

## Полигармоническое разложение цифрового изображения

А.Н. Марковский<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар, Россия  
mrkvsk@yandex.ru

**Аннотация.** Получено разложение пространства  $L_2(Q)$  в прямую сумму полигармонических подпространств. Доказана полнота систем сдвигов фундаментального решения полигармонического уравнения. Разработан сходящийся алгоритм решения задачи выделения полигармонической составляющей функции из  $L_2(Q)$ . Полученное разложение применяется к некоторым задачам обработки цифровых изображений; приводятся результаты вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** полигармонические функции, ортогональная сумма, цифровые изображения.

### 1 Введение

В обработке изображений важную роль играет декомпозиция изображения в сумму элементарных изображений [1]. Особо важно, чтобы такое разложение было единственно, и элементарные изображения были в определенном смысле независимы. Такой подход позволяет свести анализ исходного изображения к анализу элементарных изображений.

Если изображение моделировать кусочно-постоянной функцией из пространства Лебега  $L_2(Q)$  ( $Q=[0,1]^2$  - поле зрения,  $x=(x_1, x_2) \in R^2$ ), то одним из примеров такого разложения может служить ряд Фурье (1) - разложение по некоторой полной ортогональной системе  $\varphi_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \varphi_{ij}(x), \quad (3)$$

где  $c_{ij} = (f, \varphi_{ij})$  - коэффициенты Фурье, при этом базисные функции  $\varphi_{ij}$  называют гармониками, а набор коэффициентов  $c_{ij}$  - спектром.

Полных ортогональных систем существует бесконечно много, поэтому для разных классов изображений стараются использовать такие базисные системы, которые наилучшим образом отражают свойства класса.

Описание классов изображений и соответствующих систем, а также разработка новых методов численного анализа и обработки изображений является весьма актуальной задачей.

В настоящей работе приводится новое общее ортогональное полигармоническое разложение (2) для любой функции  $f$  из пространства  $L_2(Q)$ .

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x), \quad (4)$$

где  $a_k(x)$  - полигармонические компоненты.

На основе этого разложения определяется класс гладких изображений и на этом классе вводится новая метрика. Для анализа изображений используются свойства и методы полигармонических функций.

## 2 Ортогональная сумма полигармонических подпространств

Рассмотрим однородное полигармоническое уравнение (3).

$$\Delta^m u(x) = 0, \Delta^m = \Delta(\Delta^{m-1}), m \in N, \quad (5)$$

в ограниченной области  $Q \subset R^n$  с кусочно-гладкой границей  $S = \partial Q$ . Введем обозначение (4).

$$e_m(Q) = \{E_{m,n}(x - y) | x \in Q, y \in R^n \setminus \bar{Q}\}, m \geq 1, \quad (6)$$

множество сдвигов фундаментального решения  $m$ -гармонического уравнения в  $n$ -мерном пространстве  $R^n$ , и  $G_m(Q)$  - замыкание  $e_m(Q)$  в норме  $L_2(Q)$ . Подпространство  $G_m(Q)$  будем называть *полигармоническим пространством*.

Обозначим  $N_m(Q)$  - ортогональное дополнение к  $G_m(Q)$  в  $L_2(Q)$ , ( $m \geq 1$ ), так что  $L_2(Q) = G_l(Q) \oplus N_l(Q)$ . Далее, рассматриваем расширение по непрерывности классического оператора Лапласа и корректно строим обратный оператор (5).

$$\Delta^{-1}: L_2(Q) \rightarrow N_1(Q). \quad (7)$$

**Теорема 1.** Если  $f \in G_m(Q)$ , ( $m \geq 1$ ), то существуют гармонические из  $G_l(Q)$  функции  $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$ , такие что

$$f = g_0 + \Delta^{-1}g_1 + \dots + \Delta^{-(m-1)}g_{m-1}, \quad (8)$$

и такое представление единственно.

Обозначим  $A_l(Q) = G_l(Q)$  - подпространство гармонических функций, и

$$A_k(Q) = \{f \in N_{k-1}(Q) | f = \Delta^{-(k-1)}g, g \in G_1(Q)\}, k \geq 2.$$

**Теорема 2.** Пространство функций, суммируемых по области с квадратом, разлагается в ортогональную сумму (7).

$$L_2(Q) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} A_k(Q). \quad (9)$$

### 3 Метод фундаментальных решений

Системы сдвигов фундаментальных решений различных уравнений математической физики рассматривались в связи с построением проекционного метода решения соответствующих краевых задач [2]. Такой подход в дальнейшем назывался методом разложения по неортогональным функциям [3], методом базисных потенциалов [4] и, в зарубежной литературе, методом фундаментальных решений [5].

Всякая такая система порождается сдвигами аргументов одной функции -- фундаментального решения дифференциального оператора или некоторой его модификации.

Сходимость алгоритмов метода обеспечивается полнотой рассматриваемых систем; получение достаточных условий полноты - условий на множество сдвигов, является одной из основных задач теоретического обоснования использования тех или иных фундаментальных решений.

Достаточное условие полноты гармонической системы – условие базисности – сформулировал проф. В.Г. Лежнев в работе [4] и заметил, что сдвиги можно выбирать локализовано.

Последовательность точек

$$x^{(k)} \in Q^+ = R^n \setminus \bar{Q}, k = 1, 2, \dots,$$

будем называть *m-базисной*, если она отделена от границы  $S$  и удовлетворяет условию единственности  $m$ -гармонических (полигармонических) в  $Q^+$  функций.

Обозначим

$$\gamma_{mk}(x) = E_{m,n}(x^{(k)} - x), x \in Q, k = 1, 2, \dots,$$

семейство ( $m=1, 2, \dots$ ) систем функций, где  $E_{m,n}(x)$  - фундаментальное решение  $m$ -гармонического уравнения в  $R^n$  ( $n \geq 2$ ) [7, стр. 520]:

а) в случае нечетных  $n > 1$  и четных  $n$ , для которых  $n > 2m$ ,

$$E_{m,n} = \kappa_{m,n} |x|^{2m-n}, \kappa_{m,n} = \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{n}{2} - m)}{\Gamma(m) 2^{2m} \pi^{n/2}}$$

б) в случае четных  $n$ ,  $n \leq 2m$ ,

$$E_{m,n}(x) = \kappa_{m,n} |x|^{2m-n} \ln|x|, \kappa_{m,n} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(m) \Gamma(m - \frac{n}{2} + 1) 2^{2m-1} \pi^{n/2}}.$$

Для гармонических систем сдвигов  $m=1$  справедлива теорема В.Г. Лежнева [4, стр. 24]: система функций  $\gamma_{1,k}(x)$ ,  $k=1, 2, \dots$ , линейно независима и замкнута в подпространстве  $G_1(Q)$ , если последовательность  $x^{(k)}$  является 1-базисной в  $Q^+$ .

Одним из основных результатов является обобщение теоремы В.Г. Лежнева на случай полигармонических систем сдвигов. Бигармонический случай ( $m=2$ ) подробно рассмотрен в [8].

**Теорема 3.** Для любого  $m \geq 2$  система функций  $\gamma_{m,k}(x)$ ,  $k=1, 2, \dots$ , замкнута и линейно независима в подпространстве  $G_m(Q)$ , если  $x^{(k)}$  -  $m$ -базисная последовательность в  $Q^+$ .

#### 4 Задача выделения полигармонической составляющей функции

Пусть задана функция  $f(x)$  из  $L_2(Q)$ . Зафиксируем  $m$  - порядок полигармонической составляющей извлекаемой из заданной функции  $f$ .

Согласно теореме 2, функция  $f(x)$  раскладывается в сумму ортогональных слагаемых, так что

$$f(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_m(x) + h_m(x),$$

где  $a_k \in A_k(Q)$ ,  $k=1,2,\dots,m$ , а  $h_m \in N_m(Q)$ .

Рассмотрим следующую задачу: для заданной функции  $f(x) \in L_2(Q)$  определить ее полигармоническую составляющую  $a_m(x)$ .

Случай  $m=1$  рассмотрен в [6]. Будем считать  $m \geq 2$ . Нетрудно видеть, что

$$a_m(x) = g_m(x) - g_{m-1}(x),$$

где  $g_m$  и  $g_{m-1}$  - проекции функции  $f$  на подпространства  $G_m(Q)$  и  $G_{m-1}(Q)$ .

Рассмотрим  $m$ -базисную в  $Q^+$  последовательность  $x^{(k)}$  и соответствующую ей систему функций  $\gamma_{m,k}(x)$ ,  $k=1,2,\dots$ . Обозначим  $g_m^N(x)$  и  $g_{m-1}^N(x)$  - проекции на конечномерные подпространства, натянутые на полные системы:  $\gamma_{m,k}(x)$  и  $\gamma_{m-1,k}(x)$ ,  $k=1,2,\dots,N$ :

$$g_m^N(x) = \sum_{k=1}^N c_{m,k} \gamma_{m,k}(x), \quad g_{m-1}^N(x) = \sum_{k=1}^N c_{m-1,k} \gamma_{m-1,k}(x),$$

тогда

$$a_m^N(x) = g_m^N(x) - g_{m-1}^N(x).$$

По теореме 3 последовательность  $a_m^N$  сходится в норме  $L_2(Q)$  к  $a_m$ , при  $N \rightarrow \infty$ . Определение коэффициентов проекции  $g_m^N$  стандартным образом сводится к решению системы линейных уравнений с матрицей Грама для системы функций  $\gamma_{m,k}(x)$ ,  $k=1,2,\dots,N$ :

$$\sum_{k=1}^N c_{m,k} (\gamma_{m,k}, \gamma_{m,j}) = (f, \gamma_{m,j}), \quad j = 1, \dots, N,$$

где  $(\cdot, \cdot)$  - скалярное произведение в  $L_2(Q)$ . Решая систему линейных уравнений при заданном  $m$  находим матрицу коэффициентов  $c_{m,k}$  ( $k=1,2,\dots,N$ ) приближенной проекции  $g_m^N$  функции  $f$  на полигармоническое подпространство  $G_m(Q)$ . Аналогично, определяется проекция  $g_{m-1}^N$ . Количество функций используемых для аппроксимации теоретически характеризует точность приближенного решения, но при больших  $N$  ( $N > 100$ ) матрица Грама становится плохо обусловленной и для обеспечения высокой точности требуются специальные методы решения линейной системы.

#### 5 Полигармоническое разложение изображения

Под изображением, заданным на поле зрения  $Q=(0,1) \times (0,\beta)$  будем понимать кусочно-постоянную функцию  $f(x)$ , равную  $a_{ij} \in [0,1]$ , при непрерывном

$x=(x_1, x_2] \in \Omega_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, p$ , и  $j=1, 2, \dots, q$ , при равномерном разбиении (дискретизации)  $Q$  на растры  $\Omega_{ij}$  - квадраты, где  $(a_{ij})$  - заданная матрица яркостной интенсивности пикселей;  $p, q$  - количество пикселей по горизонтали и вертикали соответственно, и  $\beta=p/q$ . Таким образом, изображение  $f(x)$  можно считать элементом из  $L_2(Q)$  - пространства функций, суммируемых с квадратом по области  $Q$ .

Согласно теореме 2, всякое изображение  $f(x) \in L_2(Q)$  может быть разложено единственным образом в сумму изображений (8).

$$f = g_m(f) + h_m(f) = a_1(f) + a_2(f) + \dots + a_m(f) + h_m(f), \quad (10)$$

где:

- $g_m(f)$  - проекция изображения  $f$  на полигармоническое подпространство  $G_m(Q)$ ; полигармоническая составляющая, характеризует «гладкую» часть изображения;
- $a_k(f)$  - ортогональные  $k$ -гармонические компоненты изображения; чистые полигармоники, характеризует гладкую часть по полигармоническим «слоям»;
- $h_m(f)$  - проекция исходного изображения на подпространство  $N_m(Q)$ ; сингулярная компонента, характеризует «точечные» особенности изображения.

В общем случае  $h_m(f) \neq 0$ , но можно показать, что  $\|h_m(f)\| \rightarrow 0$ , при  $m \rightarrow \infty$ , так что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $m > 0$ , такое что  $\|f - g_m(f)\| < \varepsilon$ , и тогда всякое изображение можно аппроксимировать полигармонической функцией  $g_m(f)$  достаточно большого порядка  $m$ , и, соответственно, приближенное изображение может быть разложено на ортогональные чистые полигармоники:

$$g_m(f) = a_1(f) + a_2(f) + \dots + a_m(f).$$

По теореме 1,  $a_k(f) = \Delta^{1-k} p_k(f)$ , где  $p_k \in G_1(Q)$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , и тогда всякому изображению можно сопоставить единственный набор гармонических функций  $p_k(f)$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , который вместе с компонентой  $h_m(f)$  идентифицирует изображение  $f$ :

$$f = p_1(f) + \Delta^{-1} p_2(f) + \dots + \Delta^{1-m} p_m(f) + h_m(f).$$

Если для изображения при некотором  $m$  сингулярная компонента  $h_m(f)$  равна нулю, то такое изображение будем называть гладким. Для класса гладких изображений справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пространство гладких изображений погружается в степень декартова произведения пространства гармонических функций.

Пусть гармонические функции  $\tilde{p}_k$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , близки функциям  $p_k(f)$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , в норме пространства  $L_2(Q)$ , тогда изображение

$$\tilde{f} = \tilde{p}_1 + \Delta^{-1} \tilde{p}_2 + \dots + \Delta^{1-m} \tilde{p}_m,$$

близко исходному изображению  $f$ , и выполняется неравенство (9).

$$\|f - \tilde{f}\| \leq C \sum_{k=1}^m \|p_k - \tilde{p}_k\|. \quad (11)$$

Можно говорить, что два изображения близки, если близки их гармонические компоненты. Таким образом на пространстве гладких изображений возникает естественная метрика  $\rho$  для которой если  $\|p_k - \tilde{p}_k\| < \varepsilon$ , для любого  $k=1,2,\dots,m$ , то  $\rho(f, \tilde{f}) < \varepsilon$ .

В случае гладкого изображения сингулярная компонента равна нулю, и такое разложение может быть использовано, например, в задачах обработки размытых изображений [9, 10], в вычислительной газодинамике при анализе локализации структур [11, 12] и в анализе рентгенограмм [13].

Ниже на рис. 1 представлены результаты численного эксперимента: количество базисных точек  $N$  равно 60, точки  $x^{(k)}$  располагаются равномерно во внешности  $Q=[0,1]^2$  на прямых, параллельных границе  $Q$ , отстоящих от нее на расстоянии  $\delta=0.2$ . Для заданного изображения  $f$  приводятся вычисленные проекции  $g_m$  на полигармонические подпространства  $G_m(Q)$ ,  $m=1,2,\dots,8$ , и проекция  $h_8$  на подпространство  $N_8(Q)$ .

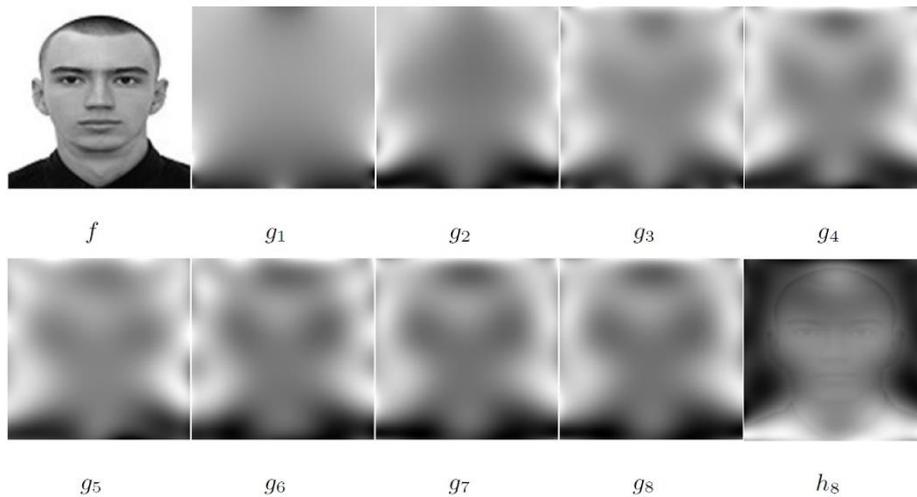


Рис. 9. Результаты численного эксперимента

## 6 Заключение

В работе приводится разложение пространства функций, суммируемых с квадратом, в ортогональную сумму полигармонических подпространств. Рассматриваются системы сдвигов фундаментальных решений полигармонических уравнений, и приводится достаточное условие полноты таких систем. Разрабатывается сходящийся алгоритм определения проекций заданной функции на полигармонические подпространства. Определяется класс гладких изображений и на

этом классе вводится естественная метрика. Показано, как свойства и методы полигармонических функций применяются к анализу цифровых изображений.

Разрабатываемый подход, а также прямые и обратные полигармонические операторы могут быть эффективно применены к некоторым задачам обработки цифровых изображений, таких как: сглаживание и концентрирование, мера гладкости и структурированности, выделение контуров, восстановление изображений, алгоритмы сжатия, устранение импульсных шумов, стирание объектов и обработка края изображения. Некоторые вопросы в гармоническом случае  $m=1$  были рассмотрены в [14].

## Литература

1. Соيفер В.А. и др. Методы компьютерной обработки изображений/ Под ред В.А. Соифера. - 2-е изд., испр. М.:Физматлит, 2003
2. Купрадзе В.Д. О приближенном решении задач математической физики // Успехи математических наук, 22:2 (1967), 59--107.
3. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978.
4. Лежнев А.В., Лежнев В.Г. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009.
5. Vgomonlly A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems // J. Num. Anal. 22:4 (1985), 644-669.
6. Лежнев В.,Г. Выделение гармонической составляющей // Численный анализ: теория, приложения, программы: Сборник научных трудов, МГУ, 1999, 90-95.
7. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.:Наука, 1974.
8. Марковский А.Н. Замкнутость бигармонической системы базисных потенциалов // Экологич. вестн. науч. центр. Черноморского экономического сотрудничества. Т.~17. N.~1. Ч.~2. (2020), 20--26.
9. Кольцов П.,П. Оценка размытия изображения // Компьютерная оптика. 31:1 (2011), 95-102.
10. Асатрян Д.Г. Оценивание степени размытости изображения путём анализа градиентного поля // Компьютерная оптика. 41:6 (2017), 957-962.
11. Базаров С.Б. Применение методов обработки изображений в вычислительной газодинамике // Труды GraphiCon 98, Москва, 1998, 258-264.
12. Афендииков А.Л., Луцкий А.Е., Пленкин А.В. Применение вейвлет анализа для локализации структур в расчетах по идеальной и вязкой моделям и для адаптации сеток // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2012, 045, 24 стр.
13. Гайдель А.В., Крашенинников В.Р. Отбор признаков для задачи диагностики остеопороза по рентгеновским изображениям шейки бедра // Компьютерная оптика. 40:6 (2016), 939-946.
14. Василенко В.В., Сафронов А.П., Смыслов А.А., Цепляев Д.П., Марковский А.Н. Гармоническое сглаживание цифровых изображений // Экологич. вестн. науч. центр. Черноморского экономического сотрудничества. Т.~17. N.~1. Ч.~2. (2020), 8--15.