Приложение А

Многомасштабный анализ и вейвлет-преобразования

А.1 Ортогональный многомасштабный анализ

Ортогональным многомасштабным анализом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ называется последовательность замкнутых подпространств $V^{(i)} \subset \mathbf{L}_2(\mathbf{R}),\ i \in \mathbf{Z}$, таких что:

1. $V^{(i)} \subset V^{(i+1)}, \quad i \in \mathbf{Z}$.

2. $\bigcup_{i\in\mathbf{Z}} V^{(i)}$ плотно в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$.

3. $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}} V^{(i)} = \emptyset$.

4. $v(x) \in V^{(i)} \iff v(2x) \in V^{(i+1)},\ i \in \mathbf{Z}$.

5. $v(x) \in V^{(0)} \iff v(x-j) \in V^{(0)},\ j \in \mathbf{Z}$.

6. $\exists\ \varphi(x) \in V^{(0)},\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx \neq 0$: последовательность $\{\varphi(x-j)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ является ортонормированным базисом (ОНБ) в $V^{(0)}$. Элемент $\varphi(x)$ называется *порождающей скейлинг-функцией*.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства:

1. $\exists\, h_k \in \mathbf{R},\ k \in K,\ K \subset \mathbf{Z}$:

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in K} h_k\,\varphi(2x-k). \tag{A.1}$$

Это выражение называется *масштабным соотношением* (или *масштабным уравнением*) для скейлинг-функций.

2. $\forall\ i \in \mathbf{Z}$ последовательность $\left\{\varphi_j^{(i)}(x)\right\}_{j\in\mathbf{Z}}$, где $\varphi_j^{(i)}(x) = \sqrt{2^i}\,\varphi(2^i x - j)$, является ОНБ в пространстве $V^{(i)}$. Функции $\varphi_j^{(i)}(x)$ называются *скейлинг-функциями.*

3. Если $\varphi(x) \in \mathbf{L}_1(\mathbf{R})$, и $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = 1$, то с точностью до значений на множестве меры нуль эта функция единственным образом определяется масштабным соотношением (A.1), т.е. набором значений $\{h_k\}_{k\in K}$[1].

Для каждой пары подпространств $V^{(i)} \subset V^{(i+1)},\ i \in \mathbf{Z}$, многомасштабного анализа должно существовать подпространство $W^{(i)}$, такое что

$$V^{(i)} \perp W^{(i)},$$

$$V^{(i+1)} = V^{(i)} \oplus W^{(i)}.$$

Такие подпространства можно назвать *уточняющими* или *детализирующими* в том смысле, что они содержат уточняющую информацию, необходимую для перехода от уровня разрешения i к уровню $i+1$. Справедливо следующее:

$$\bigoplus_{i=-\infty}^{+\infty} W^{(i)} = \mathbf{L}_2(\mathbf{R}).$$

Если существует элемент $\psi(x) \in W^{(0)}$ такой, что последовательность $\{\psi(x-j)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ является ортонормированным базисом в $W^{(0)}$, то этот элемент называется *порождающим вейвлетом.*

Если $\psi(x) \in W^{(0)}$ — порождающий вейвлет, то набор функций $\left\{\psi_j^{(i)}(x)\right\}_{i,\,j\in\mathbf{Z}}$, где $\psi_j^{(i)}(x) = \sqrt{2^i}\psi(2^i x - j)$, образует ортонормированный базис в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$. Функции из этого набора называются *вейвлетами.* Детализирующие подпространства $W^{(i)}$, $i \in \mathbf{Z}$, принято также называть *вейвлет-пространствами.*

Очевидно, что порождающий вейвлет $\psi(x)$ является элементом пространства $V^{(1)}$. Следовательно, найдутся такие числа $g_l \in \mathbf{R},\ l \in L,\ L \subset \mathbf{Z}$, что

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{l\in L} g_l\,\varphi(2x-k). \tag{A.2}$$

[1]как известно, значения на множестве меры нуль не влияют на результат интегрирования, поэтому такая точность определения функций является достаточной.

Это соотношение является *масштабным соотношением* для вейвлетов. В отличие от соотношения (A.1), оно не является уравнением.

Таким образом, порождающий вейвлет $\psi(x)$ с точностью до значений на множестве меры нуль определяется коэффициентами $\{g_l\}_{l\in L}$, если определена порождающая скейлинг-функция $\varphi(x)$, а она, в свою очередь, определяется коэффициентами $\{h_k\}_{k\in K}$ соотношения (A.1). Следовательно, система скейлинг-функций и вейвлетов может быть полностью определена двумя наборами коэффициентов $\{h_k\}_{k\in K}$ и $\{g_l\}_{l\in L}$.

Замечание. Всегда можно считать, что $K = \mathbf{Z}$ и $L = \mathbf{Z}$, т.е. коэффициенты в наборах определены для любого целого индекса. Если это не так, то наборы доопределяются на всем множестве целых индексов нулевыми элементами.

Так как набор функций $\left\{\psi_j^{(i)}(x)\right\}_{i,j\in\mathbf{Z}}$ является ортонормированным базисом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$, то любую функцию $f(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ можно единственным образом представить в виде разложения

$$f(x) \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\, \psi_j^{(i)}(x), \tag{A.3}$$

где

$$w_j^{(i)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \psi_j^{(i)}(\bullet) \right\rangle, \quad \psi_j^{(i)}(x) = \sqrt{2^i}\psi(2^i x - j), \quad i, j \in \mathbf{Z}. \tag{A.4}$$

Набор вейвлет-коэффициентов, полученных по формулам (A.4) называется *диадным* или *дискретным ортогональным вейвлет-преобразованием* сигнала $f(x)$. Формула (A.3) определяет *обратное* диадное ортогональное вейвлет-преобразование.

Значения $w_j^{(i)}$, $i, j \in \mathbf{Z}$, называются *детализирующими коэффициентами* или *вейвлет-коэффициентами.*

Заметим, что для любого $i_0 \in \mathbf{Z}$

$$\bigoplus_{i=-\infty}^{i_0-1} W^{(i)} = V^{(i_0)},$$

следовательно,

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{i=-\infty}^{+\infty} W^{(i)} = V^{(i_0)} \oplus \bigoplus_{i=i_0}^{+\infty} W^{(i)}.$$

В пространстве $V^{(i_0)}$ существует базис скейлинг-функций, следовательно, набор функций

$$\left\{\varphi_j^{(i_0)}(x), \quad \psi_j^{(i)}(x)\right\}_{i,j\in\mathbf{Z},\, i\geq i_0}$$

также является ортонормированным базисом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ (будем называть такой базис *комбинированным*). Тогда справедливо следующее представление:

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^{(i_0)} \varphi_j^{(i_0)}(x) + \sum_{i=i_0}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)} \psi_j^{(i)}(x), \quad i_0 \in \mathbf{Z}, \tag{A.5}$$

где

$$v_j^{(i_0)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \varphi_j^{(i_0)}(\bullet) \right\rangle, \quad \varphi_j^{(i_0)}(x) = \sqrt{2^{i_0}} \varphi(2^{i_0} x - j), \quad i_0, j \in \mathbf{Z}.$$

Представление (A.5) можно рассматривать, как разложение сигнала $f(x)$ на две проекции — проекцию на пространство $V^{(i_0)}$ (первое слагаемое формулы), и проекцию на ортогональное дополнение $V^{(i_0)}$ до $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ (второе слагаемое). Структура пространств такова, что проекция сигнала на первое пространство является огрубленным (или, пользуясь терминологией анализа Фурье, *низкочастотным*) представлением этого сигнала, а на второе — высокочастотным, т.е. содержащим уточняющую (детализирующую) информацию о сигнале, потерянную при проецировании на пространство $V^{(i_0)}$. Очевидно, что чем выше значение i_0, тем больше информации, содержащейся во втором слагаемом формулы (A.5), «перетекает» в первое.

Проекцию сигнала на пространство $V^{(i_0)}$ будем называть представлением (или приближением) сигнала с разрешением i_0. Кроме собственно проекции, так можно называть и набор коэффициентов $\{v_j^{(i_0)}\}_{j \in \mathbf{Z}}$ разложения этой проекции по базисным скейлинг- функциям, т.к. при фиксированном базисе скейлинг-функций коэффициенты однозначно определяют такое приближение.

Далее воспользуемся для краткости следующими обозначениями для последовательностей подпространств и функций:

$$\mathbf{V} \equiv \left\{V^{(i)}\right\}_{i \in \mathbf{Z}}; \qquad \mathbf{W} \equiv \left\{W^{(i)}\right\}_{i \in \mathbf{Z}};$$

$$\mathbf{\Phi} \equiv \left\{\varphi_j^{(i)}(x)\right\}_{i,j \in \mathbf{Z}}; \quad \mathbf{\Phi}^{(i)} \equiv \left\{\varphi_j^{(i)}(x)\right\}_{j \in \mathbf{Z}}, \quad i \in \mathbf{Z};$$

$$\mathbf{\Psi} \equiv \left\{\varphi_j^{(i)}(x)\right\}_{i,j \in \mathbf{Z}}; \quad \mathbf{\Psi}^{(i)} \equiv \left\{\psi_j^{(i)}(x)\right\}_{j \in \mathbf{Z}}, \quad \in \mathbf{Z}.$$

Пример. Порождающие скейлинг-функции и вейвлет ортогонального преобразования Хаара имеют вид:

$$\varphi_H(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \notin [0,1) \end{cases}, \quad \psi_H(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1/2) \\ -1, & x \in [1/2,1) \\ 0, & x \notin [0,1) \end{cases}, \tag{A.6}$$

коэффициенты соответствующих масштабных соотношений:

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

.

A.2 Неортогональный многомасштабный анализ

Требование ортогональности вейвлет-базиса на практике оказывается достаточно сильным ограничением, и его приходися ослаблять.

В определении многомасштабного анализа (п. A.1) требование ортогональности системы базисных скейлинг-функций $\mathbf{\Phi}^{(0)} = \{\varphi(x-j)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ подпространства $V^{(0)}$ можно ослабить и потребовать, чтобы система являлась *базисом Рисса*[2].

Как следствие, базис скейлинг-функций $\mathbf{\Phi}^{(i)}$ в любом подпространстве $V^{(i)}$, $i \in \mathbf{Z}$, также будет базисом Рисса. Любое подпространство $V^{(i+1)}$, $i \in \mathbf{Z}$, представимо в виде объединения подпространств $V^{(i)}$ и $W^{(i)}$, но они не обязаны быть ортогональными друг другу. Из этого, в частности, следует, что по многомасштабному анализу $\mathbf{V}$ соответствующая последовательность детализирующих подпространств $\mathbf{W}$ может определяться неоднозначно.

Базисы вейвлетов $\mathbf{\Psi}^{(i)}$ в детализирующих подпространствах $W^{(i)}$, $i \in \mathbf{Z}$, также должны быть базисами Рисса.

Рассмотрим два неортогональных многомасштабных анализа $\mathbf{V}$ и $\widetilde{\mathbf{V}}$, а также два соответствующих набора детализирующих подпространств $\mathbf{W}$ и $\widetilde{\mathbf{W}}$, таких что:

$$\widetilde{V}^{(0)} \perp W^{(0)}, \quad V^{(0)} \perp \widetilde{W}^{(0)},$$

а базисные функции $\mathbf{\Phi}^{(0)}$ и $\mathbf{\Psi}^{(0)}$ пространств $V^{(0)}$ и $W^{(0)}$ составляют биортогональные пары с базисными функциями $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{(0)}$ и $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{(0)}$ пространств $\widetilde{V}^{(0)}$ и $\widetilde{W}^{(0)}$ соответственно. Заметим, что если это требования выполнены для уровня разрешения 0, то они будут выполнены и для любого другого разрешения $i \in \mathbf{Z}$.

При таких условиях вейвлет-базисы $\mathbf{\Psi}$ и $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$ пространства $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ образуют биортогональную пару. (Это же утверждение справедливо и для комбинированных базисов, со-

[2]Последовательность $\{y_j\}$ в гильбертовом пространстве является *базисом Рисса*, если любой элемент y этого пространства может быть представлен единственным образом в виде разложения $y = \sum_j \alpha_j y_j$, и существуют константы $0 < A \leq B$, такие что $A\|y\|^2 \leq \sum_j |\alpha_j|^2 \leq B\|y\|^2$. Очевидно, что для ортонормированного базиса $A = B = 1$ и неравенство превращается в равенство Парсеваля.

ставленный из скейлинг-функций произвольного уровня разрешения i_0 и всех вейвлетов разрешения, не меньшего, чем i_0).

Выпишем формулы *биортогонального диадного вейвлет-преобразования.*

Прямое преобразование:

$$w_j^{(i)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \widetilde{\psi}_j^{(i)}(\bullet) \right\rangle, \quad i,\, j \in \mathbf{Z}. \tag{A.7}$$

Обратное преобразование:

$$f(x) \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\, \psi_j^{(i)}(x) \tag{A.8}$$

(совпадает с формулой (A.3) для ортогонального случая).

Ортогональное преобразование является частным случаем биортогонального. Действительно, ортонормированный базис биортогонален самому себе и формула (A.7) для такого базиса превращаются в уже известную формулу (A.4).

Так же как и для ортогонального случая, возможно разложение сигнала по комбинированному базису, т.е. для любого уровня разрешения $i_0 \in \mathbf{Z}$ формуле (A.8) эквивалентно следующее представление (аналогично (A.5)):

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^{(i_0)}\, \varphi_j^{(i_0)}(x) + \sum_{i=i_0}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\, \psi_j^{(i)}(x), \quad i_0 \in \mathbf{Z}, \tag{A.9}$$

где

$$v_j^{(i_0)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \widetilde{\varphi}_j^{(i_0)}(\bullet) \right\rangle, \quad i_0,\, j \in \mathbf{Z}.$$

A.3 Вычисление вейвлет-преобразований

Вычислять коэфициенты вейвлет-преобразований по формулам (A.4) или (A.7) неудобно, поскольку операция скалярного произведения достаточно трудоемка.

Избежать таких вычислений помогут соотношения для коэффициентов при базисных функциях соседних уровней разрешения:

$$\begin{aligned} v_j^{(i)} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{2j+k}^{(i+1)}\, \tilde{h}_k, \\ w_j^{(i)} &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} v_{2j+l}^{(i+1)}\, \tilde{g}_l, \\ & \quad i,\, j \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$v_j^{(i+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(v_k^{(i)}\, h_{j-2k} + w_k^{(i)}\, g_{j-2k} \right), \quad i,j \in \mathbf{Z}, \tag{A.11}$$

где $\{\tilde{h}_k\}$, $\{\tilde{g}_k\}$, $\{h_k\}$ и $\{g_k\}$ являются коэффициентами масштабных соотношений для функций $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно (вывод формул см. в [9, 38]).

Таким образом, если известно представление сигнала с некотоым разрешением i_1, то по формулам (A.10) можно получить представление сигнала с любым разрешением, меньшим i_1, а по формуле (A.11) восстановить исходное представление.

В качестве начального представления с разрешением i_1 берется некоторым образом оцифрованный (дискретезированный) сигнал (получение такой оцифровки не является предметом рассмотрения настоящей работы).

Если же сигнал изначально дискретный ($\mathbf{s} = \{s_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$), то можно считать, что он сам и является собственным представлением с разрешением i_1, то есть $v_j^{(i_1)} = s_j,\ j \in \mathbf{Z}$.

Остается заметить, что приведенные в гл. 1 формулы прямого и обратного вейвлет-преобразований (1.3) и (1.4) являются несколько иной формой записи формул (A.10) и (A.11), а используемые в них фильтры состоят из коэффициентов соответствующих масштабных соотношений, а именно:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \{\tilde{h}_{-k}\}, \quad \tilde{\mathbf{g}} = \{\tilde{g}_{-k}\};$$
$$\mathbf{h} = \{h_k\}, \quad \mathbf{g} = \{g_k\}$$

(для фильтров анализа коэффициенты берутся в обратном порядке).

A.4 Двумерные преобразования

Простейшим примером многомерных преобразований является «естественное» расширение одномерного случая на случай большей размерности. Функциями такого преобразования являются *тензорные произведения* одномерных функций по размерности преобразования. Так для двумерного случая получается четыре порождающих функции — одна скейлинг-функция

$$\varphi\varphi(x,y) = \varphi(x)\,\varphi(y) \tag{A.12}$$

и три вейвлета

$$\varphi\psi(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y),$$

$$\begin{aligned} \psi\varphi(x,y) &= \psi(x)\,\varphi(y), \\ \psi\psi(x,y) &= \psi(x)\,\psi(y). \end{aligned} \tag{A.13}$$

(для наглядности мы будем придерживаться несколько нестандартных двухбуквенных обозначений, что, во-первых, позволит избежать введения новых символов, а, во-вторых, отражает структуру данного вида преобразований).

Все остальные функции определяются соотношением:

$$\Omega^{(i)}_{j,k}(x,y) = 2^i\Omega(2^i x - j, 2^i y - k), \quad i, j \in \mathbf{Z}, \tag{A.14}$$

где символ Ω заменяется на $\varphi\varphi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$ или $\psi\psi$.

Если система, порожденная функциями (A.13), является ортонормированным базисом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2)$ (для чего необходимо и достаточно, чтобы система, порожденная функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являлась ортонормированным базисом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$), то прямое вейвлет-преобразование сигнала $f(x,y) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2)$ будет вычисляться по формуле:

$$\begin{aligned} vw^{(i)}_{j,k} &= \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \varphi\psi^{(i)}_{j,k}(\bullet) \right\rangle; \\ wv^{(i)}_{j,k} &= \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \psi\varphi^{(i)}_{j,k}(\bullet) \right\rangle; \\ ww^{(i)}_{j,k} &= \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \psi\psi^{(i)}_{j,k}(\bullet) \right\rangle; \\ & i, j, k \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \tag{A.15}$$

а обратное:

$$f(x,y) \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(vw^{(i)}_{j,k}\, \varphi\psi^{(i)}_{j,k}(x,y) + wv^{(i)}_{j,k}\, \psi\varphi^{(i)}_{j,k}(x,y) + ww^{(i)}_{j,k}\, \psi\psi^{(i)}_{j,k}(x,y) \right). \tag{A.16}$$

Если же одномерный базис не ортогонален и имеет биортогональную пару, порожденную функциями $\widetilde{\varphi}(x)$ и $\widetilde{\psi}(x)$, то соответствующие двумерные базисы, полученные с помощью тензорного произведения также будут биортогональны. Обобщить формулы (A.15) и (A.16) на биортогональный случай не составляет труда.

В двумерном случае также возможно разложение сигнала по комбинированному базису (т.е. базису, содержащему скейлинг-функции $\varphi\varphi^{(i_0)}_{j,k}(x,y)$, $j,k \in \mathbf{Z}$, некоторого уровня разрешения $i_0 \in \mathbf{Z}$):

$$\begin{aligned} f(x,y) \sim & \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} vv^{(i_0)}_{j,k}\, \varphi\varphi^{(i_0)}_{j,k}(x,y) + \\ & + \sum_{i=i_0}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(vw^{(i)}_{j,k}\, \varphi\psi^{(i)}_{j,k}(x,y) + wv^{(i)}_{j,k}\, \psi\varphi^{(i)}_{j,k}(x,y) + ww^{(i)}_{j,k}\, \psi\psi^{(i)}_{j,k}(x,y) \right), \end{aligned} \tag{A.17}$$

где (в ортогональном случае):

$$vv_{j,k}^{(i_0)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \varphi\varphi_{j,k}^{(i_0)}(\bullet) \right\rangle,$$

$$j, k \in \mathbf{Z}.$$

Вычисление коэффициентов двумерного преобразования не требует вывода новых формул, т.к. сводится к композиции шагов одномерных преобразований (гл. 1, п. 1.4)

A.5 Нормализация вейвлет-базисов

Часто в приложениях требуется разложение сигналов не по нормированному базису, а по базису функций, имеющих, например, одинаковые максимальные и минимальные значения (условно назовем такой базис ненормализованным). В таком случае из масштабных соотношений следует убрать нормирующий множитель $\sqrt{2}$, что повлечет за собой изменение коэффициентов этих соотношений (и, следовательно, фильтров). Так, в случае нормализованного базиса сумма коэффициентов НЧ фильтров (и синтеза, и анализа) должна быть равна $\sqrt{2}$, а в ненормализованным — 1 для НЧ анализа и 2 для НЧ синтеза. Любой вейвлет-базис можно либо нормализовывать, либо нет.

Фильтры преобразования Хаара, приведенные в гл. 1, а также фильтры B-сплайнового преобразования (гл. 3) соответствуют ненормализованному случаю, фильтры преобразования D_4 (гл. 1) — нормализованному.

Подробнее о нормализации преобразований см. [9].

Список литературы

1. *Бердышев В.И., Петрак Л.В.* Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 1999.

2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

3. *Захаров В.Г.* Разработка и применение методов вейвлет-анализа к нелинейным гидродинамическим системам. Диссертация.

4. *Иванов В.П., Батраков А.С.* Трехмерная компьютерная графика. М.: Радио и связь, 1995.

5. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001.

6. *Кокорин О.Ю., Упольников С.А.* Использование иерархического алгоритма в методе излучательности. // Труды конференции ГрафиКон'97. 1997. 31-37.

7. *Новиков И.Я., Стечкин С.Б.* Основные конструкции всплесков. // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. **3**, N 4. 999-1028.

8. *Новиков И.Я., Стечкин С.Б.* Основные теории всплесков. // Успехи математических наук. 1998. **53**, N 6. 53-128.

9. *Переберин А.В.* О систематизации вейвлет-преобразований. // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**. Раздел 3. 15-40. (http://num-meth.srcc.msu.su/)

10. *Переберин А.В.* Построение изолиний с автоматическим масштабированием. // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**. Раздел 2. 22-32. (http://num-meth.srcc.msu.su/)

11. *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.

12. *Поспелов В.В., Кислицына М.А.* Использование преобразования Хаара для модификации алоритма JPEG сжатия изображений. // Тезисы докладов коференции РОАИ'97, ч.1. 1997. 210-212.

13. *Роджерс Д., Адамс Дж.* Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001.

14. *Шикин Е.В., Боресков А.В.* Компьютерная графика. Динамика, реалистические изображения. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996.

15. *De Bonet J.S.* Multiresolution Sampling Procedure for Analysis and Synthesis of Texture Images. // SIGGRAPH'97 Proceedings. 1997. 362-368.

16. *Bonneau G.-P.* Multiresolution Analysis of Irregular Surface Meshes. // IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics. 1998. **4**, N 4. 365-378.

17. *Bonneau G.-P., Hahmann S., Nielson G.M.* BLaC-Wavelets: A Multiresolution Analysis With Non-Nested Spaces. // IEEE Visualization'96 Proceedings. 1996. 43-48.

18. *Chui C.K.* An Introduction to Wavelets. New York - London: Academic Press, 1992.

19. *Chui C.K., editor.* Wavelets: a Tutorial in Theory and Applications. New York - London: Academic Press, 1992.

20. *Chui C.K., Quak E.* Wavelets on a Bounded Interval. // Numerical Methods in Approximation Theory. 1992. **9**. 53-75.

21. *Coifman R.R., Meyer Y., Wickerhauser V.* Wavelet Analysis and Signal Processing Wavelets. // Wavelets and their Applocations. Boston: Jones and Barlett, 1992. 153-178.

22. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.

23. *Daubechies I., Sweldens W.* Factoring Wavelet Transforms into Lifting Steps. // IEEE Trans. Image Processing. 2000. **9**, N 3. 480-496.

24. *DeVore R., Jawerth W., Lucier B.* Image Compression Trough Wavelet Transform Coding. // IEEE Trans. on Information Theory. 1992. **39**, N 2. 719-746.

25. *Eck M., DeRose T.D., Duchamp T., Hoppe H., Lounsbery M., Stuetzle W.* Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes. // SIGGRAPH'95 Proceedings. 1995. 173-182.

26. *Efros A.A., Leung T.K.* Texture Synthesis by Non-Parametric Sampling. // IEEE International Conference on Computer Vision. 1999.

27. *Finkelstein A., Salesin D.H.* Multiresolution Curves. // SIGGRAPH'94 Proceedings. 1994. 261-268.

28. *Foley J.D., van Dam A., Feiner S.K., Huges J.F.* Computer Graphics. Principles and Practice. // New York: Addison-Wesley, 1990.

29. *Gabour D.* Theory of Communications. // Journal of the Institute of Electrical Engineers. 1946. **93**, N 22. 429-457.

30. *Glassner A.S.* Principles of Digital Image Synthesis. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1995.

31. *Gortler S.J., Schröder P., Cohen M.F., Hanrahan P.* Wavelet Radiosity. // SIGGRAPH'93 Proceedings. 1993. 221-230.

32. *Gross M.H., Staadt O.G., Gatti R.* Efficient Triangular Surface Approximations Using Wavelets and Quadtree Data Structures. // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 1996. **2**, N 2. 130-143.

33. *Haar A.* Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme. // Math. Ann. 69, 1910. 331-371.

34. *Heeger D.J., Bergen J.R.* Pyramid-based Texture Analysis/Synthesis. // SIGGRAPH'95 Proceedings. 1995. 229-238.

35. *Ihm I., Park S.* Wavelet-Based 3D Compression Scheme for Ineractive Visualization of Very Large Volume Data. // Computer Graphics Forum. 1999. **18**, N 1. 3-15.

36. *Ivanov D.V., Kuzmin E.P., Burtsev S.V.* Progressive Image Compression Using Binary Trees. // GraphiCon'98 Proceedings. 1998. 187-194.

37. *Jacobs C.E., Finkelstein A., Salesin D.* Fast Multiresolution Image Querying. // SIGGRAPH'92 Proceedings. 1992. 177-184.

38. *Jawerth B., Sweldens W.* An Overwiew of Wavelet Based Multiresolution Analyses. // SIAM Rev. 1994. **36**, N 3. 377-412.

39. *Jensen H.W.* Global Illumination Using Photon Maps. // The 7-th Eurographics Workshop on Rendering Proseedings. 1996. 21-30.

40. *Jensen H.W., Christensen N.J.* Bidirectional Monte Carlo Ray Tracing of Copmplex Objects Using Photon Maps. // Computers and Graphics. 1995. **19**, N 2.

41. *Kortchagine D.N., Krylov A.S.* Projection Filtering in Image Processing. // GraphiCon'2000 Proceedings. 2000. 42-45.

42. *Kovačević J., Sweldens W.* Wavelet Families of Increasing Order in Arbitrary Dimentions. // IEEE Trans. Image Proc. 2000. **9**, N 3. 480-496.

43. *Lee S., Lawton W., Shen Z.* An Algorithm for Matrix Extension and Wavelet Constructions. // Mathematics of Computation. 1996. **65**, N 214. 723-737.

44. *Levkovich-Maslyuk L.I.* Wavelet-Based Determination of Generating Matrices for Fractal Interpolation Functions. // Regular and Chaostic Dynamics. 1998. **3**, N 2.

45. *Levkovich-Maslyuk L.I.* Approximation of Financical Time Series by Fractal Interpolation Functions. // Вопросы анализа риска. 1998. **1**, N 1.

46. *Lorensen W.E., Cline H.E.* Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Reconstruction Algorithm. // Computer Graphics. 1987. **21**, N 4. 163-169.

47. *Lounsbery M.* Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type. PhD thesis, Univ. of Washington, Seattle, 1994.

48. *Lounsbery M., T.D. DeRose T.D., Warren J.* Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type. // ACM Trans. Graphics. 1997. **16**, N 1. 34-73.

49. *Mallat S.* Multiresolution Approximation and Wavelet Othonormal Bases $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$. // Trans. AMS. 1989. **1**, N 315. 69-87.

50. *Mallat S.* A Wavelet Tour of Signal Processing. New York - London: Academic Press, 1998.

51. *Mallat S., Zhong S.* Characterization of Signals from Multiscale Edges. // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1992. **14**, N 7. 710-732.

52. *Martens J.-B.* The Hermite Transform — Theory. // IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. 38, 1990. 1595-1606.

53. *Martens J.-B.* The Hermite Transform — Applications. // IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. 38, 1990. 1607-1618.

54. *Myszkowski K.* Lighting Reconstruction Using Fast and Adaptive Density Estimation Techniques. // Rendering Techniques'97. 1997.

55. *Mumford D., Gidas B.* Stochastic Models for Generic Images. 2000. (http://www.dam.brown.edu/people/mumford/Papers/Generic5.pdf)

56. *Pereberin A.V.* From Photon Map to Irradiance Function via Wavelet Transform. // GraphiCon'97 Proceedings. 1997. 38-43.

57. *Pereberin A.V.* Hierarchical Approach for Texture Compression. // GraphiCon'99 Proceedings. 1999. 195-199.

58. *Pereberin A.V.* Fast Multi-Scaled Texture Generation and Rendering. // GraphiCon'2000 Proceedings. 2000. 145-150.

59. *Rogers D.* Introduction to NURBS: With Historical Perspective. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2000.

60. *Said A., Perlman W.A.* A New Fast and Efficient Image Codec Based on Set Partitioning in Hierarchical Trees. // IEEE Trans. CSVT. 1996. **6**, N 3. 243-250.

61. *Shapiro J.M.* Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients. // IEEE Trans. Signal Processing. 1993. **41**, N 12. 345-362.

62. *Shirley P., Wade B., Hubbard P.M., Zareski D., Walter B., Greenberg D.P.* Global Illumination via Density Estimation. // The 6-th Eurographics Workshop on Rendering Proseedings. 1995. 219-230.

63. *Silverman B.W.* Density Estimation for Statistics and Data Analysis. London: Chapmann and Hall, 1985.

64. *Stollnitz E.J., DeRose T.D., Salesin D.H.* Wavelets for Computer Graphics. Theory and applications. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1996.

65. *Sweldens W.* The Lifting Scheme: A Construction of Second Generation Wavelets. // SIAM J. Math. Anal. 1996. **3**, N 2. 186-200.

66. *Sweldens W., Schröder P.* Building Your Own Wavelets at Home. // Wavelets in Computer Graphics, ACM SIGGRAPH Course Notes, 1996.

67. *Tieng Q.M., Boles W.W.* Recognition of 2D Object Contours Using the Wavelet Transform Zero-Crossing Representation. // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intellegence. 1997. **19**, N 8. 910-916.

68. *Wojtaszczyk P.* A Mathematical Introduction to Wavelets. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

69. *Zakharov V.* Nonseparable Multidimentional Littlewood-Paley Like Wavelet Bases. Centre de Phisique Théorique, Marseille. 1996.