О геометрическом моделировании поверхностей скругления

А.А. Ладилова[1]
ladilova@ascon.ru
[1]С3Д Лабс, Коломна, Россия

Данная работа посвящена одной из самых сложных тем геометрического моделирования – построению поверхностей скругления. Многие мировые математические ядра используют специальный вид скругления -— full round fillet. Математический и алгоритмический аппарат этого типа скруглений не публиковался. Обсуждается реализация аналога такого скругления в C3D Kernel. Рассматривается общий подход к построению скругления трех граней.

Ключевые слова: *геометрическое моделирование, геометрическое ядро, моделирование поверхностей, скругление, скругление трех граней.*

On geometric modeling of fillet surfaces

A.A. Ladilova[1]
ladilova@ascon.ru
[1]C3D Labs, Kolomna, Russia

This paper is dedicated to one of the most complex parts of geometric modeling as constructing of fillet surfaces. The popular mathematic kernels use a special type fillets named full round fillet. Mathematic and algorithmic apparatus of these fillets were not published. The realisation of analogous fillets in C3D Kernel is discussed. The general way to construct full round fillet is considered.

Keywords: *geometric modeling, geometric kernel, surfaces modeling, fillet, full round fillet.*

1. Введение

Тема моделирования скруглений, наверное, всегда будет актуальной для разработчиков геометрических ядер. Как известно, во многих мировых CAD-системах уже давно используется специальный вид скругления – `full round fillet` ([1, 2]). Соответственно, было решено реализовать аналог такого скругления в `C3D Kernel`.Математический и алгоритмический аппарат этого типа скруглений в должной мере не опубликован, поэтому наш подход к этой проблеме может представлять интерес.

2. Скругление трех граней

В русскоязычной литературе мы не нашли устоявшегося названия для `full round fillet`, поэтому в нашей интерпретации используется термин `скругление трех граней`. Несколько слов о том, что это такое.

Пусть в некотором теле выделена одна из граней -– назовем ее центральной, а также две смежные с ней боковые грани. Боковые грани не должны соединяться с центральной гладким образом. См. рис. 1.

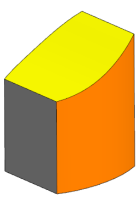

Рис. 1. Верхняя (желтая) грань – центральная, боковые – передняя (оранжевая) и противоположная ей задняя.

Под скруглением трех граней будем понимать грань, заменяющую центральную (рис. 2) и касающуюся каждой из трех граней (рис. 3).

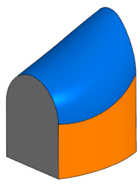

Рис. 2. Выполненное скругление трех граней.

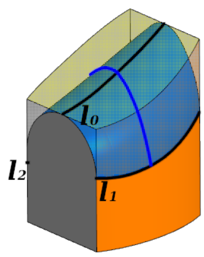

Рис. 3. Скругление касается каждой из трех граней по кривым l_0, l_1, l_2. Синей линией изображено поперечное сечение.

Данный вид скругления имеет в общем случае переменный радиус, который определяется автоматически.

3. Немного теории

Для построения искомой грани первоначально необходимо определить кривые, по которым скругление касается каждой из трех заданных граней. В общем случае эти кривые можно построить только как сплайны, проходящие через известные точки, рассчитанные заранее. Рассмотрим, как можно вычислить тройку точек – по одной на каждом сплайне.

Пусть боковые поверхности задаются радиус-векторами $r_1(u,v)$ и $r_2(z,w)$, а центральная – $r_0(x,y)$ в некоторой области изменения параметров. Введем также положительный числовой параметр d.

Обозначим через $n_0(x,y)$, $n_1(u,v)$, $n_2(z,w)$ единичные нормали к соответствующим поверхностям, направленные "внутрь" (рис. 4).

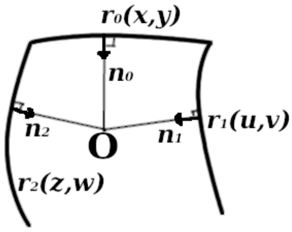

Рис. 4. Поперечное "сечение" при построении скругления.

Потребуем, чтобы концы этих нормалей, растянутых в d раз, попали в одну точку (точку O на рис. 4). Таким образом, мы имеем систему уравнений

$$\begin{cases} dn_0(x,y) = dn_1(u,v), \\ dn_0(x,y) = dn_2(z,w), \end{cases}$$

имеющую одну степень свободы.

Для однозначности потребуем, например, чтобы плоскость, проходящая через основания нормалей, содержала некоторую заранее фиксированную точку p_0. Таким образом, к системе добавится уравнение вида

$$(r_0(x,y) - p_0, r_1(u,v) - p_0, r_2(z,w) - p_0) = 0,$$

где (, ,) – оператор смешанного произведения векторов.

В результате мы получаем систему

$$\begin{cases} dn_0(x,y) = dn_1(u,v), \\ dn_0(x,y) = dn_2(z,w), \\ (r_0(x,y) - p_0, r_1(u,v) - p_0, r_2(z,w) - p_0) = 0, \end{cases}$$

из семи уравнений с семью неизвестными. Используя алгоритмы численных методов (например, метод Ньютона), мы находим решение этой системы: x_0, y_0, u_0, v_0, z_0, w_0, d_0. Это решение определяет точки касания с поверхностями: $r_0(x_0,y_0)$, $r_1(u_0,v_0)$, $r_2(z_0,w_0)$, а также радиус d_0.

Теперь остается построить сплайновую кривую, проходящую через точки $r_0(x_0,y_0)$, $r_1(u_0,v_0)$, $r_2(z_0,w_0)$ и ортогональную в этих точках векторам нормали $n_0(x_0,y_0)$, $n_1(u_0,v_0)$, $n_2(z_0,w_0)$ соответственно. Если слегка изменить постановку задачи и искать кривую по заданным точкам и касательным векторам в этих точках, то методы, которыми можно реализовать такой сплайн можно найти, например, в [3]. Указанная кривая будет являться поперечным плоским сечением поверхности скругления, проходящим через фиксированную точку p_0.

Пробегая некоторый набор значений p_0, мы получаем наборы троек точек, по которым можно восстановить "кривые касания" l_0, l_1, l_2 (см. рис. 3). Далее по этим кривым производится расчет нужного сечения скругления. Таким образом, задача полностью решаема.

4. Заключение

Выше был изложен общий подход к построению скругления трех граней. На практике же возникает ряд сопутствующих вопросов, касающихся выбора точек p_0, параметризации сплайновых кривых и т.д., которые в рамках данной работы не освещаются. Отдельной темой для исследования может стать обеспечение гладкой стыковки между поверхностями для более сложных форм (рис. 5).

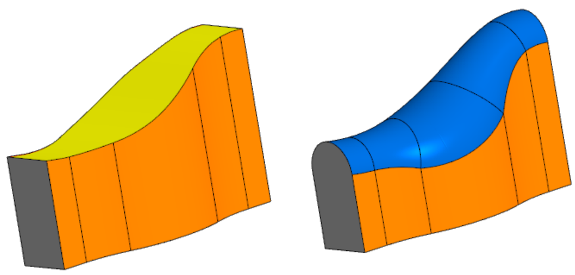

Рис. 5. Пример скругления сложной детали.

На данный момент эта проблема до конца не решена.

5. Литература

[1] Bethune J.D. Engineering design graphics with Autodesk Inventor 2015. // Boston: Pearson, 2015.

[2] Weber M. SolidWorks 2014 Black Book. // USA: CADCAMCAEWORKS, 2014.

[3] Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. // Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2016.

Об авторах

Ладилова Анна Александровна, к.ф.-м.н., старший математик-программист ООО "С3Д Лабс". Ее e-mail ladilova@ascon.ru.