Новая формула нахождения приближенного расстояния в задаче подбора неявных алгебраических многообразий

М.В. Гончарова[1], А.Ю. Утешев[1]
m.goncharova@spbu.ru|a.uteshev@spbu.ru
[1]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

В работе описано применение новой формулы нахождения приближенного расстояния от точки до алгебраического многообразия в геометрическом подходе к подбору кривых и реконструкции поверхностей с помощью неявных алгебраических многообразий. Приведен краткий обзор особенностей методов подбора неявных алгебраических многообразий. Для иллюстрации возможностей новой формулы нахождения приближенного расстояния приведены изоконтуры точного расстояния, расстояния Самсона и оригинальной формулы. Предложен четырехшаговый алгоритм подбора неявных алгебраических многообразий, использующий один из алгебраических методов подбора на начальном шаге, оригинальную формулу нахождения расстояния для вычисления геометрического критерия качества приближения и оптимизационный метод для обновления значения вектора коэффициентов подбираемого многообразия. Кратко охарактеризованы первые результаты работы преложенного алгоритма на тестовых данных. В заключении описаны требующие решения задачи и направления для продолжения исследований.

Ключевые слова: *расстояние, приближенное расстояние, неявные алгебраические многообразия, подбор кривых и поверхностей.*

On a New Distance Approximation for an Implicit Polynomial Manifold Fitting

Marina V. Goncharova[1], Alexei Yu. Uteshev[1]
m.goncharova@spbu.ru|a.uteshev@spbu.ru
[1]Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

The application of a new approximate point-to-algebraic manifold distance formula is suggested to the geometric approach to curve fitting and surface reconstruction using implicit polynomial manifolds. A brief overview of the fitting methods features for implicit algebraic manifolds is given. To illustrate the possibilities of a new approximate point-to-manifold distance formula, the equidistant curves of the exact distance, Samson's distance and the present formula are given. A four-step algorithm for implicit algebraic manifold fitting is proposed, using one of the algebraic fitting methods at the initial step, the present approximate formula for the distance finding to calculate the geometric criterion of approximation quality and an optimization method for updating the value of the vector of coefficients of the manifold. The first results of the proposed algorithm on test data are briefly characterized. In conclusion, the tasks and directions for further research are described.

Keywords: *distance, distance approximation, implicit polynomial manifold, curve and surface fitting.*

1. Введение

Задачи подбора кривых и реконструкции поверхностей занимают особое место в исследованиях в областях компьютерной графики, моделирования и компьютерного зрения. Для построения моделей приходится иметь дело с наборами данных, полученных со сканирующих в 2D или в 3D устройств, фото и видео аппаратуры. Часто исходные данные для моделирования представлены в виде конечного множества точек, и улучшение методов подбора кривой или поверхности, наилучшим образом описывающей это множество, не теряет актуальности, несмотря на значительное количество исследований в этой области (например, [1, 2, 6]).

Одним из удобных, компактных способов представления кривой или поверхности являются неявные алгебраические уравнения. Такой способ представления обладает рядом преимуществ над альтернативами (сетками, $B-$сплайнами и др.), поскольку не требует параметризации и предварительной информации о распределении точек в заданном множестве. Подбору неявных алгебраических многообразий, наилучшим образом приближающих заданное множество точек, посвящен ряд исследований (например, [4, 7, 8]). Вкладом настоящей работы можно считать первое применение оригинальной формулы нахождения приближенного расстояния от точки до алгебраического многообразия [15] в рамках существующего геометрического подхода к подбору неявных алгебраических многообразий. Улучшение алгоритмов определения оптимальной степени многообразия, модификация известных методов подбора или создание новых методов являются предметом дальнейших исследований и в данной работе не рассматриваются.

2. Неявные алгебраические многообразия и методы подбора

Пусть задано некоторое множество точек

$$P = \{p_i\},\ p_i \in \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1,N},\ n \in \{2,3\}. \qquad (1)$$

Требуется получить аппроксимирующее представление этого множества точек в виде неявной кривой или поверхности, которые можно задать в виде множества нулей некоторой полиномиальной функции $f(\mathbf{x})$. В трехмерном случае для поверхностей искомое неявное алгебраическое многообразие степени ℓ может быть записано в векторном виде

$$f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}(\mathbf{x})^T \mathbf{a},$$

где $\mathbf{x} = (x, y, z)$,

$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = (1, x, y, z, x^2, \ldots, z^\ell)^T$ – вектор мономов; в дальнейшем процессе подбора компоненты этого вектора зависят только от координат точек из заданного множества (1),

$\mathbf{a} = (a_{000}, a_{100}, a_{010}, a_{001}, a_{200}, \ldots, a_{00\ell})^T$ – вектор коэффициентов алгебраического многообразия; основной задачей процесса подбора является нахождение вектора $\mathbf{a}_\star$, наилучшим образом описывающего заданное множество (1).

Далее следует определить критерий качества подбора для определения меры близости множества

$$Z_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f(\mathbf{x}) = 0\}$$

к заданному множеству (1) (то есть, зафиксировать, что мы понимаем под словами "описывает наилучшим образом")

$$Distance(P, Z_f)$$

и, минимизируя значение этого критерия, найти вектор коэффициентов $\mathbf{a}_\star$.

Существующие методы подбора можно разделить на алгебраические и геометрические; считается, что преимуществом первых является точность подбора, вторых – скорость работы. Алгебраические методы в качестве минимизируемого критерия качества используют так называемое алгебраическое расстояние

$$Distance(P, Z_f) = \sum_{i=1}^{N} f_{\mathbf{a}}^2(p_i).$$

Широко известным и часто применяемым алгебраическим методом подбора является $3L$-алгоритм [3].

В геометрических методах подбора минимизируемый критерий записывают, используя расстояние от точки до поверхности

$$Distance(P, Z_f) = \sum_{i=1}^{N} d^2(p_i, q_i),$$

где q_i – точка на поверхности $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$, ближайшая к точке p_i.

Для записи минимизируемого критерия необходимо иметь некоторое начальное многообразие $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$, поэтому первое значение вектора $\mathbf{a}$ обычно получают применением одного из алгебраических методов. Далее процесс подбора состоит из двух шагов – определения ближайших точек на поверхности, а затем улучшения значения вектора $\mathbf{a}$ коэффициентов многообразия.

Нахождение расстояния от точки до кривой или поверхности можно проводить в двух разных идеологиях – решать нелинейные системы, определяя ортогональные проекции точек на рассматриваемое многообразие (например, [1]), или использовать различные приближения расстояния (например, [8, 10]). Далее для нахождения следующего значения вектора $\mathbf{a}$ могут быть использованы различные оптимизационные методы, в частности, алгоритм Левенберга – Марквардта (Levenberg –Marquardt Algorithm, LMA) [5].

Остается открытым вопрос выбора степени ℓ неявного алгебраического многообразия. Часто это значение предопределено характером множества (1). На практике чаще используют четные значения ℓ, и этот факт имеет простое объяснение [12] – многообразия нечетных степеней задают неограниченные множества, а исходные наборы данных всегда конечны. Наиболее используемыми являются значения ℓ от 2 до 10 в силу того, что большие значения степени требуют определения значительного количества коэффициентов (например, для $\ell = 14$ в 2D неявное алгебраическое многообразие имеет 120 неизвестных коэффициентов, а в 3D – 680). Однако, существуют методы автоматического подбора наилучшего значения ℓ, например, [7].

3. Нахождение приближенного расстояния от точки до алгебраического многообразия

Получение простых в применении формул и надежных для широкого класса задач и эффективных с точки зрения потребляемых вычислительных ресурсов алгоритмов нахождения приближенного расстояния является востребованной задачей несмотря на возрастающие возможности использования вычислительной техники и развитие технологий распределенных и параллельных вычислений. Одной из актуальных подзадач в множестве задач подбора наилучших аппроксимирующих кривых и поверхностей является подбор эллипсов (ellipse fitting problem). В работе [16] был предложен точный метод определения расстояния между объектами как наименьшего положительного корня так называемого уравнения расстояния (distance equation). В частности, этот метод подходит для задачи определения расстояния от точки до эллипса в $\mathbb{R}^2$ или эллипсоида в $\mathbb{R}^3$. Преимуществом такого подхода является то, что точное значение расстояния можно определить, не находя ближайшую точку на поверхности. Однако, метод имеет и недостатки – препятствием для практического использования оказывается неявное представление найденного расстояния, а также необходимость проведения затратных символьных вычислений (нахождение дискриминанта полинома). В работе [14] удалось найти явное, аналитическое представление для приближенного значения расстояния от точки до эллипса или эллипсоида, используя разложение корня уравнения расстояния в степенной ряд. В статье представлены детальные объяснения и полные доказательства, определены области, в которых найденные формулы неприменимы, а также описаны границы погрешности формул.

Применение предложенного подхода не ограничивается только квадриками, в работе [13] сформулирован метод построения уравнения расстояния для алгебраических многообразий, а в работе [15] представлена новая явная формула нахождения приближенного расстояния от точки до алгебраического многообразия, применение которой к задаче подбора неявных алгебраических многообразий и является новшеством настоящего исследования.

Основной идеей нелинейных геометрических методов подбора неявных алгебраических многообразий является использование расстояния Самсона (Sampson's distance) [9] в качестве приближения первого порядка для точного значения расстояния от точки до кривой или поверхности [10, 11]:

$$Distance(\mathbf{x}, Z_f) \approx \frac{|f(\mathbf{x})|}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}. \qquad (2)$$

Существуют обобщения такого метода определения критерия качества подбора (например, [7, 8]), однако, новая формула [15] по сути не просто обобщение расстояния Самсона, а приближение для точного значения расстояния более высокого порядка:

$$Distance(\mathbf{x}, Z_f) \approx \qquad (3)$$
$$\frac{|f(\mathbf{x})|}{||\nabla f(\mathbf{x})||} \cdot \left(1 + \frac{\nabla f^T(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{H}(f(\mathbf{x})) \cdot \nabla f(\mathbf{x})}{2\|\nabla f(\mathbf{x})\|^4} f(\mathbf{x})\right),$$

здесь $f(\mathbf{x})$ – дважды дифференцируемая вещественная функция,

$\nabla f(\mathbf{x})$ – градиент,

$\mathcal{H}(f(\mathbf{x}))$ – матрица Гессе функции $f(\mathbf{x})$.

Заметим, что формула (3) позволяет находить расстояния от точки $\mathbf{x}$ не только до алгебраических многообразий, но и до неалгебраических кривых и поверхностей, хотя в этом случае мы не можем построить соответствующее уравнение расстояния.

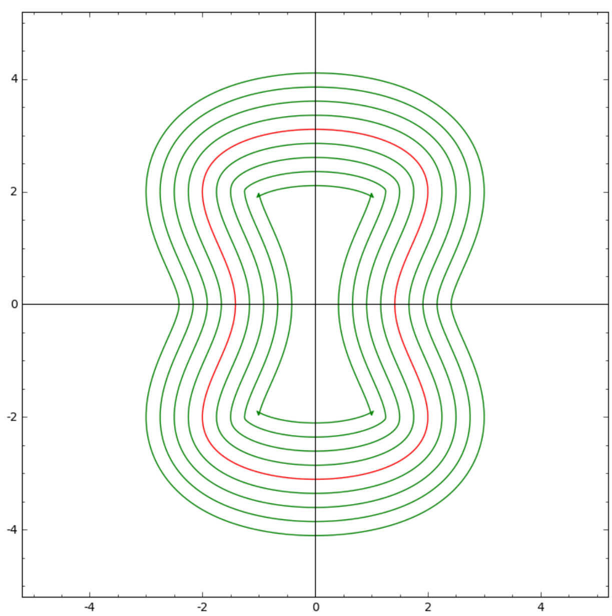

Рис. 1. Точное расстояние.

Для иллюстрации возможностей формулы (3) на рис. 1–3 приведены изоконтуры (кривые, находящиеся на фиксированном расстоянии от исходной кривой) множества $\{(x, y) : 8x^2 + (y^2 - 4)^2 - 32 = 0\}$, взятого из работы [8]. В каждом случае для сравнения представлены изоконтуры на удалении 1/4, 1/2, 3/4 и 1 от исходного множества, изображенного на каждом рисунке красным. На рис. 4 представлено наложение изоконтуров точного расстояния, приближенного расстояния Самсона (2) и приближенного расстояния по формуле (3) на удалении 1 от исходного множества. Нестабильность изоконтуров при удалении от границы множества на рисунке 3 предположительно возникает по причине наличия особой точки внутри замкнутой кривой.

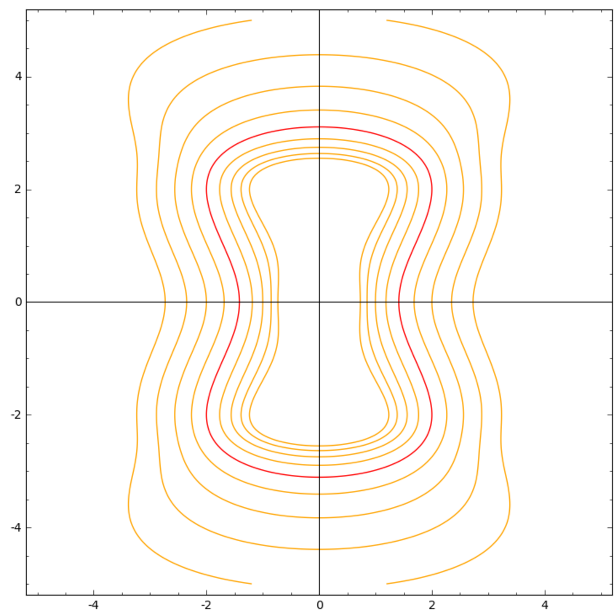

Рис. 2. Приближенное расстояние Самсона (2).

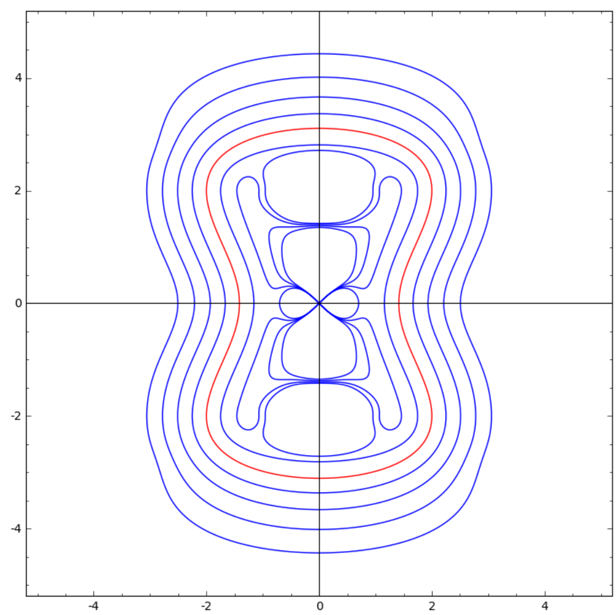

Рис. 3. Приближенное расстояние по формуле (3).

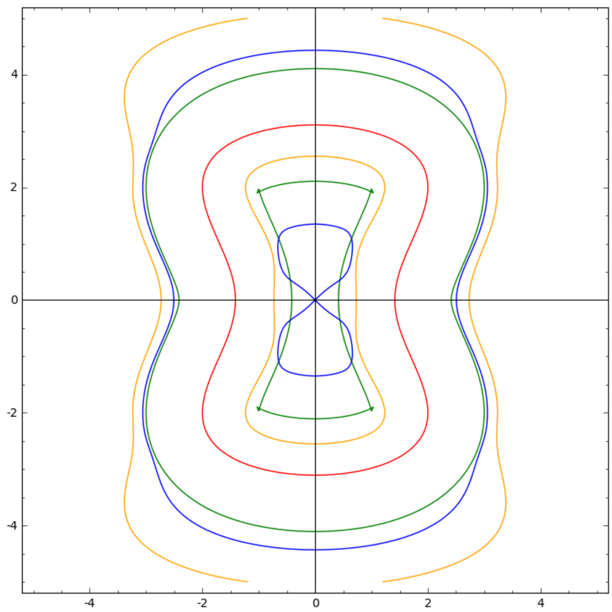

Рис. 4. Наложение изоконтуров с расстоянием 1.

4. Применение формулы нахождения приближенного расстояния в задаче подбора неявных алгебраических многообразий

Подбор неявных алгебраических многообразий для аппроксимации множества (1) с помощью формулы (3) нахождения приближенного расстояния был осуществлен по следующей схеме:

1. Формируем начальное значение вектора $\mathbf{a}$, применяя $3L$-алгоритм.
2. Находим расстояния от точек множества (1) до текущего неявного алгебраического многообразия $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$, используя формулу (3).
3. Вычисляем значение критерия качества $Distance(P, Z_f)$ как сумму квадратов расстояний, найденных на предыдущем шаге.
4. Если не достигнуты желаемая точность подбора и предельное число итераций, обновляем значение вектора $\mathbf{a}$, используя метод LMA, и возвращаемся к шагу 2.

В качестве первых тестовых данных были взяты несколько 3D наборов из базы AIM@SHAPE. Для примера на рисунке 5 приведено построенное алгебраическое многообразие 6 степени для набора точек Knot.mat. Текущая накопленная информация о результатах подбора не позволяет сделать заявление об однозначном преимуществе использования новой формулы для всех рассмотренных множеств, однако можно с уверенностью говорить о том, что для большого количества точек в наборе, а именно, более 1000, подбор с использованием новой формулы (3) дает хороший результат, и минимизируемое значение суммы квадратов расстояний от точек заданного множества до построенной поверхности часто оказывается наименьшим среди рассмотренных методов подбора. Для небольших наборов точек предложенный метод ожидаемо проигрывает по минимизируемому критерию суммы расстояний методам алгебраического подбора. Сравнение скорости работы методов для достижения сопоставимой точности приближения является одной из будущих задач.

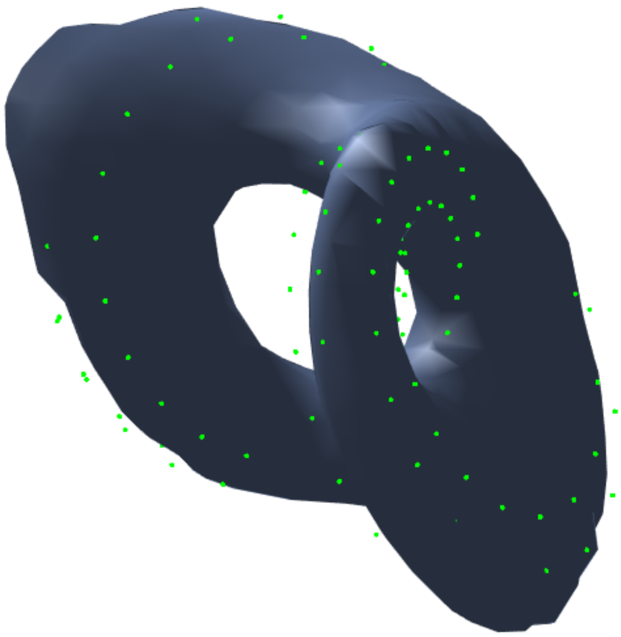

Рис. 5. Пример построенного алгебраического многообразия.

5. Заключение

В работе представлено краткое описание процесса подбора неявных алгебраических многообразий для представления точечного множества данных в виде кривых или поверхностей. Приведена явная формула нахождения приближенного расстояния от точки до алгебраического многообразия, даны графические иллюстрации в виде изоконтуров. Описан метод применения формулы (3) в задаче подбора неявных алгебраических многообразий, охарактеризованы первые полученные практические результаты.

Предметом дальнейшего исследования является сравнение по ряду критериев качества подбора с применением новой формулы с другими известными методами и выработка рекомендаций по использованию новой формулы, например, при наличии дополнительной информации о структуре заданного множества данных. Представление аппроксимируемого множества в виде неявного алгебраического многообразия позволяет легко определять положение точек исходного множества (1) относительно границы поверхности $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$ ("вовне" или "внутри"). Сравнение рис. 2 и рис. 3 наталкивает на идею использования обеих формул (2) и (3) на втором шаге предложенного в п. 4 подхода к подбору алгебраического многообразия, в зависимости от места нахождения точек множества (1), что несомненно позволит использовать сильные стороны обеих формул нахождения приближенного расстояния и в общем итоге приведет к улучшению качества подбора неявных алгебраических многообразий.

6. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-31-00413.

7. Литература

[1] S. Ahn, W.Rauh, H. Cho, and H. Warnecke, Orthogonal Distance Fitting of Implicit Curves and Surfaces. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 24, no. 5, pp. 620–638, 2002.

[2] M. Aigner and B. Jutler, Gauss–Newton–type Technique for Robustly Fitting Implicit Defined Curves and Surfaces to Unorganized Data Points. *Proc. IEEE Int. Conf. Shape Model. Appl.*, New York, pp. 121–130, 2009.

[3] M. Blane, Z. Lei, H. Civil, and D. Cooper, The $3L$ Algorithm for Fitting Implicit Polynomials Curves and Surface to Data. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 22, no. 3, pp. 298–313, 2000.

[4] S.-W. Cheng and M.-K. Chiu, Implicit Manifold Reconstruction. *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 161–173, 2014.

[5] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, 2nd ed. New York: Wiley, 1990.

[6] A. Gomes, I. Voiculescu, J. Jorge, B. Wyvill, and C. Galbraith, *Implicit Curves and Surfaces: Mathematics, Data Structures and Algorithms*. 1st ed. Springer-Verlag London, 2009.

[7] R. Interian, J. Otero, C. Ribeiro, and A. Montenegro, Curve and Surface Fitting by Implicit Polynomials: Optimum Degree Finding and Heuristic Refinement. *Comp. Graph.*, vol. 67, pp. 14–23, 2017.

[8] M. Rouhani and A. Sappa, Implicit Polynomial Representation Through a Fast Fitting Error Estimation. *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 21, pp. 2089–2098, 2011.

[9] P. Sampson, Fitting Conic Sections to Very Scattered Data: an Iterative Refinement of the Bookstein Algorithm. *Comput. Gr. Image Process.*, vol. 18, pp. 97–108, 1982.

[10] G. Taubin, Estimation of Planar Curves, Surfaces, and Nonplanar Space Curves Defined by Implicit Equations with Applications to Edge and Range Image Segmentation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 13, no. 11, pp. 1115–1138, 2002.

[11] G. Taubin, Distance Approximations for Rasterizing Implicit Curves. *ACM Trans. Graph.*, vol. 13, no. 1, pp. 3-42, 1994.

[12] G. Taubin, F. Cukierman, S. Sullivan, J. Ponce, and D. Kreigman, Parameterized Families of Polynomials for Bounded Algebraic Curve and Surface Fitting. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 16, pp. 287–303, 1994.

[13] A. Uteshev and M. Goncharova, Metric Problems for Algebraic Manifolds: Analytical Approach. *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017 – Proceedings*, 7974027, 2017.

[14] A. Uteshev and M. Goncharova, Point-to-Ellipse and Point-to-Ellipsoid Distance Equation Analysis. *J.Comput. Appl. Math.*, vol. 328, pp. 232–251, 2018.

[15] A. Uteshev and M. Goncharova, Approximation of the Distance from a Point to an Algebraic Manifold. *Proceedings of the 8th International Conference on Pattern Recognition Applications and Methods – Vol. 1: ICPRAM*, pp. 715–720, 2019.

[16] A. Uteshev and M. Yashina, Metric Problems for Quadrics in Multidimensional Space. *J.Symbolic Computation*, vol. 68, no. 1, pp. 287–315, 2015.

Об авторах

Гончарова Марина Витальевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры управления медико-биологическими системами факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. E-mail: m.goncharova@spbu.ru.

Утешев Алексей Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор кафедры управления медико-биологическими системами факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. E-mail: a.uteshev@spbu.ru.