релятивистских струн

В.В. Буркин[†], С.В. Клименко[‡], И.Н. Никитин^{††}

[†] *Институт системного программирования РАН, Москва*
[‡] *Российский центр физико-технической информатики, Протвино*
^{††} *Национальный исследовательский центр по информатике (GMD/IMK.VMSD),
Санкт Августин, Германия*

Аннотация

Метод научной визуализации дает возможность исследовать ненаблюдаемые сложные физические явления от микромира до космоса, обеспечивая наглядное представление решений соответствующих математических моделей. Представленная работа посвящена разработке программного обеспечения для визуализации и анимации динамики открытых и замкнутых струн и проведению исследования их поведения в пространстве размерностей 2 и 3. С помощью созданных программных средств получены интересные физические результаты.

Keywords: *Научная визуализация, Анимация, Машинная графика, Теория струн.*

1 ВВЕДЕНИЕ

Научная визуализация применяет специализированные методы и средства машинной графики, чтобы изобразить сложные физические явления в виде наглядных картинок. Она создает своего рода образную коммуникацию между людьми, основанную на человеческой способности видеть и понимать изображения. Образная коммуникация обеспечивает гораздо более емкий информационный обмен, чем вербальное общение¹. Научная визуализация успешно развивается уже более десяти лет как одно из перспективных направлений современной информатики. В процессе своего формирования как научной дисциплины от момента объявления ViSC²-инициативы в 1987 году [1] до наших дней, помимо разработки методологии и мощных специализированных инструментальных средств, были решены многочисленные прикладные задачи из различных областей науки и техники, наглядно демонстрирующие полезность и преимущества образной коммуникации.

Примеры решения таких конкретных задач представлены на многочисленных конференциях [2] по машинной графике и визуализации и опубликованы в

специализированных журналах по информатике [3]. Как правило, такие представления сопровождаются видео демонстрациями. Подобного рода работы получили название “*Case of study*”³. Представленная здесь работа является типичным примером этого научного жанра. В ней приведены предварительные результаты выполнения кооперативного проекта “Визуализация сложных физических явлений в виртуальном окружении”.

Особенно интересной и полезной сферой применения средств научной визуализации и анимации является теоретическая и математическая физика. В частности, этот эффективный инструмент успешно применялся в ряде исследований динамики релятивистских струн: в работе [4] визуально исследовались процессы разрыва и слияния струн, в [5] изучены одномодовые состояния 3-струн, в [6] проведена классификация устойчивых особых точек на открытых струнах. В предыдущей нашей статье [7] были описаны методы визуализации минимальных поверхностей, использованные в работе [6]. Настоящая работа посвящена разработке и применению программного обеспечения для визуализации динамики релятивистских струн, с целью последующего расширения классификации [6] на струны других топологических типов.

В первом разделе представлена физическая постановка задачи, математическая модель и алгоритмы геометрического описания объектов исследования. Во втором разделе рассматриваются используемые методы визуализации струнной динамики. В третьем разделе приводятся результаты исследований особых точек и типичных процессов струнной динамики, полученные с помощью разработанного комплекса программ, а также серия примеров, иллюстрирующих две общие теоремы о поведении особенностей на струнах.

³Буквально — пример исследования.

¹Одна картинка стоит тысячи слов (научный фольклор).

²Visualization in Scientific Computing.

2 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Релятивистской струной называется подвижная пространственная кривая, заметающая при своем движении поверхность в пространстве-времени. Эта поверхность называется *мировым листом* струны. Требуется, чтобы площадь этой поверхности была экстремальной при фиксированных начальном и конечном положениях струны. Срезы полученной поверхности плоскостью постоянного времени дают струну в этот момент времени. Таким образом, описанный геометрический постулат полностью определяет динамику струны.

Физическое назначение теории струн состоит в описании сильно взаимодействующих элементарных частиц (адронов). Струнные модели описывают адроны как системы кварков, которые связаны струноподобными трубками, заполненными хромодинамическим полем. Разрыв трубки приводит к распаду адрона. Адронные струны имеют размеры 10^{-13} см, натяжение порядка 10 тонн и типичные энергии 1 ГэВ.

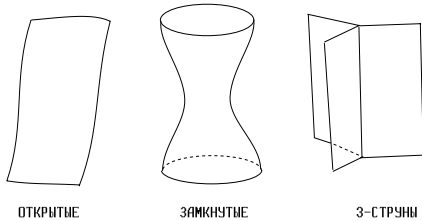


Рис.1. Топологические типы мировых листов.

В теории струн рассматриваются мировые листы различных топологических типов (рис.1):

- открытые струны, мировой лист – лента в пространстве-времени, соответствуют 2-кварковым системам (мезонам);
- замкнутые струны, мировой лист – цилиндр, соответствуют бескварковым глюонным образованиям (глюболам);
- 3-струны, мировой лист – 3 ленты, склеенные по одному краю, соответствуют 3-кварковым системам (барионам);
- а также поверхности более сложной топологии, соответствующие переходам между описанными типами (распадам и взаимопревращениям частиц).

Условие экстремума площади мирового листа в каждом топологическом классе приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных, решения которой известны [8] и имеют простую геометрическую интерпретацию (здесь мы ограничимся только случаем открытых и замкнутых струн).

2.1 Открытые струны

Рассмотрим гладкую замкнутую кривую $\vec{Q}(\sigma)$, которую будем называть *опорной кривой*⁴. Динамика струны определяется по заданной опорной кривой следующим образом (рис.2). Отметим произвольную точку A на опорной кривой. Отложим из этой точки две дуги *равной длины* вдоль опорной кривой: AC и AD. Соединим концы дуг прямолинейным отрезком CD. Отметим его середину M. При изменении длины дуг от нуля до половины полной длины опорной кривой точка M прочерчивает кривую, соединяющую точки A и B. Эта кривая является струной в тот момент времени, когда ее конец находится в точке A. Далее сдвигаем точку A по опорной кривой с постоянной скоростью (физически – со скоростью света) и, повторяя описанное построение, получаем динамику струны.

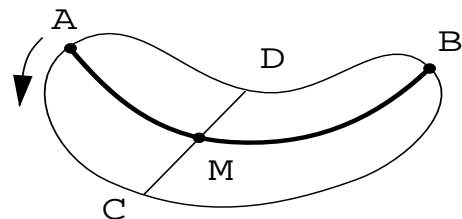


Рис.2. Реконструкция динамики открытой струны.

Формально:

$$\vec{x}(\tau, \sigma) = (\vec{Q}(\tau + \sigma) + \vec{Q}(\tau - \sigma))/2, \quad (1)$$

где \vec{x} задает точку на струне, $\tau \in (-\infty, +\infty)$ – параметр эволюции, $\sigma \in [0, L_{tot}/2]$ – параметр протяженности, помечающий точки на струне (L_{tot} – полная длина опорной кривой), и предполагается, что параметризация опорной кривой $\vec{Q}(\sigma)$ является *естественной*, т.е. σ = длине дуги вдоль кривой (так что $\vec{Q}(\sigma + L_{tot}) = \vec{Q}(\sigma)$).

Из данного геометрического алгоритма построения струны вытекают следующие свойства:

1. Кварки, помещенные на концы струны, двигаются по одной и той же траектории, совпадающей с опорной кривой.
2. Кварки двигаются со скоростью света⁵ под прямым углом к направлению струны.
3. Эволюция струны является периодической, с периодом $\Delta\tau = L_{tot}$: $\vec{x}(\tau + L_{tot}, \sigma) = \vec{x}(\tau, \sigma)$. При протяжении интервала времени $L_{tot}/2$ струна принимает

⁴Эта кривая определенным взаимно-однозначным образом [8] связана с начальными данными: координатами и распределениями импульса на струне, таким образом, она представляет альтернативный набор переменных, полностью определяющий динамику струны.

⁵ $v = 1$ в используемой нами системе единиц.

исходную форму, но при этом ее концы меняются местами $\vec{x}(\tau + L_{tot}/2, \sigma) = \vec{x}(\tau, L_{tot}/2 - \sigma)$.

4. Ориентация (направление обхода) опорной кривой влияет только на направление динамики: смена ориентации на противоположную приводит к обращению эволюции во времени.

Внутренние характеристики частиц полностью определяются *параметрическими инвариантами* опорной кривой. Например, масса частицы пропорциональна длине опорной кривой, внутренний орбитальный момент (спин) частицы пропорционален вектору ориентированной площади поверхности, натянутой на опорную кривую.

2.2 Замкнутые струны

Для построения замкнутой струны необходимо взять две замкнутые ориентированные опорные кривые *равной длины*: $\vec{Q}_1(\sigma)$ и $\vec{Q}_2(\sigma)$, см. рис.3. Отметим произвольные точки А,В на каждой из них. Отложим от этих точек две дуги равной длины: дугу АС *вдоль* направления кривой $\vec{Q}_1(\sigma)$ и дугу ВD *против* направления кривой $\vec{Q}_2(\sigma)$. Соединим концы дуг прямой отрезком CD, отметим его середину М. При изменении длины дуг от нуля до полной длины опорной кривой ($L_1 = L_2 = L_{tot}$) точки С, D многократно обходят соответствующие кривые. При этом точка М прочерчивает *замкнутую* кривую, которая является струной в данный момент времени. Далее сдвигаем точки А, В со скоростью света по соответствующим кривым *вдоль* их направлений. Повторяя описанное построение, получаем динамику струны. Формально:

$$\vec{x}(\tau, \sigma) = (\vec{Q}_1(\tau + \sigma) + \vec{Q}_2(\tau - \sigma))/2, \quad (2)$$

$\tau \in (-\infty, +\infty)$, $\sigma \in [0, L_{tot}]$, параметризация обеих кривых является естественной.

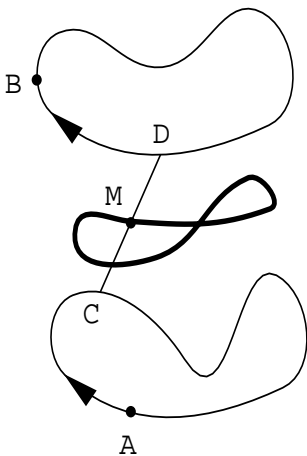


Рис.3. Реконструкция динамики замкнутой струны.

Отметим следующие свойства:

1. Опорные кривые теперь не являются траекториями концов струны (которых нет), но лишь вспомогательными геометрическими объектами, необходимыми для реконструкции струнной динамики.
2. В частном случае совпадающих опорных кривых ($\vec{Q}_1(\sigma) = \vec{Q}_2(\sigma)$) мы получаем алгоритм построения открытой струны (1). При этом замкнутая струна складывается пополам (см. рис.7 слева сверху) – открытая струна является вырожденным случаем замкнутой.
3. Эволюция замкнутой струны является периодической, с периодом $\Delta\tau = L_{tot}/2$.
4. Одновременная смена ориентаций обеих опорных кривых, как и ранее, приводит к обращению динамики во времени. Однако, смена ориентации только одной кривой приводит к существенному видоизменению динамики (см. рис.7 справа сверху).

3 МЕТОДЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

В разработанной прикладной программе для задания опорных кривых использовалось стандартное представление замкнутых непрерывно-дифференцируемых кривых кусочно-полиномиальными функциями 3-го порядка (кубическими сплайнами). Форма кривой задается положением контрольных точек и связанных с ними регуляторов, определяющих направление касательной к кривой и значение ее кривизны. На интервале между двумя контрольными точками кривая задается формулой

$$\vec{Q}(t) = (-2(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{c} + \vec{d})t^3 + (3(\vec{b} - \vec{a}) - 2\vec{c} - \vec{d})t^2 + \vec{c}t + \vec{a},$$

$t \in [0, 1]$, так что $\vec{Q}(0) = \vec{a}$, $\vec{Q}(1) = \vec{b}$, $\vec{Q}'(0) = \vec{c}$, $\vec{Q}'(1) = \vec{d}$.

На полном интервале изменения $t: t \in [0, N_c]$ (N_c – число контрольных точек) функция $\vec{Q}(t)$ определялась как

$$\vec{Q}(t) = \vec{Q}_i(t - i), \quad i = [t],$$

где $\vec{Q}_i(t)$ – функция, заданная на каждом интервале предыдущей формулой.

Построенная таким образом параметризация опорной кривой не является натуральной. Для перехода к натуральной параметризации $t = t(L)$ необходимо решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dt}{dL} = |\vec{Q}'(t)|^{-1},$$

следующее из определения элемента длины $dL = |\vec{Q}'(t)|dt$. Уравнение решалось методом Рунге-Кутты 4-го порядка. При интегрировании выбирался постоянный шаг $dL = L_{tot}/N_s$, число шагов интегрирования было фиксированным: $N_s = 160$. Полученная при интегрировании последовательность $t_k, k =$

$0 \dots N_s - 1$, $t_0 = 0$ разбивает опорную кривую на N_s участков равной длины dL . Точки разбиения могут быть использованы для построения струны по описанным выше алгоритмам (см.рис.4):

$$\begin{aligned} \vec{x}_{n,k} &= (\vec{Q}_1(t_{(n+k) \bmod N_s}) \\ &+ \vec{Q}_2(t_{(n-k) \bmod N_s}))/2, \\ k, n &= 0 \dots N_s - 1, \end{aligned} \quad (3)$$

k нумерует точки на струне, n – дискретный параметр эволюции (номер кадра).

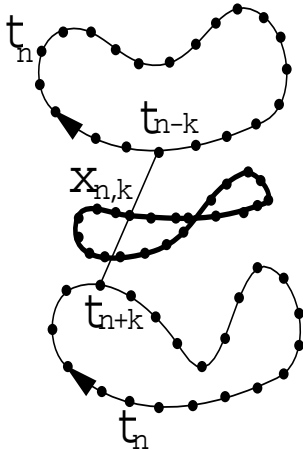


Рис.4. Дискретизированный вариант реконструкции динамики замкнутой струны.

Замечания.

1. До интегрирования уравнения перехода необходимо определить полную длину опорной кривой

$$L_{tot} = \int_0^{N_c} |\vec{Q}'(t)| dt,$$

поскольку L_{tot} определяет шаг интегрирования dL . Это дополнительное интегрирование производилось методом Симпсона, всякий раз, когда длина кривой менялась при деформации.

2. Дискретный алгоритм (3) эквивалентен непрерывному (2) только в том случае, если шаги интегрирования для обеих кривых равны: $dL_1 = dL_2$. При условии равенства полных длин $L_1 = L_2 = L_{tot}$, необходимого для правильной реконструкции динамики замкнутой струны, а также равенства чисел $N_{s1} = N_{s2} = N_s$ данное требование выполняется.

3. При деформациях кривых равенство $L_1 = L_2$ может нарушаться. Для компенсации этого нарушения вторая кривая⁶ подвергалась гомотетии с коэффициентом L_1/L_2 , после которой равенство длин восстанавливается.

⁶ которая не подвергается деформации. При работе программы изображается только одна кривая, над которой в данный момент производятся деформации, вторая кривая является невидимой.

4. В прикладной программе также реализована возможность сохранять опорные кривые и загружать их из файлов. При этом кривые $\vec{Q}_1(\sigma)$ и $\vec{Q}_2(\sigma)$ могут загружаться *по отдельности* (эти кривые могут быть созданы, например, при анализе движения открытой струны). Возникающее при этом неравенство длин компенсировалось аналогичным образом.

Краткая характеристика прикладной программы. Программа реализована на основе объектно-ориентированного подхода, т.е. каждый обособленный объект программы, включенный в цепь обрабатываемых алгоритмов, со всеми присущими ему параметрами инкапсулирован в отдельном классе с соответствующей ему схемой наследования. Программа разработана в рамках правил и соглашений современной технологии JAVA версии 1.1, поэтому код является хорошо переносимым и выполнимым на всех известных платформах, на которых установлена JAVA-среда не ниже версии 1.1.2. Разработка велась с использованием свободно распространяемого пакета JDK версии 1.1.3. Исходные тексты программы также являются свободно распространяемым продуктом, в соответствии с правилами и соглашениями GNU General Public License of Free Software Foundation.

Прикладная программа позволяет исследовать динамику струны в 3-мерном пространстве ($d = 3$): в процессе работы она создает три окна для XY, XZ, YZ-проекции и одно окно с 3D изображением в перспективной проекции.

На рис.5 показаны основные элементы изображения, синтезированные разработанной программой:

- контрольные точки с регуляторами, необходимые для задания опорной кривой;
- опорная кривая, ориентация которой показана стрелками;
- струна, плотность энергии которой кодируется цветом (на приведенных черно-белых рисунках – интенсивностью);
- кинк и кварки на струне, вблизи которых плотность энергии стремится к бесконечности;
- сеть, составленная из прямолинейных отрезков (вида CD на рис.2) – вспомогательная конструкция, иллюстрирующая алгоритм построения струны.

Использование виртуального окружения. Описанные выше алгоритмы реконструкции струнной динамики, а также алгоритмы построения мировых листов, изложенные в [7, 9], реализованы в C++ программе, использующей Open Inventor [10]. Программа скомпилирована в динамически разделяемый объект (dynamically shared object, DSO) и установлена в системе виртуального окружения Responsive Workbench [11]. Анимация, генерируемая при

кладной программой, записана в 4-минутный видеофильм [12]. Кадры из фильма включены в Internet-курс по теории струн, см.рис.10.

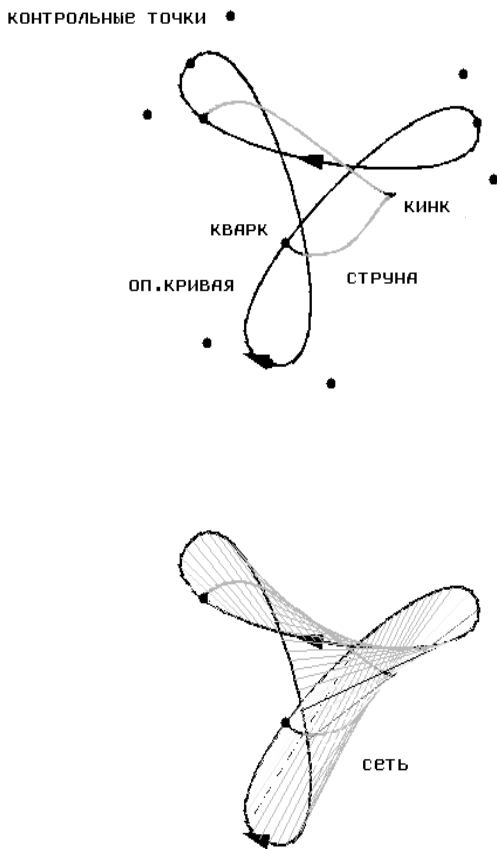


Рис.5. Основные элементы изображения.

4 РЕЗУЛЬТАТЫ

Использование разработанных средств визуализации позволило провести классификацию и исследовать поведение особых точек на струнах, которые играют важную роль в понимании процессов струнной динамики. Легкость и продуктивность визуального метода исследования поведения струн самой сложной и экзотической конфигурации позволили сформулировать гипотезу о роли *топологического заряда* в поведении струн и доказать две общие теоремы.

Особые точки на струнах. При определённых условиях (см. приложение) на струнах возникают особые точки. Наиболее интересен случай, когда опорные кривые лежат в плоскости и имеют петли или невыпуклые участки, ограниченные точками перегиба. В этом случае на струнах возникают *кинки*

(точки возврата)⁷.

Поскольку наиболее интересные явления происходят в случае $d = 2$, здесь мы ограничимся описанием результатов, полученных при визуализации этого случая.

4.1 Перманентные кинки

Прежде всего отметим, что в эволюции замкнутых струн при $d = 2$ *обязательно* присутствуют кинки [13]. На открытых струнах кинков может не быть. Стандартный пример – прямолинейная струна [14]: опорная кривая является окружностью, струна имеет вид прямолинейного стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Существует специальный класс опорных кривых, для которого динамика кинков является особенно простой: кинки не рождаются, не исчезают и не сталкиваются между собой. Таким образом, число кинков на струне сохраняется. Такие кинки мы будем называть *перманентными*. Условия, при которых реализуется такой режим, даёт следующая теорема.

Теорема 1 ($d = 2$, замкнутая струна): Пусть

- 1) опорные кривые $\tilde{Q}_{1,2}(\sigma)$ не имеют точек перегиба, т.е. касательный вектор к кривой при ее обходе вращается в одном и том же направлении, совершая $n_{1,2}$ полных оборотов;
- 2) кривые обходятся в одном и том же направлении (либо по, либо против часовой стрелки).

Тогда все кинки на струне являются перманентными и их число равно $n_1 + n_2$.

Аналогичная теорема справедлива для открытой струны. Отличие состоит в том, что в ней есть только условие 1 и число перманентных кинков равно $n - 1$. Эта теорема может быть получена из приведенной выше с помощью следующего рассуждения. Как уже отмечалось, открытая струна является вырожденным случаем замкнутой (сложенной пополам). По теореме для замкнутой струны число особых точек равно $2n$. Из них две точки отвечают концам струны и за особенности не считаются. Оставшееся множество $2(n - 1)$ точек в действительности является множеством $(n - 1)$ пар *совпадающих* точек, поэтому из них нужно взять только половину.

Опорные кривые с $n = 0$ (например, восьмерка, изображенная на рис.6 внизу) обязательно имеют точки перегиба и, следовательно, нарушают условие теорем. Поэтому перманентные кинки существуют только при $n \geq 1$. Следовательно, на замкнутой струне, удовлетворяющей условию теоремы 1, *обязательно*

⁷Если опорная кривая не лежит в плоскости, кинк на струне появляется на одно мгновение, периодически в одной и той же точке. Мировой лист имеет в этой точке особенность, называемую *точкой пинча*, см.[8].

но имеется ≥ 2 перманентных кинков. На открытой струне (при выполнении условий перманентной теоремы) кинки отсутствуют в случае $n = 1$, пример – прямолинейная струна.

Перманентные кинки показаны на рисунках: рис.6 сверху – для открытой струны ($n = 2, 3$; соответствующее число кинков 1, 2); рис.7 в центре – для замкнутой струны ($n_1 = 3, 2, n_2 = 1$, второй (невидимой) кривой в обоих случаях служила окружность; соответствующее число кинков 4, 3).

4.2 Рождение/аннигиляция кинков

Оба условия теоремы 1 важны. При нарушении любого из них число кинков не обязательно сохраняется во времени – при эволюции возможны процессы рождения/аннигиляции пар кинков.

Примеры рождения/аннигиляции пар показаны на рисунках: рис.6 в центре справа (открытая струна), рис.7 внизу справа (замкнутая струна).

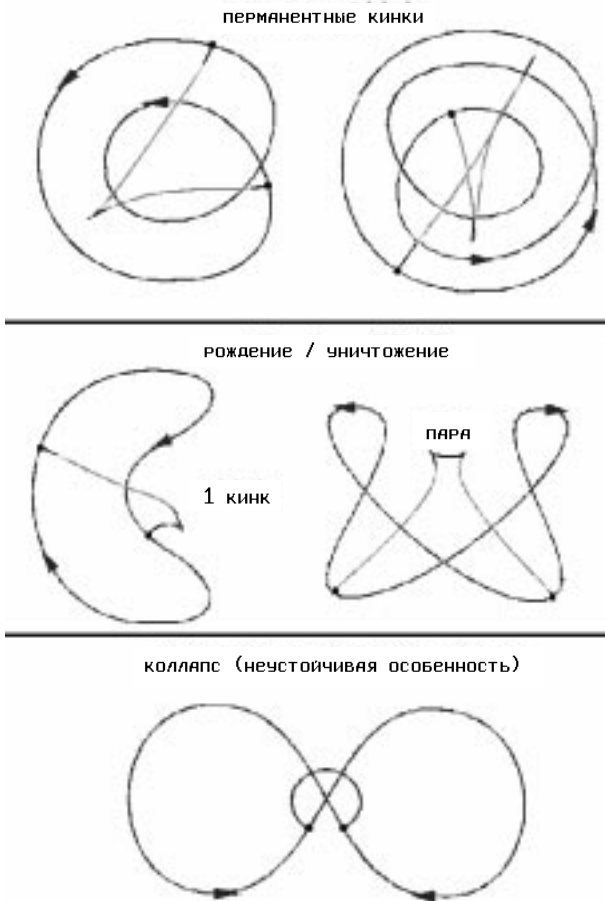


Рис.6. Особенности на открытых струнах.

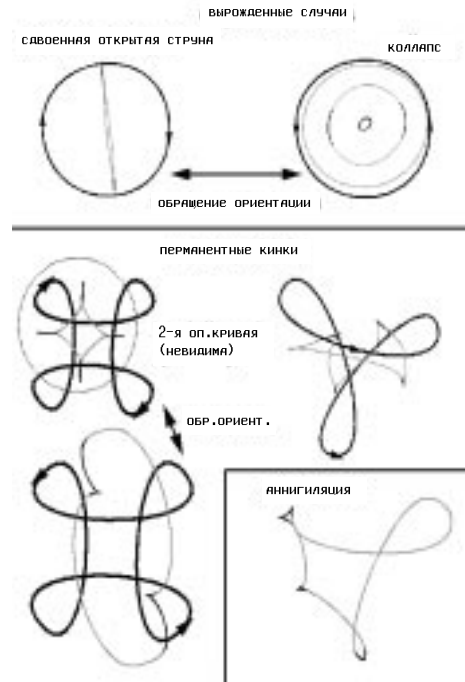


Рис.7. Особенности на замкнутых струнах.

4.3 Гипотеза о топологическом заряде

Можно сформулировать общую теорему относительно числа кинков на струне, справедливую также при нарушении условий перманентности. Для этого нам потребуется одно определение.

Как показано в приложении, форма струны вблизи кинка описывается формулой $\Delta \vec{x} = \vec{k} \Delta \sigma^2 / 4$, где вектор \vec{k} (направление кинка) определяется выражением $\vec{k} = \vec{Q}'_1 + \vec{Q}''_2$. Скорость кинка $\vec{v} = \vec{Q}'_1 = \vec{Q}''_2$ ортогональна \vec{k} .

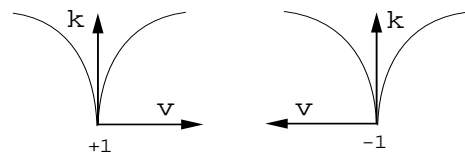


Рис.8. Определение топологического заряда.

Топологическим зарядом кинка назовем число ν , равное +1, если переход от \vec{v} к \vec{k} производится поворотом на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, и равное -1, если этот поворот производится по часовой стрелке, см.рис.8.

Теорема 2 ($d = 2$, замкнутая струна). Полный топологический заряд струны (равный сумме топологических зарядов всех кинков) сохраняется во времени и равен $n_1 + n_2$. Здесь n_i – число вращений со знаком:

$n_i > 0$, если при обходе кривой касательная вращается против часовой стрелки; $n_i < 0$, если по. Иначе говоря:

$$\begin{aligned} &(\text{число кинков с } \nu = +1) \\ &\quad \text{минус} \\ &(\text{число кинков с } \nu = -1) \\ &\quad \text{равно } (n_1 + n_2). \end{aligned}$$

Отметим еще 2 свойства топологического заряда:

1. При выполнении условий перманентной теоремы топологические заряды всех кинков одинаковы.
2. Кинки в рождающейся/аннигилирующей паре имеют противоположные топологические заряды.

Следовательно, при выполнении условий перманентности полный топологический заряд по модулю равен полному числу кинков (в соответствии с теоремой 1). При нарушении условий перманентности на струне может появиться произвольное число пар с нулевым полным топологическим зарядом, что не противоречит сформулированному выше закону сохранения.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлено созданное программное обеспечение для визуализации динамики открытых и замкнутых струн в пространстве размерностей 2 и 3. Проведен начальный этап классификации особых точек на замкнутых струнах в размерности 2: сформулированы, доказаны, и проиллюстрированы серией примеров две теоремы – о перманентном режиме в динамике особенностей и о существовании сохраняющегося глобального топологического инварианта (топологического заряда струны). Реализованные программные продукты (интерактивное JAVA-приложение и Inventor-объект, инсталлированный в системе виртуального окружения Responsive Workbench) могут быть использованы для проведения исчерпывающей классификации особенностей. JAVA-приложение будет также включено в дистанционный Internet-курс по теории струн [8], разрабатываемый в настоящее время.

В дальнейшем планируется произвести визуализацию динамики 3-струн, а также процессов разрыва и взаимопревращения струн разных топологических типов. Также предполагается провести интеграцию всех приложений по визуализации струнной динамики в единый комплекс и разработать для него удобный пользовательский интерфейс.

Благодарности. Авторы благодарны Ляле Никитиной за помощь в подготовке материала к публикации. Работа поддержана грантами INTAS 96-0778 и РФФИ 96-01-01273.

ПРИЛОЖЕНИЕ: Особенности на струнах

При значении размерности пространства $d = 2, 3$ (в 3- и 4-мерном пространстве-времени) на струнах возникают топологически устойчивые особые точки [6]. Причина их появления состоит в следующем.

Точка струны является *особой* (а именно – точкой возврата), если касательный вектор к струне в этой точке обращается в нуль

$$\partial \vec{x}(\tau, \sigma) / \partial \sigma = (\vec{Q}'_1(\tau + \sigma) - \vec{Q}'_2(\tau - \sigma)) / 2 = 0.$$

Таким образом, особенностям на струне отвечают точки пересечения годографов единичных касательных векторов к опорным кривым: $\vec{Q}'_1(\sigma_1) = \vec{Q}'_2(\sigma_2)$, $\sigma_{1,2} = \tau \pm \sigma$ (для открытой струны – самопересечения годографа $\vec{Q}'(\sigma_1) = \vec{Q}'(\sigma_2)$), см.рис.9. Касательные векторы являются единичными: $|\vec{Q}'_{1,2}| = 1$, поскольку параметризация опорных кривых является натуральной.

Годографы касательных векторов $\vec{Q}'_{1,2}$ лежат на $(d - 1)$ -мерной сфере: на окружности при $d = 2$ и на 2-мерной сфере при $d = 3$. При $d = 2$ пересечение годографов является одномерным множеством, при $d = 3$ трансверсальные пересечения расположены в изолированных точках. Все кривые из ϵ -окрестности рассматриваемых годографов также имеют пересечения. Отсюда следует устойчивость особых точек на мировом листе, при $d = 2$ они представляют собой одномерные множества (линии), при $d = 3$ – изолированные точки. При сечении мирового листа плоскостью постоянного времени мы будем видеть: в случае $d = 2$ – подвижные особые точки, существующие в течении протяженных интервалов времени; в случае $d = 3$ – особенности, возникающие на струне на одно мгновение.

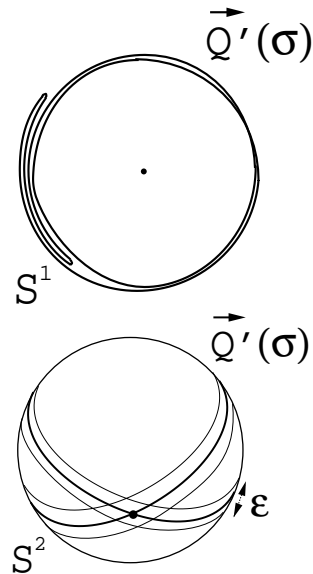


Рис.9. Самопересечения годографов $\vec{Q}'(\sigma)$, соответствующие особенностям на открытой струне.

В особых точках (и на концах – для открытой струны) линейная плотность энергии-импульса струны стремится к бесконечности.

Точки возврата на струнах также называются *кинками*. Кинк движется со скоростью света под прямым углом к направлению струны в этой точке.

Приведенные рассуждения справедливы как для открытых, так и для замкнутых струн.

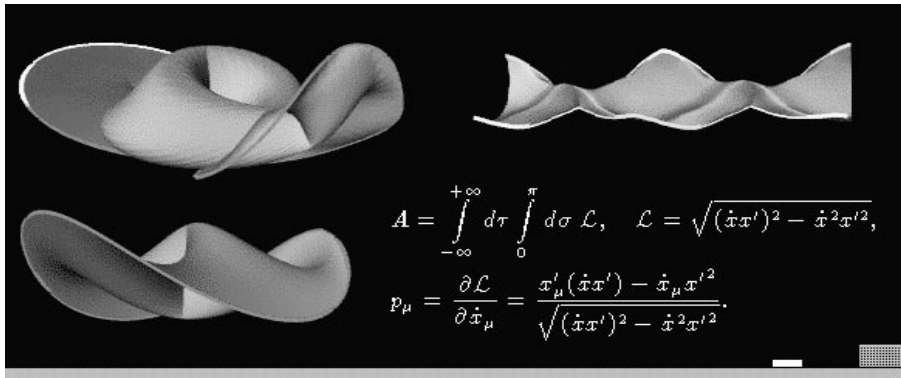


Рис.10. Изображения мировых листов из Internet-курса по теории струн [8].

Список литературы

- [1] Visualization in Scientific Computing. // Computer Graphics. Vol.21, Num.6, November 1987. Edited by Bruce H. McCormick, Thomas A. DeFanti, Maxine D. Brown. ACM SIGGRAPH.
- [2] Visualization'90 - '97 Proceedings, published by IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California.
- [3] IEEE Computer Graphics and Applications, published by IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California. Computer & Graphics, published by Pergamon, Elsevier Science Ltd, England. IEEE Computational Science & Engineering, published by IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California.
- [4] Artru X. "Classical String Phenomenology", Preprints LPTHE 78/25 (1978), 79/8 (1979), 81/1 (1981). (Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Université de Paris-Sud, Orsay, France).
- [5] Клименко С.В. и др. "Струнная модель бариона" // Теоретическая и математическая физика 1985. Т.64. N2. С.245.
- [6] Клименко С.В., Никитин И.Н. "Исследование особенностей на мировых листах открытых релятивистских струн" // Теоретическая и математическая физика 1998. Т.114, N3, С.380.
- [7] Клименко С.В., Никитин И.Н., Таланов В.В. "Визуализация особенностей на мировых листах релятивистских струн" // Программирование 1994. N4. С.47.
- [8] Nikitin I.N. "Introduction to String Theory, Internet course", <http://viswiz.gmd.de/~nikitin/course/course.html>
- [9] S.Klimenko, V.Dyachin, I.Nikitin "Singularities on the world sheets of open relativistic strings" chap.18 in the book Scientific Visualization: Overviews, Methodologies, and Techniques, eds. G.M.Nielson, H.Hagen, and H.Muller, IEEE Comp.Society Press, Los Alamitos 1997.
- [10] Josie Wernecke, Open Inventor Architecture Group, The Inventor Mentor/The Inventor Toolmaker, Release 2, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.
- [11] German National Research Center for Information Technology, Visualization and Media Systems Design, <http://viswiz.gmd.de/> section "Tools".
- [12] Singularities on relativistic string, 4'17" video, GMD 1998.
- [13] Пронько Г.П., Разумов А.В., Соловьёв Л.Д. // Элементарные частицы и атомное ядро 1983. Т.14. N.3. С.558.
- [14] Пронько Г.П., Разумов А.В. // Теоретическая и математическая физика 1983. Т.56. N.2. С.192.

Авторы:

В.В. Буркин — выпускник Московского физико-технического института, стажер-исследователь Института системного программирования РАН.

E-mail: valery@8ka-campus-gw.mipt.ru

С.В. Клименко — доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой МФТИ, заведующий отделом ИСП РАН.

E-mail: klimenko@mх.ihp.su

И.Н. Никитин — кандидат физ.-мат. наук, ассистент МФТИ, постдок Национального исследовательского центра по информатике, Германия.

E-mail: Igor.Nikitin@gmd.de