

Глава 1

ОСНОВЫ МНОГОМАСШТАБНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

В этой главе кратко описываются основные способы многомасштабного представления дискретных одно- и двумерных сигналов с помощью вейвлет-преобразований. Теоретические основы вейвлет-анализа изложены в Приложении А.

1.1 Преобразование Хаара

Пусть имеется одномерный дискретный сигнал $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$. Каждой паре элементов с индексами $2j$ и $2j + 1$, $j \in \mathbf{Z}$ поставим в соответствие два значения:

$$\begin{aligned}v_j &= \frac{s_{2j} + s_{2j+1}}{2}, \\w_j &= \frac{s_{2j} - s_{2j+1}}{2}, \\j &\in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

Эти значения формируют два новых сигнала $\mathbf{v} = \{v_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ и $\mathbf{w} = \{w_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$, один из которых является огрубленной версией исходного сигнала (каждой паре элементов \mathbf{s} соответствует их среднее арифметическое), а другой содержит информацию (будем называть ее *детализирующей*), необходимую для восстановления исходного сигнала. Действительно:

$$\begin{aligned}s_{2j} &= v_j + w_j, \\s_{2j+1} &= v_j - w_j; \\j &\in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

К сигналу \mathbf{v} можно применить аналогичную операцию и также получить два сигнала, один из которых будет огрубленной версией \mathbf{v} , а другой содержать детализирующую информацию, необходимую для восстановления \mathbf{v} .

Поставим в соответствие сигналу \mathbf{s} произвольное целое число i_1 , которое будем называть *уровнем разрешения* или *разрешением*. Выпишем рекурсивные формулы для вычисления элементов таких пар сигналов для любого разрешения $i_0 < i_1$:

$$v_j^{(i)} = \frac{v_{2j}^{(i+1)} + v_{2j+1}^{(i+1)}}{2}, \quad w_j^{(i)} = \frac{v_{2j}^{(i+1)} - v_{2j+1}^{(i+1)}}{2}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad i = i_1 - 1, i_1 - 2, \dots, i_0; \quad (1.1)$$

$$v_j^{(i_1)} = s_j, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Восстановление сигнала выполняется по формулам:

$$v_{2j}^{(i+1)} = v_j^{(i)} + w_j^{(i)}, \quad v_{2j+1}^{(i+1)} = v_j^{(i)} - w_j^{(i)}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_1 - 1; \quad (1.2)$$

Формулы (1.1) и (1.2) определяют соответственно прямое и обратное *преобразование Хаара* одномерного дискретного сигнала. Преобразование Хаара является простейшим вейвлет-преобразованием.

1.2 Вейвлет-преобразования дискретных сигналов

На примере преобразования Хаара хорошо видна структура вейвлет-преобразования дискретного сигнала. На каждом шаге прямого преобразования сигнал распадается на две составляющие: приближение с более низким разрешением и детализирующую информацию. Первую часто называют *низкочастотной* (НЧ), а вторую *высокочастотной* (ВЧ). Такая терминология принята по аналогии с анализом Фурье, однако не следует забывать, что частота в гармоническом анализе и частота в смысле уровня разрешения в вейвлет-анализе являются близкими, но не эквивалентными понятиями.

Элементы ВЧ-составляющих вейвлет-преобразований называют *вейвлет-коэффициентами*.

Заметим, что шаг прямого преобразования Хаара эквивалентен свертке сигнала с фильтром (ядром) $\tilde{\mathbf{h}} = [1/2, 1/2]$ для НЧ-составляющей и с фильтром $\tilde{\mathbf{g}} = [-1/2, 1/2]$ для ВЧ-составляющей с последующим удалением из полученных сигналов каждого второго элемента. Это позволяет переписать формулы (1.1) следующим образом:

$$\mathbf{v}_i = \downarrow_2 [\mathbf{v}_{i+1} * \tilde{\mathbf{h}}], \quad \mathbf{w}_i = \downarrow_2 [\mathbf{v}_{i+1} * \tilde{\mathbf{g}}], \quad i = i_1 - 1, i_1 - 2, \dots, i_0; \quad (1.3)$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{s}.$$

(удаление каждого второго элемента выполняет оператор $\downarrow_2[\bullet]$).

Шаг обратного преобразования Хаара эквивалентен следующей последовательности операций. Между каждыми двумя элементами НЧ-составляющей добавляется по одному нулевому элементу, аналогичным образом преобразуется и ВЧ-составляющая. Далее производится свертка первого из полученных сигналов с фильтром $\mathbf{h} = [1, 1]$, а второго с фильтром $\mathbf{g} = [1, -1]$, результаты поэлементно складываются. Формула (1.2) переписывается следующим образом:

$$\mathbf{v}_{i+1} = \uparrow_2[\mathbf{v}_i] * \mathbf{h} + \uparrow_2[\mathbf{w}_i] * \mathbf{g}, \quad i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_1 - 1, \quad (1.4)$$

(вставку нулевых элементов выполняет оператор $\uparrow_2[\bullet]$).

В формулы (1.3) и (1.4) являются формулами соответственно прямого и обратного вейвлет-преобразования дискретных сигналов в общем виде. Конкретный вид преобразования задается четверкой фильтров $\tilde{\mathbf{h}}$, $\tilde{\mathbf{g}}$, \mathbf{h} и \mathbf{g} (как это было сделано выше для преобразования Хаара), которые называются соответственно НЧ-фильтром анализа, ВЧ анализа, НЧ синтеза и ВЧ синтеза.

Естественно, фильтры должны быть подобраны так, чтобы преобразование было обратимым, то есть

$$\uparrow_2 \left[\downarrow_2 [\mathbf{v} * \tilde{\mathbf{h}}] \right] * \mathbf{h} + \uparrow_2 \left[\downarrow_2 [\mathbf{v} * \tilde{\mathbf{g}}] \right] * \mathbf{g} \equiv \mathbf{v}$$

Часто формулы (1.3) и (1.4) записывают с помощью так называемого Z -преобразования¹. Свертка сигналов эквивалентна произведению их Z -преобразований (свойство, которым обладает и преобразование Фурье).

Для Z -преобразования некоторого сигнала \mathbf{s} будем использовать обозначение $s(z)$.

Вот как выглядят формулы (1.3) и (1.4) в терминах z -преобразований:

$$v_i(z) = \downarrow_2 \left[\tilde{h}(z) v_{i+1}(z) \right], \quad w_i(z) = \downarrow_2 \left[\tilde{g}(z) v_{i+1}(z) \right], \quad i = i_1 - 1, i_1 - 2, \dots, i_0; \quad (1.5)$$

$$v_i(z) = s(z).$$

$$v_{i+1}(z) = h(z) \cdot \uparrow_2[v_i(z)] + g(z) \cdot \uparrow_2[w_i(z)], \quad i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_1 - 1. \quad (1.6)$$

В терминах Z -преобразований легко формулируется условия, которым должны удовле-

¹ Z -преобразованием дискретного сигнала $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ называется полином Лорана $P_{\mathbf{s}}(z) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} s_j z^{-j}$.

творять фильтры, чтобы преобразование было обратимым:

$$\begin{aligned} h(z)\tilde{h}(z) + g(z)\tilde{g}(z) &= 2, \\ h(z)\tilde{h}(-z) + g(z)\tilde{g}(-z) &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Если, кроме того, $\tilde{h}(z) = Ch(z^{-1})$ и $\tilde{g}(z) = Cg(z^{-1})$, где C — некоторая константа, то преобразование называется *ортогональным*, в противном случае оно называется *биортогональным* (объяснение подобной терминологии см. в Приложении А).

Примеры. Преобразование Хаара является ортогональным. Фильтры Хаара в форме Z -преобразований имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(z) &= \frac{1}{2}(z^{-1} + 1), & \tilde{g}(z) &= \frac{1}{2}(-z^{-1} + 1), \\ h(z) &= (1 + z), & g(z) &= (1 - z). \end{aligned}$$

Ортогональное вейвлет-преобразование Добеши D_4 (число 4 обозначает количество ненулевых коэффициентов в фильтрах):

$$\begin{aligned} \tilde{h}(z) &= h(z^{-1}), & h(z) &= h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + h_3z^{-3}, \\ \tilde{g}(z) &= g(z^{-1}), & g(z) &= -h_3z^2 + h_2z - h_1 + h_0z^{-1}; \\ h_0 &= \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & h_1 &= \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & h_2 &= \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & h_3 &= \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Пример биортогонального преобразования (кубическое В-сплайновое вейвлет-преобразование) можно найти в гл. 3.

1.3 Вейвлет-преобразования конечных сигналов

При обработке конечных сигналов могут возникнуть проблемы с вычислением преобразований вблизи границ сигнала.

Простейший случай — преобразование Хаара сигнала, количество элементов которого равно степени двух. Пусть $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{K-1}$ для некоторого $K = 2^{i_1}$, $i_1 \in \mathbf{Z}$, $i_1 > 0$. Число i_1 будем считать разрешением сигнала \mathbf{s} . На каждом шаге прямого преобразования НЧ и ВЧ составляющие будут получаться в 2 раза короче преобразуемого сигнала. После выполнения i_1 шагов прямого преобразования НЧ и ВЧ составляющие будут иметь по одному элементу (им соответствует разрешение $i_0 = 0$). При вычислении коэффициентов

преобразования не происходит выхода за границы сигнала, поэтому для вычисления преобразования не требуется никаких дополнительных действий с фильтрами или сигналом.

Если же длина фильтра больше 2, то при вычислении свертки должен произойти выход за границы сигнала. Это приводит к необходимости либо менять фильтр вблизи границ сигнала (что усложняет алгоритм преобразования), либо доопределять сигнал за его границами (нулями, симметрично, периодически и пр.), но это может в общем случае потребовать сохранения дополнительной информации, необходимой для полного восстановления сигнала. Сохранение дополнительной информации может потребоваться и при обработке сигнала нечетной длины.

Проблема обработки сигналов вблизи границ рассматривается в задаче построения изолиний (гл. 3). Более подробно о преобразовании конечных сигналов см. в [9].

1.4 Вейвлет-преобразования двумерных сигналов

Рассмотрим двумерный сигнал s — матрицу конечного или бесконечного размера. Применим к каждой строке матрицы один шаг одномерного вейвлет преобразования. В результате получится две матрицы, строки которых содержат НЧ и ВЧ составляющие строк исходной матрицы. К каждому столбцу обеих матриц также применим шаг одномерного преобразования. В результате получается четыре матрицы, которые можно обозначить как НЧ/НЧ, НЧ/ВЧ, ВЧ/НЧ и ВЧ/ВЧ. Первая является НЧ составляющей исходного сигнала, остальные три содержат детализирующую информацию.

Таким образом, шаг двумерного преобразования свелся к композиции одномерных преобразований. Поэтому реализация двумерного преобразования не требует никаких дополнительных операций. В частности, в случае конечных сигналов действуют те же правила, что и при преобразовании одномерных конечных сигналов.

Композиция одномерных преобразований — это не единственная схема вейвлет-преобразования сигналов больших размерностей (хотя и наиболее распространенная). Подробнее о многомерных преобразованиях см. [9, 23].

1.5 Древоподобные структуры для представления вейвлет-преобразований

Рассмотрим одномерное диадное вейвлет-преобразование дискретных сигналов. Как было отмечено выше, один шаг прямого преобразования ставит каждой паре элементов сигнала один элемент низкочастотной составляющей и один вейвлет-коэффициент (рис. 1.1, слева). Пусть исходному сигналу соответствует уровень разрешения i_1 . Для каждой пары соседних элементов этого сигнала построим двоичное дерево глубины 1, корень которого соответствует элементу низкочастотной составляющей уровня $i_1 - 1$, а две листовых вершины — паре исходных элементов. К корневой вершине припишем элемент высокочастотной составляющей (вейвлет-коэффициент) уровня $i_1 - 1$.

Следующий шаг ставит в соответствие каждой паре элементов НЧ-составляющей уровня $i_1 - 1$ один низкочастотный и один высокочастотный элемент уровня $i_1 - 2$. Соответствующие пары деревьев объединяются новой корневой вершиной (следовательно, глубина деревьев вырастает до 2), которая соответствует НЧ-элементу уровня $i_1 - 2$, и ей приписывается соответствующий вейвлет-коэффициент уровня $i_1 - 2$. Аналогичным образом сращиваются пары деревьев для получения уровня $i_1 - 3$ и так далее. Если исходный сигнал бесконечный, то процесс можно прервать на любом уровне i_0 , $i_0 < i_1$, в результате чего получится лес бесконечного числа сбалансированных двоичных деревьев глубины $i_1 - i_0$. Если сигнал конечен (для простоты рассмотрим случай, когда длина исходного сигнала 2^{i_1}), то по выполнении i_1 шагов прямого преобразования НЧ-составляющая уровня 0 будет иметь единственный элемент, а вместо леса получится единственное дерево глубины i_1 .

По окончании процесса преобразования всем корневым вершинам (или одной вершине, если построено единственное дерево) приписываются, кроме вейвлет-коэффициентов, еще и соответствующие НЧ-коэффициенты. Таким образом, корневым вершинам приписывается по 2 значения, а листовым — ни одного (рис. 1.1, справа).

При выполнении обратного преобразования движение по дереву происходит от корня к листовым вершинам.

В двумерном случае на каждом шаге прямого преобразования один элемент НЧ-составляющей соответствует четырем элементам исходного сигнала (образующим матрицу размера 2×2), при этом образуется три ВЧ-составляющих. Следовательно, дерево двумерного преобразования является квадродеревом (4 потомка у каждой нелистовой

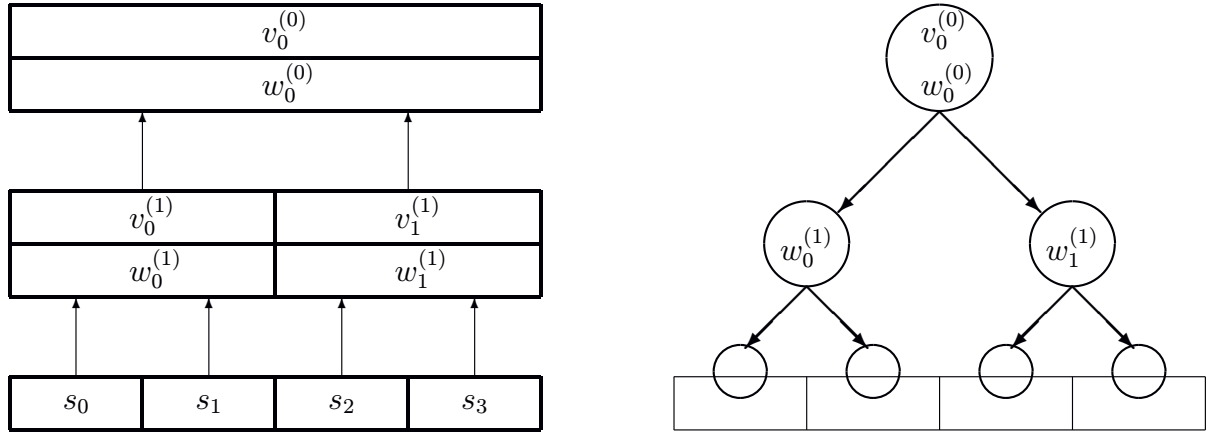


Рис. 1.1: Структура вейвлет-преобразования (слева) и дерево преобразования (справа).

вершины), и каждой нелистовой вершине приписывается по 3 вейвлет-коэффициента.

Древовидное представление хорошо демонстрирует пространственную локализацию преобразования. Пусть исходному сигналу соответствует некоторая пространственная область. Любая вершина дерева соответствует некоторому фрагменту этой области. Чем дальше от корня выбрана вершина, тем меньшему фрагменту она соответствует. Все поддерево, растущее из этой вершины, соответствует тому же фрагменту, за исключением, быть может, участков вблизи границ фрагмента.

Древовидная структура, кроме наглядной иллюстрации структуры преобразуемого сигнала, нашла практическое применение в задаче сжатия информации. Как известно, основная идея сжатия с помощью вейвлет-преобразования состоит в том, чтобы исключить из вейвлет-образа коэффициенты, абсолютные величины которых близки к нулю. Возникает вопрос, как кодировать такое представление. Один из способов был предложен в работе [61]. Было сделано предположение, что если вейвлет-коэффициент (или, в многомерном случае, коэффициенты), приписанный некоторой нелистовой вершине дерева преобразования, имеет пренебрежимо малую абсолютную величину, то, не внося существенной ошибки в восстанавливаемый сигнал, можно обратить в нуль и все вейвлет-коэффициенты поддерева, растущего из этой вершины. Такое поддерево получило название *нуль-дерева*. Очевидно, что для кодирования нуль-дерева достаточно лишь запомнить одну вершину, которая является его корнем. Нуль-деревья используются во многих алгоритмах вейвлет-сжатия, например, [60].