

Исследование конических сечений в среде AutoCAD

В.В. Карабчевский¹
karabchevski@mail.ru
¹ДонНТУ, Донецк, ДНР

Рассматривается применение инструментов твердотельного моделирования при создании трехмерных моделей прямого кругового конуса и при исследовании его сечений в среде AutoCAD. Представлены результаты, которые AutoCAD позволяет получить для сечения плоскостями, почти параллельными одной или двум образующим. Найдены граничные значения углов между плоскостью и образующими, определяющие наличие или отсутствие параллельности. Предложены способы получения параметров канонических уравнений кривых, представляющих конические сечения, для случаев, когда соответствующая кривая (гипербола или парабола) моделируется в среде AutoCAD с помощью сплайнов. Описано применение предложенных методов в учебном процессе, позволяющее усилить связь излагаемого при изучении разделов начертательной геометрии материала с освоением способов генерации трехмерных моделей, инструментарием твердотельного моделирования и аналитической геометрии.

Ключевые слова: компьютерная графика, твердотельное моделирование, сечение конуса, каноническое уравнение.

The research of conic sections in AutoCAD environment

V.V. Karabchevsky¹
karabchevski@mail.ru
¹DonNTU, Donetsk, DPR

The application of solid modelling tools is considered when creating three-dimensional models of a straight circular cone and when studying its sections in AutoCAD. The results are presented that AutoCAD allows obtaining for a section by planes almost parallel to one or two generators. The boundary values of the angles between the plane and the generators, which determine the presence or absence of parallelism, are found. Methods are proposed for obtaining the parameters of the canonical equations of curves representing conical sections for cases when the corresponding curve (hyperbola or parabola) is modelled in AutoCAD using splines. The application of the proposed methods in the educational process is described, which makes it possible to strengthen the relationship of what is stated in the study of sections of descriptive geometry of the material with the development of methods for generating three-dimensional models, solid-state modelling tools and analytical geometry.

Keywords: computer graphics, solid modelling, cone section, canonical equation.

1. Введение

Построение сечений поверхностей в среде AutoCAD облегчается в тех случаях, когда существует возможность представить их поверхностями твердых тел. Применение команды section позволяет получить регион, границей которого будут объекты, представляющие сечение, для их извлечения следует применить к региону команду explode [3]. Известно, что, в зависимости от положения секущей плоскости, сечение прямого кругового конуса может представлять собой две образующие, эллипс, гиперболу или параболу [1, 2].

2. Сечение прямого кругового конуса в среде AutoCAD

В случае, когда секущая плоскость проходит через вершину конуса, сечение представляет собой две образующие, результатом применения команд section и explode являются три отрезка – две образующие и линия пересечения секущей плоскости с основанием конуса. Если секущая плоскость пересекает все образующие и параллельна основанию, AutoCAD позволяет получить окружность (объект circle), которую можно рассматривать как эллипс с одинаковыми осями (рис. 1). Средства доступа к свойствам объектов позволяют получить геометрические характеристики отрезков и окружности.

На рис. 2 представлены сечения: плоскостью П1, которая пересекает все образующие и не параллельна основанию – в виде эллипса; плоскостью П2, параллельной образующей SC, – в виде сплайна, который моделирует параболу; плоскостью П3, параллельной двум образующим, SA и SB, – в виде сплайна, который моделирует гиперболу.

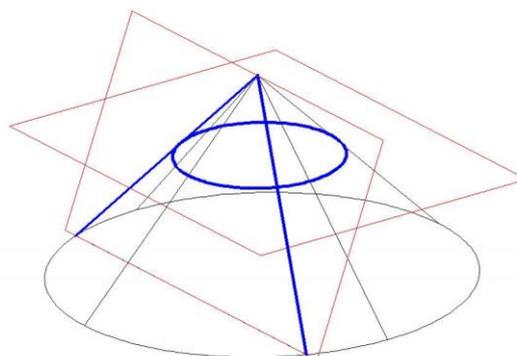


Рис. 1. Сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину и плоскостью, параллельной основанию

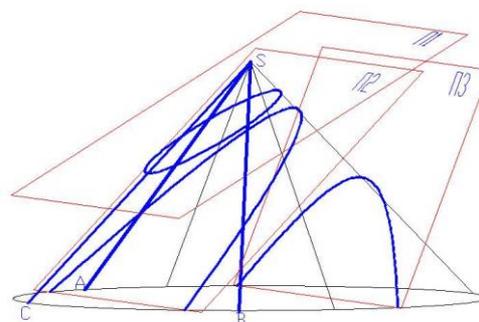


Рис. 2. Сечение конуса плоскостью, не параллельной основанию

При выполнении лабораторных заданий производится построение, соответствующее рисункам 3 и 4. Вначале

задача решается на комплексном чертеже, затем производится поворот одной из плоскостей вокруг оси абсцисс на 90 градусов. После этого генерируется объемная модель, создается твердотельный конус, сечение выполняется с применением команды section [3]. Результат сравнивается с эллипсом, полученным на эюре с применением команды ellipse, использующей концы осей. На рис. 3 он расположен на фронтальной плоскости. Площади и периметры эллипсов должны совпасть, это совпадение является критерием успешности выполнения задания.

Выполнение этого и подобных заданий позволяет студентам закрепить связь между представлением объектов на комплексном чертеже и трехмерным представлением.

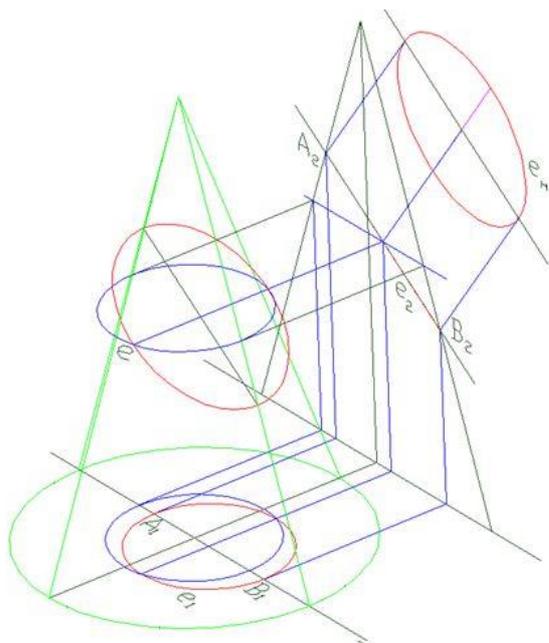


Рис. 3. Сечение на эюре и на поверхности конуса

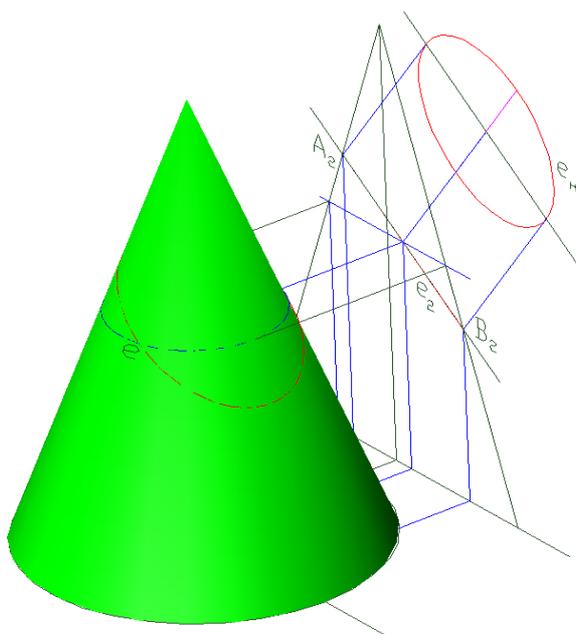


Рис. 4. Сечение на эюре и на поверхности конуса, реалистичный визуальный стиль

Результаты, которые AutoCAD позволяет получить для сечения плоскостями, почти параллельными одной или двум образующим, представляют некоторый интерес. На рис. 5 угол наклона образующей SC к плоскости П5 составляет 0.003 градуса, результат сечения – эллиптическая дуга. На рис. 6 угол наклона образующей SC к плоскости П5 составляет 0.002 градуса, результат сечения – сплайн, моделирующий параболу, хотя должна получиться эллиптическая дуга.

Отсутствие параллельности образующей SC и П5 проиллюстрировано на рисунках 5 и 6 продолжением SC и ее проекции на плоскость П5 до взаимного пересечения с помощью команды fillet. Точка пересечения находится далеко за пределами рисунка. Для рис. 5 длина SC после продолжения составляет 540302 единицы, для рис. 6 – 810397 единиц (высота конуса – 100 единиц). Визуально эллиптическую дугу и сплайн можно отличить, если кривые выбраны. Для эллиптической дуги, которая выбрана на рис. 5, ручки (grips) находятся на концах дуги и на конце оси эллипса, для сплайна, лежащего в плоскости П5, (рис. 6) – в контрольных точках.

Следует также обратить внимание на случай, когда секущая плоскость пересекает все образующие конической поверхности, но твердотельный конус, который ее задает, будет пересекаться через основание. Результатом применения команд section и explode будут эллиптическая дуга в плоскости П5 и отрезок, лежащий в основании конуса и соединяющий концы эллиптической дуги (рис. 5 и рис. 6).

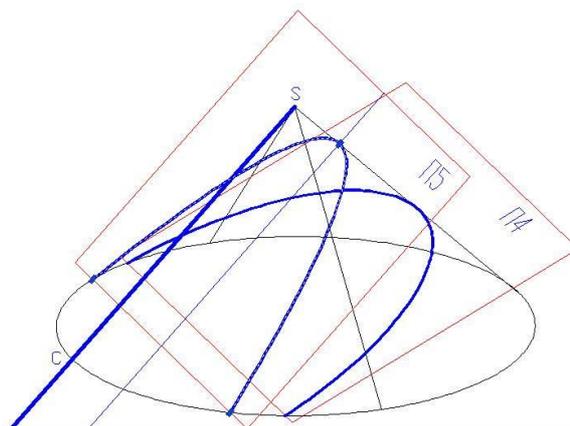


Рис. 5. Сечение в виде эллиптических дуг

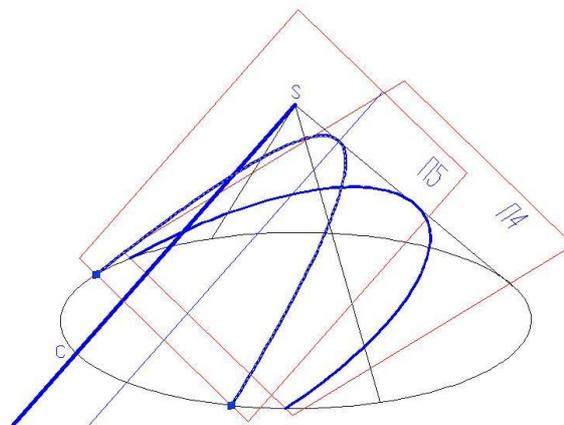


Рис. 6. Сечение в виде эллиптической дуги и сплайна

3. Определение параметров канонических уравнений конических сечений

Параметры канонического уравнения эллипса можно получить из базы данных AutoCAD. Парабола и гипербола смоделированы сплайнами с тремя узловыми точками – первая и последняя являются точками пересечения секущей плоскости с основанием конуса, средняя является вершиной сплайна. Переход к системе координат, горизонтальная плоскость которой лежит в плоскости соответствующей кривой, позволяет проиллюстрировать получение параметров канонического уравнения (рис. 7 и 9). Параметр p канонического уравнения (1) можем получить подстановкой в выражение (2) координат некоторой точки параболы, например T1 (рис. 7).

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x \quad (1).$$

$$p = \frac{y^2}{2 \cdot x} \quad (2).$$

Проверка подстановкой полученного значения p и координат точки T2 в (1) подтверждает правильность результата.

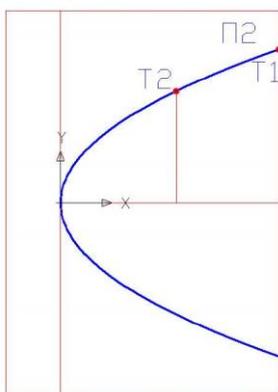


Рис. 7. К отысканию параметров канонического уравнения параболы

Для отыскания параметров канонического уравнения гиперболы (3) необходимо получить ее вторую ветвь (рис. 8), что дает возможность найти центр изображенной на рис. 9 системы координат и определить таким образом параметр a , который будет равняться половине расстояния между вершинами ветвей.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3).$$

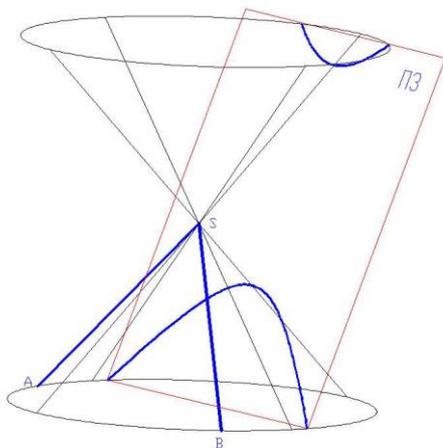


Рис. 8. Две ветви гиперболы

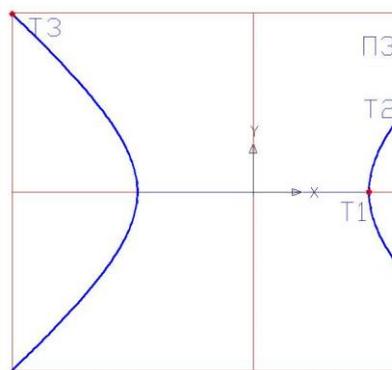


Рис. 9. К отысканию параметров канонического уравнения гиперболы

Из (3) следует:

$$b = \sqrt{\frac{y^2}{\frac{x^2}{a^2} - 1}} \quad (4).$$

Подставив значение a и координаты точки T2 в (4), можем получить значение параметра b . Подстановка полученных параметров и координат какой-либо точки, например T3, в (3) подтверждает правильность результатов.

4. Заключение

Предложенные методы позволяют получать трехмерные модели конических сечений в соответствии с комплексным чертежом, а также математическое описание таких сечений, полученных с применением средств твердотельного моделирования системы AutoCAD, в виде канонических уравнений соответствующих кривых линий. Такие методы можно использовать в учебном процессе для закрепления связи между представлением геометрических объектов на комплексном чертеже, их трехмерным представлением и аналитическим описанием, а также при решении задач САПР и АСНИ.

5. Литература

- [1] Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. – М.: Наука, 1973. – 366 с.
- [2] Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1969. – 272 с.
- [3] Карабчевский В.В. Использование средств связи между двумерными и трехмерными компьютерными моделями при преподавании графических дисциплин // Материалы Второй украинско-российской научно-практической конференции СПГМ-07. Харьков: ХГУИПТ. – 2007. – С. 323–332.

Об авторах

Карабчевский Виталий Владиславович, к.т.н., доцент, заведующий кафедрой компьютерного моделирования и дизайна факультета компьютерных наук и технологий Донецкого национального технического университета.
E-mail: karabchevski@mail.ru.