Аппроксимация геометрических объектов многомерного пространства с помощью дуг кривых, проходящих через наперёд заданные точки

Е.В. Конопацкий[1], С.И. Ротков[2]
e.v.konopatskiy@mail.ru, rotkov@nngasu.ru
[1]ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»,
г. Макеевка, Донецкая Народная Республика
[2]ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»,
г. Нижний Новгород, Россия

В работе изложены основные идеи аппроксимации геометрических объектов многомерного пространства с помощью дуг алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки, которая заключается в следующем. Формируется специальная сеть точек, размерностью на единицу меньше размерности пространства, в котором располагается моделируемый геометрический объект. Учитывая особые свойства дуг алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки, устанавливается линейная зависимость между параметрами геометрического объекта и факторами влияния, соответствующими осям глобальной системы координат. Далее в узлах сети вычисляются такие значения функции отклика, которые обеспечивают минимальное значение квадратичной функции невязки. Предложенный способ позволяет выполнить обобщение метода наименьших квадратов в сторону увеличения размерности пространства и, соответственно, количества исследуемых факторов, влияющих на функцию отклика, что особенно важно для моделирования и оптимизации многофакторных процессов и явлений.

Ключевые слова: *аппроксимация, геометрический объект, многомерное пространство, дуга алгебраической кривой, отсек поверхности отклика, гиперповерхность отклика.*

Approximation the geometric objects of multidimensional space using arcs of curves passing through the given points

E.V. Konopatskiy[1], S.I. Rotkov[2]
e.v.konopatskiy@mail.ru, rotkov@nngasu.ru
[1]Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Donetsk People's Republic
[2]Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russia

The paper presents the basic ideas of geometric objects approximation in multidimensional space by means the arcs of algebraic curves passing through given points, which is as follows. A special network of points with a dimension one less than the dimension of the space in which the simulated geometric object is located is formed. Taking into account the special properties the arcs of algebraic curves passing through the given points, a linear relationship between the parameters of the geometric object and the influence factors corresponding to the axes of the global coordinate system is established. Next, the nodes of the network are calculated such values of the response function, which provide the minimum value of the quadratic residual function. The proposed method allows to perform the generalization the method of least squares in the direction of increasing space dimension and, consequently, the number of investigated factors affecting the response function, which is especially important for modeling and optimization of multifactorial processes and phenomena.

Keywords: *approximation, geometric objects, multidimensional space, an arc of an algebraic curve, compartment the response surface, the response hypersurface.*

1. Введение

Многомерная аппроксимация наряду с многомерной интерполяцией является одним из основных инструментов моделирования и оптимизации многофакторных процессов и явлений живой и неживой природы, техники, технологии, экономики, строительства и т.д. Математически задача многомерной аппроксимации может быть представлена как аппроксимация функции многих переменных, которая входит в состав 23 проблем математики, поставленных в начале XX века Д. Гильбертом [5].

Учитывая практическую и теоретическую важность задачи многомерной аппроксимации, существует достаточно много подходов к её решению как классических, так и инновационных. Например, в работе [2] для решения задач многомерной интерполяции и аппроксимации используется теория случайных функций. В работе [3] разработан структурно-ориентированный метод многомерной аппроксимации. Однако, в большинстве случаев основой для многомерной аппроксимации служит метод наименьших квадратов (МНК) [4].

Основная идея МНК заключается в минимизации суммы квадратов отклонений расчётных значений от исходных, соответствующих экспериментально-статистической информации. Эта идея получила несколько различных обобщений [7, 8, 12]. В работе [8] рассматриваются обобщения МНК в виде средней квадратической коллокации и фильтрации Калмана. В работе [7] основой обобщения МНК служит принцип максимального правдоподобия, для реализации которого используется распределение величин по нормальному закону. Кроме того в работе [12] предлагается обобщение МНК путём замены переменных, соответствующих исследуемым факторам, на функции от этих переменных. Анализируя различные способы обобщения как МНК, так и многомерной аппроксимации, можно сделать вывод об отсутствии единого подхода, который мог бы наглядно продемонстрировать логическую последовательность обобщения, основанного на методах аналогии. Подобную преемственность можно получить, используя методы геометрического моделирования.

2. Аппроксимация дискретно заданных точек с помощью однопараметрического множества

Пусть задано m точек A_i с координатами (x_i, y_i), которые соответствуют исходной экспериментально-статистической информации. Необходимо аппроксимировать заданный ряд дискретных точек однопараметрическим множеством точек, т.е. некоторой линией. В качестве аппроксимирующей кривой используем дугу алгебраической кривой, проходящей через наперёд заданные точки [11]. За основу возьмём идею МНК. Исходя из этого, задача аппроксимации сводится к минимизации целевой функции, в качестве которой будет выступать сумма квадратов разности координат исходных точек y_i и расчётных точек $\hat{y}_i$ (принадлежащих моделируемой дуге кривой M) значения которых определяются при x_i (рис. 1).

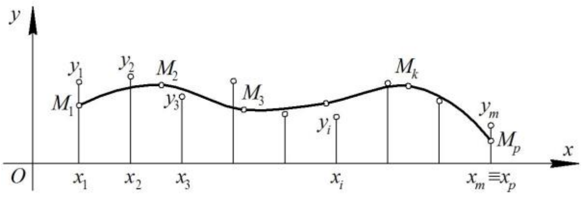

Рис. 1. К задаче аппроксимации однопараметрического множества дискретно заданных точек

Однако классический МНК разработан для функций, представленных в явном виде. При использовании дуг алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки, функция задаётся в параметрической форме. Поэтому сначала необходимо определить значения параметра исходя из расположения точек моделируемой кривой на оси Ox. Используя особые свойства дуг алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки [11], примем равномерное распределение значений x_k, что позволяет установить линейную зависимость между значениями проекции моделируемой дуги кривой на ось Ox и текущим параметром u. Используя инвариантные свойства простого отношения трёх точек прямой относительно параллельного проецирования, получим:

$$x = (x_m - x_1)u + x_1. \qquad (1)$$

Тогда для начальной точки дуги аппроксимирующей кривой M_1 (при $x_k = x_1$), значение параметра $u_1 = 0$, а для конечной точки M_p (при $x_k = x_p = x_m$) – $u_p = 1$. Далее в уравнении (1) производим замену переменных и определяем параметр u через переменную x:

$$u = \frac{x - x_1}{x_m - x_1}. \qquad (2)$$

После чего, как и в классическом МНК, необходимо определить такие значения координат y_k точек M_k, чтобы минимизировать сумму квадратов разницы соответствующих координат y_i и y_{M_i}:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - y_{M_i}\right)^2 \to \min. \qquad (3)$$

Для определения y_{M_i} необходимо в уравнение дуги аппроксимирующей кривой подставить значения $u_i = \dfrac{x_i - x_1}{x_m - x_1}$.

3. Пример аппроксимации дискретно заданных точек однопараметрическим множеством

Рассмотрим в качестве примера ряд случайных точек A_i, координаты которых приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Исходные данные для аппроксимации однопараметрическим множеством точек

x	0,1	0,8	1,69	2,12	2,74	3,52	4,13	4,68
y	3,4	3,95	4,6	4,3	4,75	4,3	4,45	4,26

Аппроксимируем исходный ряд точек с помощью дуги кривой 3-го порядка, проходящей через 4 наперёд заданные точки [11], точечное уравнение которой имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} M = {} & M_1\left(\bar{u}^3 - 2{,}5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2\right) + M_2\left(9\bar{u}^2u - 4{,}5\bar{u}u^2\right) + \\ & + M_3\left(-4{,}5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2\right) + M_4\left(\bar{u}^2u - 2{,}5\bar{u}u^2 + u^3\right), \end{aligned} \qquad (4)$$

где $\bar{u} = 1 - u$ – дополнение параметра до 1.

Выполнив покоординатный расчёт точечного уравнения (4), получим систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x_M = x_{M_1}\left(\bar{u}^3 - 2{,}5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2\right) + x_{M_2}\left(9\bar{u}^2u - 4{,}5\bar{u}u^2\right) + \\ \quad + x_{M_3}\left(-4{,}5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2\right) + x_{M_4}\left(\bar{u}^2u - 2{,}5\bar{u}u^2 + u^3\right); \\ y_M = y_{M_1}\left(\bar{u}^3 - 2{,}5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2\right) + y_{M_2}\left(9\bar{u}^2u - 4{,}5\bar{u}u^2\right) + \\ \quad + y_{M_3}\left(-4{,}5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2\right) + y_{M_4}\left(\bar{u}^2u - 2{,}5\bar{u}u^2 + u^3\right). \end{cases} \qquad (5)$$

Закладываем равномерное распределение искомых точек по оси Ox. Тогда система параметрических уравнений (5) примет следующий вид:

$$\begin{cases} x_M = 4{,}58u + 0{,}1; \\ y_M = y_{M_1}\left(\bar{u}^3 - 2{,}5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2\right) + y_{M_2}\left(9\bar{u}^2u - 4{,}5\bar{u}u^2\right) + \\ + y_{M_3}\left(-4{,}5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2\right) + y_{M_4}\left(\bar{u}^2u - 2{,}5\bar{u}u^2 + u^3\right). \end{cases} \qquad (6)$$

Используя выражение (2), получим уравнение дуги аппроксимирующей кривой в явном виде:

$$\begin{aligned} \hat{y} = y_M = {} & \left(-0{,}047x^3 + 0{,}443x^2 - 1{,}288x + 1{,}124\right)y_{M_1} + \\ & + \left(0{,}14x^3 - 1{,}115x^2 + 2{,}184x - 0{,}207\right)y_{M_2} + \\ & + \left(-0{,}14x^3 + 0{,}9x^2 - 1{,}158x + 0{,}107\right)y_{M_3} + \\ & + \left(0{,}047x^3 - 0{,}228x^2 + 0{,}263x - 0{,}024\right)y_{M_4}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Далее в соответствии с выражением (3) составляем систему из 4-х обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференцируя поочерёдно по искомым координатам точек y_{M_1}, y_{M_2}, y_{M_3} и y_{M_4}. Решив полученную систему дифференциальных уравнений, получим следующие значения: $y_{M_1} = 3{,}38$; $y_{M_2} = 4{,}42$; $y_{M_3} = 4{,}516$; $y_{M_4} = 4{,}276$.

После подстановки полученных значений в уравнение (7) получим искомое уравнение дуги аппроксимирующей кривой:

$$y = 0{,}028x^3 - 0{,}341x^2 + 1{,}19x + 3{,}265.$$

Для приведенного примера в результате аппроксимации удалось достигнуть коэффициента детерминации $R^2 = 0{,}872$. Следует отметить, что полученное уравнение полностью совпадает со своим аналогом, полученным с помощью классического МНК, что подтверждает достоверность полученных результатов. На первый взгляд, предложенный способ аппроксимации с помощью кривых, проходящих через наперёд заданные точки, может показаться более громоздким и неудобных, однако он позволяет выполнить обобщение в сторону увеличения размерности пространства и, соответственно, количества исследуемых факторов, влияющих на функцию отклика.

4. Аппроксимация дискретно заданных точек с помощью двухпараметрического множества

Рассмотрим поэтапное обобщение предложенного выше способа аппроксимации геометрических объектов на примере моделирования двухпараметрического множества точек, расположенных в трёхмерном пространстве.

Пусть задано множество $m \times n$ дискретно заданных точек $A_{i,j}$:

$$\begin{matrix} A_{1,n} & \cdots & A_{i,n} & \cdots & A_{m,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1,j} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{m,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1,1} & \cdots & A_{i,1} & \cdots & A_{m,1} \end{matrix} \qquad (8)$$

Требуется выполнить аппроксимацию множества точек $m \times n$ поверхностью, проходящей через наперёд заданные точки, способ аналитического описания которых и примеры построения приведены в работах [8-11].

Для аппроксимации множества точек $A_{i,j}$ необходимо от сети точек, представленного матрицей (8), перейти к новой регулярной сети точек $M_{k,l}$ с аналогичными границами. При этом количество искомых точек аппроксимирующей поверхности определяется порядком алгебраических кривых, из которых она была создана.

Далее необходимо установить линейную зависимость между координатами x , y и параметрами u , v .

$$u_{i,j} = \frac{x_{i,j} - x_{1,1}}{x_{m,1} - x_{1,1}}; \quad v_{i,j} = \frac{y_{i,j} - y_{1,1}}{y_{1,n} - y_{1,1}}. \qquad (9)$$

Выполнив покоординатный расчёт аппроксимирующей поверхности по оси Oz и подставив в него уравнения (9), получим искомое уравнение отсека поверхности в явном виде: $z_{M_{i,j}} = f\left(x_{i,j}, y_{i,j}\right)$.

Далее формируем целевую функцию, как сумму квадратов разности координат исходных точек $z_{i,j}$ и их аналогов, принадлежащих аппроксимируемой поверхности $z_{M_{i,j}}$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(z_{i,j} - z_{M_{i,j}}\right)^2 \to \min. \qquad (10)$$

Используя полученную целевую функцию (10), составляем и решаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференцируя поочерёдно по искомым координатам точек $z_{M_{k,l}}$. Далее остаётся только подставить полученные значения координат точек $z_{M_{k,l}}$ в исходное уравнение аппроксимирующей поверхности и проверить с помощью коэффициента детерминации насколько качественным получился результат моделирования.

5. Пример аппроксимации дискретно заданных точек двухпараметрическим множеством

В качестве примера рассмотрим задачу моделирования процесса распределения прочностных характеристик по всему объёму бетонной колонны [10]. В работе [9] приводится один из способов решения этой задачи на основе аппроксимации геометрических объектов многомерного аффинного пространства с помощью дуг алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки. Однако, предложенный в [9] способ аппроксимации предусматривает использование исходных точек в качестве узловых, по аналогии с моделями, представленными в работе [6]. Таким образом, достигаются достаточно высокие показатели точности аппроксимации, но не предусматривается методика выбора узловых точек из массива исходных данных, что затрудняет автоматизацию процесса моделирования многофакторных процессов и явлений.

На рис. 2 показана схема расположения ярусов бетонной колонны. Для 1 яруса характерны одинаковые значения функции отклика во всех точках: $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = f_1$, адресация которых представлена на рис. 3. Поэтому для примера выполним аппроксимацию значений функции отклика 2 яруса колонны, для которого: $a_2 = 129{,}4$; $b_2 = 125{,}3$; $c_2 = 124{,}4$; $d_2 = 103{,}6$; $e_2 = 103{,}2$; $f_2 = 101{,}8$.

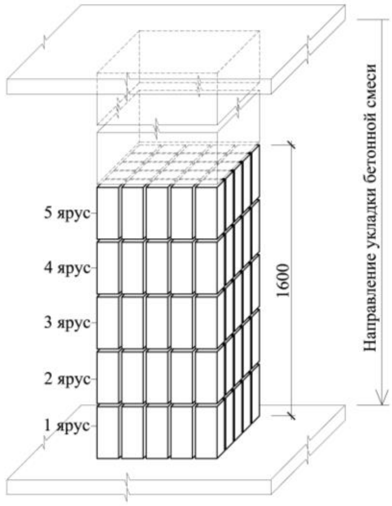

Рис. 2. Схема расположения вертикальных ярусов выпиленных образцов

f_i	e_i	d_i	e_i	f_i
e_i	c_i	b_i	c_i	e_i
d_i	b_i	a_i	b_i	d_i
e_i	c_i	b_i	c_i	e_i
f_i	e_i	d_i	e_i	f_i

Рис. 3. Схема расположения и адресации выпиленных образцов на плане

Исходя из этого, воспользуется для аппроксимации обобщением МНК, предложенным выше. Для получения более простых итоговых уравнений используем в качестве аппроксимирующей дугу кривой 2-го порядка, проходящую через 3 наперёд заданные точки. Тогда искомое точечное уравнение аппроксимирующей поверхности отклика будет иметь следующий вид:

$$M=\begin{bmatrix} M_{11}\bar{u}(1-2u)+4M_{12}u\bar{u}+ \\ +M_{13}u(2u-1) \end{bmatrix}\bar{v}(1-2v)+$$
$$+4\left[M_{21}\bar{u}(1-2u)+4M_{22}u\bar{u}+M_{23}u(2u-1)\right]v\bar{v}+ \quad (11)$$
$$+\left[M_{31}\bar{u}(1-2u)+4M_{32}u\bar{u}+M_{33}u(2u-1)\right]v(2v-1)$$

Переходя от точечного уравнения (11) к системе параметрических уравнений, с учётом регулярной сети точек моделируемого отсека поверхности, получим:

$$\begin{cases} x_M=0{,}32u; \\ y_M=0{,}32v; \\ z_M=\begin{bmatrix} z_{M_{11}}\bar{u}(1-2u)+4z_{M_{12}}u\bar{u}+ \\ +z_{M_{13}}u(2u-1) \end{bmatrix}\bar{v}(1-2v)+ \\ +4\left[z_{M_{21}}\bar{u}(1-2u)+4z_{M_{22}}u\bar{u}+z_{M_{23}}u(2u-1)\right]v\bar{v}+ \\ +\begin{bmatrix} z_{M_{31}}\bar{u}(1-2u)+4z_{M_{32}}u\bar{u}+ \\ +z_{M_{33}}u(2u-1) \end{bmatrix}v(2v-1) \end{cases} \quad (12)$$

После замены переменных, получим:

$$z_M=f\left(x_M,y_M,z_{M_{11}},z_{M_{12}},z_{M_{13}},z_{M_{21}},z_{M_{22}},z_{M_{23}},z_{M_{31}},z_{M_{32}},z_{M_{33}}\right).$$

Учитывая равномерное и симметричное распределение исходных данных, получим одинаковую сеть точек, как для исходных данных, так и для моделирования аппроксимирующей поверхности отклика. Вычислим значения $z_{M_{i,j}}$ из условия (10). При этом необходимо использовать значения параметров, найденные с помощью зависимостей (9). В результате, после подстановки в (12) с учётом округления до сотых, получим следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x=0{,}32u; \\ y=0{,}32v; \\ z=440{,}95uv(uv-u-v+1)+ \\ +9{,}11(-u^2-v^2+u+v)+101{,}85. \end{cases} \quad (13)$$

При этом достаточно легко перейти от системы параметрических уравнений (13) к уравнению аппроксимирующей поверхности в явном виде:

$$z=42051{,}98y^2x^2-13456{,}63y^2x-13456{,}63yx^2-$$
$$-88{,}97y^2-88{,}97x^2+4306{,}12yx+28{,}47y+ \quad (14)$$
$$+28{,}47x+101{,}85.$$

Для оценки полученной геометрической модели зависимости прочностных характеристик бетонной колонны воспользуемся коэффициентом детерминации, который в данном случае достиг значения $R^2=0{,}972$. Визуализация полученной аппроксимирующей поверхности отклика представлена для модуля упругости (рис. 4). Используя предложенный способ, можно получить аналогичные геометрические модели аппроксимирующей поверхности отклика для значений прочности бетона и предельной сжимаемости, используя исходные данные, приведенные в работе [10].

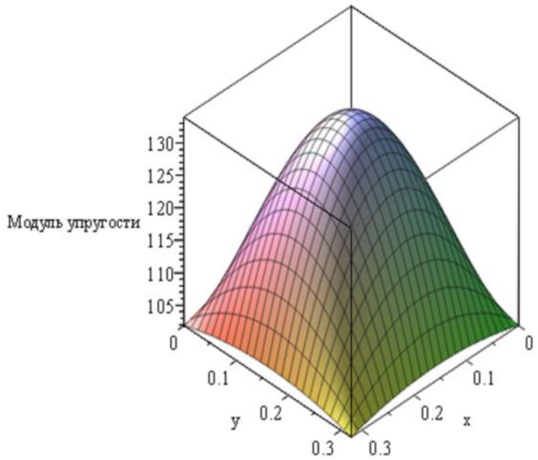

Рис. 4. Визуализация аппроксимирующей поверхности отклика

6. Метод аппроксимации геометрических объектов многомерного пространства на основе дискретного массива точек

Обобщая всё выше изложенное, получим метод аппроксимации геометрических объектов многомерного пространства, представленный в виде следующего вычислительного алгоритма:

1. Выбираем для аппроксимации одну или несколько дуг алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки. При этом следует учесть, как наилучшим образом аппроксимировать заданное множество точек, чтобы получить наиболее качественную модель.
2. Формируем регулярную сеть точек для построения аппроксимирующей поверхности отклика. Размерность пространства для построения сети точек аппроксимирующего объекта будет на единицу меньше, чем размерность пространства, в котором будет находиться итоговый геометрический объект.
3. В соответствии с принятой аппроксимирующей сетью точек устанавливаем линейную зависимость между параметрами и факторами геометрической модели, которые соответствуют осям глобальной системы координат.
4. Составляем целевую функцию, представляющую собой сумму квадратов длин отрезков между исходными точками и их аналогами, принадлежащими аппроксимирующему геометрическому объекту.
5. Минимизируем целевую функцию. Для этого составляем и решаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, количество которых соответствует количеству узловых точек сети аппроксимирующего геометрического объекта.
6. Проверяем результат моделирования путём определения коэффициента детерминации. В случае неудовлетворительного результата повторяем алгоритм с самого начала, выбирая при этом для формирования аппроксимирующего геометрического объекта дуги алгебраических кривых, проходящие через наперёд заданные точки, более высокого порядка, что автоматически ведёт к загущению аппроксимирующей сети точек.

Следует отметить, что в некоторых случаях рациональным является не увеличение порядка дуг алгебраических кривых, используемых для аппроксимации геометрических объектов, а использование кусочно-полиномиальных функций. Например, обводов необходимого порядка гладкости [1].

7. Пример аппроксимации дискретно заданных точек трёхпараметрическим множеством

В качестве примера использования приведенной методики обобщим решение задачи аппроксимации исходных экспериментальных данных, полученных при испытании на прочность бетонной колонны. На рисунке 2 показано, что колонна состоит из пяти слоёв. В каждом слое по 25 прямоугольных призм. Таким образом, необходимо аппроксимировать экспериментальные данные состоящие из 125 исходных точек. Учитывая высокие показатели коэффициента детерминации для 2-го слоя бетонной колонны, приведенные выше, используем в качестве аппроксимирующей дугу кривой 2-го порядка, проходящую через 3 наперёд заданные точки. Тогда количество аппроксимирующих точек должно равняться 27 (всего получается 3 слоя, по 9 точек в каждом).

В результате применения предложенной методики получим следующее уравнение аппроксимирующей гиперповерхности:

$$\frac{E_b^{э}}{E_b} = -55781,61z^2x^2y^2 + 77083,58x^2y^2z + 17850,11z^2x^2y + 17850,11z^2xy^2 -$$
$$-24666,74x^2yz - 24666,74xy^2z - 5712,04z^2xy + 7230,26x^2y^2 +$$
$$+302,42z^2x^2 + 302,42z^2y^2 - 747,66x^2z - 96,77z^2x - 96,77z^2y - 747,66y^2z$$
$$-2313,68x^2y - 2313,68xy^2 + 7893,35xyz + 37,23x^2 + 37,23y^2 + 37,36z^2$$
$$+740,38xy + 239,25xz + 239,25yz - 11,91x - 11,91y - 71,21z + 122,67,$$

где $\frac{E_b^{э}}{E_b}$ – соотношение модуля упругости бетона отнесённое к модулю упругости стандартного образца [10].

В данном случае был достигнут коэффициент детерминации $R^2 = 0,964$, что немного выше, чем в случае с субъективным выбором узловых точек для аппроксимации гиперповерхности отклика, приведенным в работе [9].

8. Заключение

В работе предложен метод аппроксимации геометрических объектов многомерного пространства на основе дискретного массива точек, которая показана на примере моделирования одно-, двух- и трёхпараметрического множеств точек, представляющих соответственно линию, поверхность и гиперповерхность отклика. Как видно из приведенных примеров, МНК легко обобщается в сторону увеличения размерности пространства, что может иметь большое теоретическое и практическое значение для моделирования и оптимизации многофакторных процессов и явлений. При этом МНК обретает четкий геометрический смысл: независимо от размерности аппроксимирующего геометрического объекта, задача сводится к минимизации квадрата расстояния между заданными точками и их аналогами на аппроксимирующем геометрическом объекте. Правда в данном случае речь идёт об особом расстоянии между точками, которое представляет превышение исходных точек над функцией отклика. Это частный случай. Исходя из этого, можно предложить другое обобщение МНК, которое может эффективно использоваться для определения метрических характеристик взаимного положения геометрических объектов вне зависимости от размерности пространства, в котором эти объекты располагаются. Например, расстояния между скрещивающимися прямыми.

9. Литература

[1] Балюба, И.Г. Конструирование дуг обвода из кривых одного отношения [Текст] / Балюба И.Г., Конопацкий Е.В. // Труды 27-й Международной конференция по компьютерной графике и машинному зрению «GraphiCon 2017». – Пермь: ПГНИУ, 2017. – С.332-334.

[2] Бахвалов, Ю.Н. Метод многомерной интерполяции и аппроксимации и его приложения [Текст] / Ю.Н. Бахвалов. – М.: Спутник+, 2007. – 108 с.

[3] Беляев, М.Г. Аппроксимация многомерных зависимостей по структурированным выборкам [Текст] / М.Г. Беляев. – Искусственный интеллект и принятие решений, 2013. – № 3. – С. 24-39.

[4] Блинов, А.О. Многомерная аппроксимация в задачах моделирования и оптимизации [Текст] / А.О. Блинов, В.П. Фраленко. Автомат. и телемех., 2009. – № 4. – С.98-109.

[5] Бутырский, Е.Ю. Аппроксимация многомерных функций [Текст] / Е.Ю. Бутырский, И.А. Кувалдин, В.П. Чалкин. – Научное приборостроение, 2010. – Т. 20. – № 2. – С. 82-92.

[6] Вертинская, Н.Д. Теория нелинейных многомерных моноидальных поверхностей и её приложения: автореф. дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01. Н.Д. Вертинская – Иркутск, 2006. – 31 с.

[7] Гольцов, Н.А. Обобщение метода наименьших квадратов на основе принципа максимального правдоподобия [Текст] / Н.А. Гольцов. – Вестник МГУЛ – Лесной вестник, 2001. – №5. – С.202-204.

[8] Губанов, В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии [Текст] / В.С. Губанов. – СПб.: Наука, 1997. – 318 с.

[9] Конопацкий, Е.В. Аппроксимация геометрических объектов с помощью дуг кривых, проходящих через наперёд заданные точки [Текст] / Е.В. Конопацкий // Информационные технологии. – М.: 2019. – № 1. – Т. 25 – С. 46-52. – DOI: 10.17587/it.25.46-51.

[10] Конопацкий, Е.В. Геометрическая модель процесса распределения прочностных характеристик в бетонной колонне [Текст] / Е.В. Конопацкий, О.С. Воронова. – Прикладная математика и вопросы управления. – Пермь: ПНИПУ, 2017. – №1. – С.37-44.

[11] Конопацкий, Е.В. Моделирование дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки [Текст] / Е.В. Конопацкий // Вестник компьютерных и информационных технологий. – М.: 2019. – № 2. – С. 30-36. – DOI: 10.14489/vkit.2019.02.pp.030-036.

[12] Мустафина, Д.А. Обобщенная многомерная интерполяция методом наименьших квадратов [Текст] / Д.А. Мустафина, А.Е. Буракова, А.И. Мустафин, А.С. Александрова. – Вестник ПНИПУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – Пермь: ПНИПУ, 2018. – №27. – С.30-48.

Об авторах

Конопацкий Евгений Викторович, к.т.н., доцент кафедры специализированных информационных технологий и систем, строительного факультета Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. E-mail: e.v.konopatskiy@mail.ru.

Ротков Сергей Игоревич, д.т.н., проф., зав. кафедрой инженерной геометрии, компьютерной графики и автоматизированного проектирования Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: rotkov@nngasu.ru.