

Квазифокальные линии

А. Т. Дворецкий¹, Т.В. Денисова¹

erces_crimea@mail.ru | smorodina82@mail.ru

¹Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Россия

В статье доказано, что наибольшая концентрация отражённых лучей от поверхности отражателя располагается вдоль квазифокальной линии. Квазифокальная линия принадлежит поверхности каустики конгруэнции отражённых лучей. Параметры формы и положения квазифокальных линий описаны уравнениями. Представлена компьютерная визуализация отражающих поверхностей, конгруэнции отражённых лучей и их каустики, квазифокальные линии и карты изолиний локальных концентраций на поверхности приёмника отражённых лучей.

Ключевые слова: квазифокальная линия, конгруэнция отражённых лучей, поверхность каустики, карта изолиний локальных концентраций.

Quasifocal Lines

A.T. Dvoretzky¹, T.V. Denisova¹

erces_crimea@mail.ru | smorodina82@mail.ru

¹The Crimean Federal University named after V.I. Vernadsky, Simferopol, Russia

The article proved that the highest concentration of reflected rays from the surface of the reflector is located along the quasifocal line. The quasifocal line belongs to the caustic surface of the congruence of reflected rays. The parameters of the shape and position of the quasifocal lines are described by equations. Computer visualization of reflecting surfaces, congruences of reflected rays and their caustics, quasifocal lines and maps of isolines of local concentrations on the surface of the receiver of reflected rays are presented.

Keywords: quasifocal line, congruence of reflected rays, caustic surface, map of isolines of local concentrations.

1. Введение

Особое значение для практических задач преобразования солнечной энергии в тепло и электричество имеет определение параметров зоны наибольшей концентрации конгруэнции отражённых лучей. Огибающей однопараметрического семейства отражённых лучей от плоской кривой является плоская каустика (рис. 1), которую называют «горячей кривой» [1,5] Огибающей конгруэнции отражённых лучей [4,6] является поверхность каустики. На рисунке 2 изображена поверхность каустики для отражающего прямого кругового цилиндра.

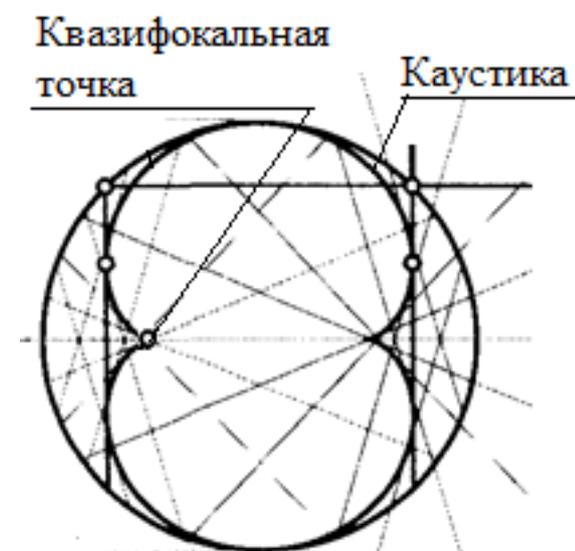


Рис.1. Каустика окружности

Можно предположить, что такой зоной является каустика плоская и пространственная. Однако есть основание считать, что зоной наибольшей концентрации

конгруэнции отражённых лучей является квазифокальная линия.

Говорить о максимальной концентрации лучей конгруэнции на поверхности каустики не корректно. Линией максимальной концентрации для конгруэнции отражённых лучей является квазифокальная линия [5]. Примером может служить солнечная установка с концентратором в виде цилиндра (рис.3).



Рис. 2. Поверхность каустики и квазифокальная линия цилиндрического отражателя

2. Квазифокальная линия цилиндрического концентратора

Для цилиндрических поверхностей величину концентрации определяет кривизна нормального сечения цилиндра. Вдоль прямолинейных образующих кривизна равна нулю. Квазифокальная линия есть прямая, параллельная образующим цилиндра (Рис. 4)

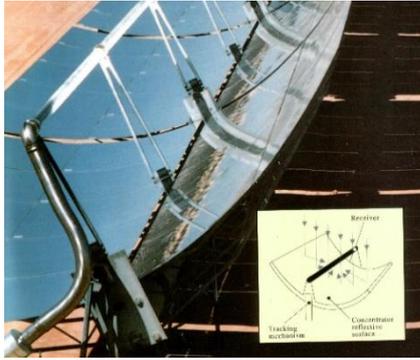


Рис.3. Цилиндрическая солнечная установка

Утверждение. Квазифокальная линия при отражении от прямого кругового цилиндра есть прямая f , параллельная оси цилиндра и удаленная от центра сферы на расстояние равное половине радиуса цилиндра.

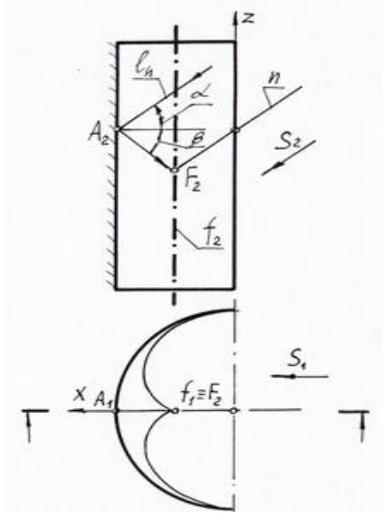


Рис. 4. Квазифокальная линия цилиндрического отражателя

Все отраженные от цилиндра лучи касаются фокальной поверхности. Эта поверхность есть прямой цилиндр с направляющей в виде эллипсиса окружности нормального сечения цилиндра.

Уравнение фокального цилиндра в параметрическом виде следующее:

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cos 2\theta \\ y &= \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \sin 2\theta \end{aligned} \quad (1)$$

Точка возврата эллипсиса есть квазифокальная точка нормального сечения прямого кругового цилиндра.

Квазифокальная прямая состоит из квазифокальных точек и расположена параллельно оси отражающего цилиндра на расстоянии равном половине радиуса. В связи с этим, цилиндрический приемник в солнечных коллекторах с цилиндрическим концентратором совпадает с квазифокальной линией (рис. 3).

3. Квазифокальная линия тороидального концентратора

Представим, что прямой круговой цилиндр изгибается в тор. При этом сеть линий кривизн изменится следующим образом. Окружности нормального сечения цилиндра преобразуются в конгруэнтные окружности меридиан

тора, а прямолинейные образующие цилиндра преобразуются в параллели тора.

Рассмотрим поверхность тора в качестве отражателя, когда лучи падают параллельно его оси. Модель такого отражателя, а также поток отраженных лучей представлены на рисунке 5. Для определения формы и положения приёмника концентрирующей системы с отражателем в виде тора [3] получено аналитическое описание квазифокальной линии (2) при переменном угле падения солнечных лучей:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-r \cdot \cos(t) \cdot (\cos(t) + \sin(t) \cdot \operatorname{tg}(t)) \cdot \sin(\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\cos(\pi-t)}))}{2 \cdot \cos(\pi-t) \cdot \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(t)}} + R \cdot \cos(t), \\ y &= R \cdot \sin(t), \\ z &= \frac{r \cdot (\cos(t) + \sin(t) \cdot \operatorname{tg}(t)) \cdot \sin(\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\cos(\pi-t)}))}{2 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(t)}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где α – угол падения лучей относительно плоскости миделя концентратора, R – радиус линии центров тора, r – радиус образующей окружности.

При изменении угла падения лучей, допустим, на $\alpha = 30^\circ$ относительно оси Oz можем наблюдать изменение формы и положения квазифокальной линии (рис. 5).

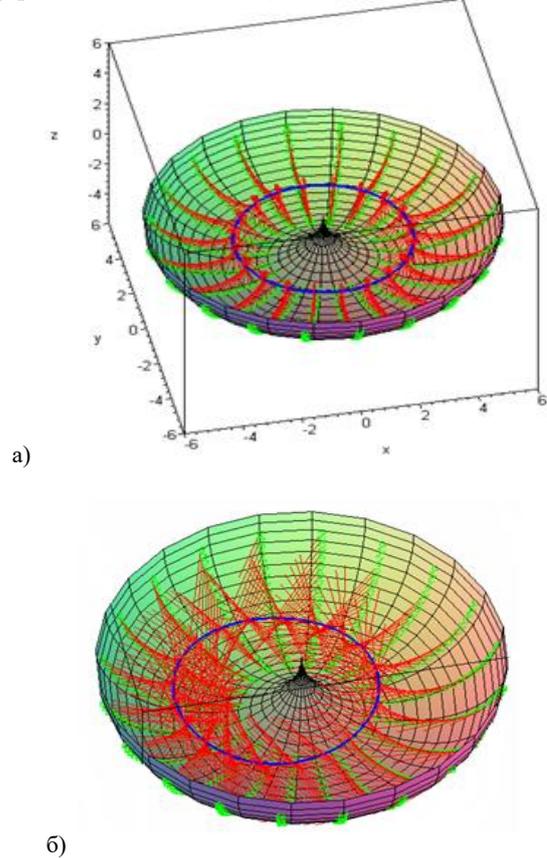


Рис. 5. Компьютерная модель тороидального отражателя и квазифокальной линии: а) $\alpha = 0^\circ$; б) $\alpha = 30^\circ$

3. Степень локальной концентрации

Распределение температуры по поверхности приёмника соответствует степени локальной концентрации падающего на приёмник отражённого потока и дает нам возможность определять точки высоких температур, в которых возникают напряжения, что может повредить приёмник.

Эффективность концентрирующей системы зависит от формы и параметров положения приемника. Теория квазифокальных линий дает нам возможность определить зоны максимальной концентрации энергии и располагать в них приемники с соответствующими параметрами. Компьютерное моделирование дает нам возможность для различных концентрирующих систем получить визуализацию и рассчитать коэффициенты концентрации для разных отражателей и приёмников.

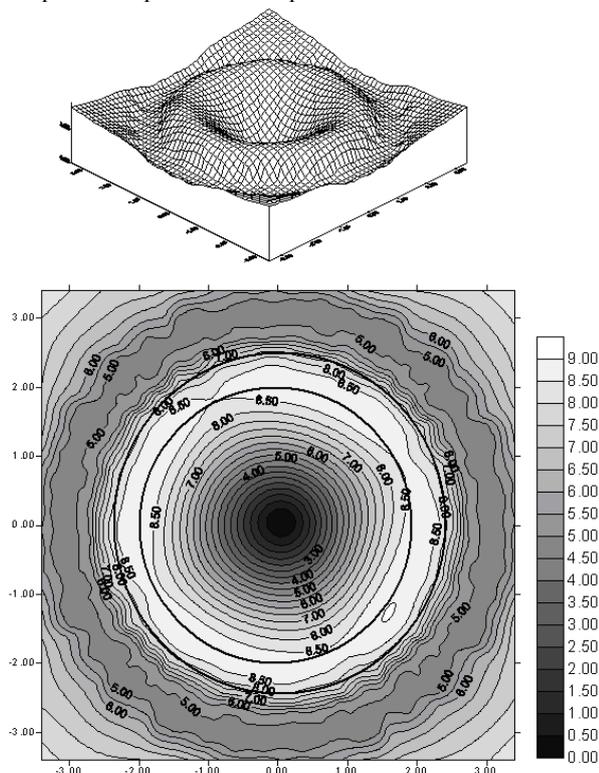


Рис.6. Карта изолиний локальной концентрации на плоском приёмнике тороидального отражателя.

Конгруэнция падающих лучей преобразится в конгруэнцию отражённых лучей, которая имеет разную плотность (рис. 6).

В соответствии с уравнением квазифокальной линии (2) для тороидального отражателя (рис.7) задаётся форма и положение кольцевого приёмника.

По методике, предложенной в статье [7] построена карта изолиний локальных концентраций, характеризующих распределение потока на поверхности приемника.

Рассмотрим поток солнечных лучей, падающих параллельно оси концентратора 1, представляющего собой нижнюю половину открытого отсека тора (рис. 7). После отражения лучи приходят на приемник 2, представляющий собой трубчатую кольцевую поверхность с линией центров, повторяющей квазифокальную линию [2].

5. «Горячая кривая» и квазифокальная линия.

Кривая каустика как «горячая кривая» может быть определена как огибающая однопараметрического множества отражённых лучей от плоской кривой.

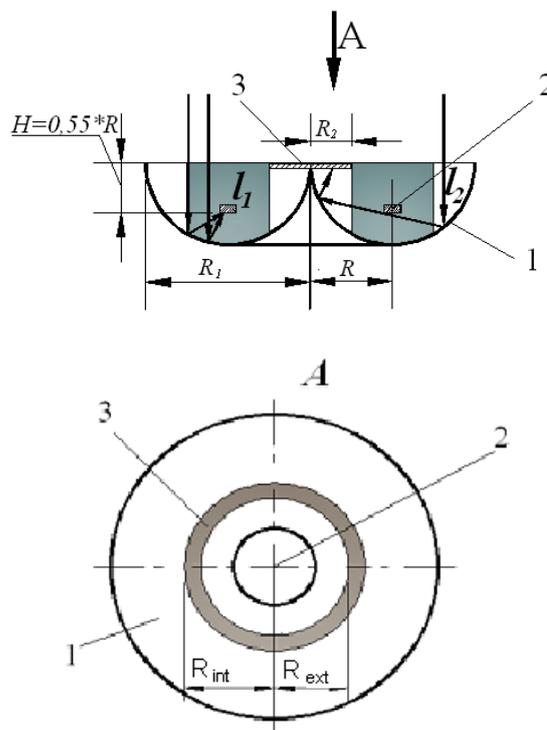


Рис.7. Тороидальный отражатель

Это наблюдается на плоскостях проекций или в плоских сечениях конгруэнции отражённых и преломлённых лучей. Для конгруэнции отражённых лучей зоной наибольшей концентрации является квазифокальная линия. По аналогии с плоской каустикой все лучи конгруэнции отражённых лучей от поверхности отражателя касаются поверхности каустики. Продемонстрировать это можно на примере отражений от параболы и параболоида вращения. На рисунке 8 представлена компьютерная визуализация (программа Maple) отражения от параболы с изображением каустики.

Известно также, что все лучи конгруэнции, отражённые от параболоида вращения, сходятся в точке (фокус) если падающие лучи параллельны оси параболоида.

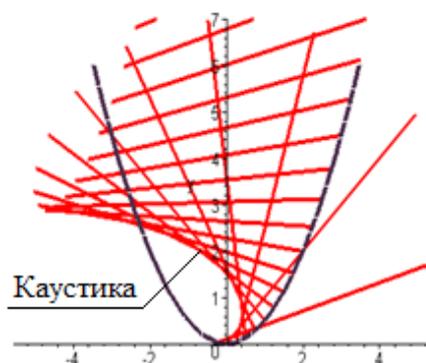


Рис.8. Каустика параболы при направлении падающих лучей 45° к оси параболы

Если падающие лучи не параллельны оси параболоида, то зоной концентрации является квазифокальная линия (рис. 9). Она же хорошо видна на компьютерной визуализации параболоида и отраженных лучей (рис. 10). Угол наклона лучей к оси параболоида 45° . С помощью компьютерной визуализации можно

получить фокальную поверхность конгруэнции отражённых лучей или поверхность каустики для отражающего параболоида (рис. 11).

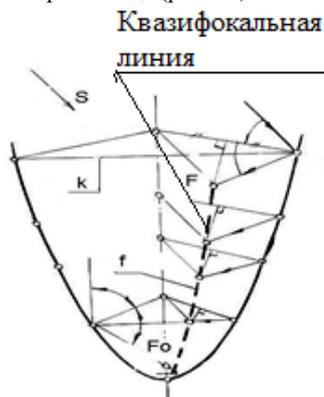


Рис. 9. Квазифокальная линия параболоида вращения

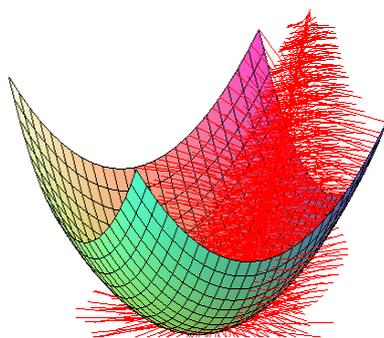


Рис. 10. Конгруэнция отражённых лучей параболоида вращения

6. Заключение

Эффективность концентрирующей системы зависит от формы и параметров положения приемника. Математическая модель квазифокальной линии дает нам возможность определять зоны максимальной концентрации отражённых лучей и положение приемников с соответствующими параметрами.

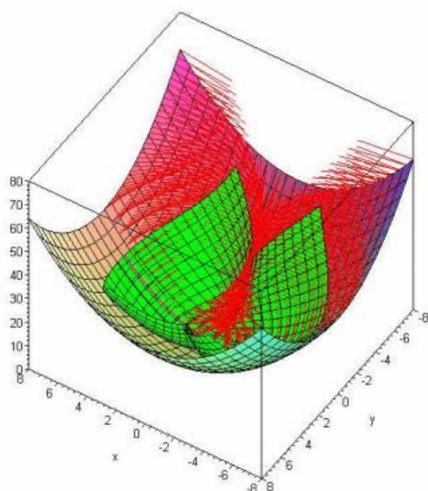


Рис. 11. Поверхность каустики отражённых лучей параболоида вращения

Компьютерное моделирование позволяет убедиться в достоверности результатов математического моделирования и визуально получить конгруэнцию при отражении и рассчитать локальную степень концентрации на приёмнике для концентрирующей системы.

7. Литература

- [1] Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. Пер. с англ. М. «Мир», 1988. 262с.
- [2] Дворецкий О.Т., Денисова Т.В. Патент на полезную модель №47513 «Солнечная установка с концентратором» зарегистрировано 10.02. 2010.
- [3] Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. Москва: Наука, 2006. – 536 стр.
- [4] Підгорний О.Л. Геометричне моделювання надходження сонячної радіації на різні поверхні // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ.: КІБІ, 1993.- С.10-13.
- [5] Cayley A. A memoir upon caustics. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 147:273-312; Collected Works. 1857, Vol. 2. pp. 336-380.
- [6] Dvoretzky A. T. Solar Thermal Concentrating Technologies in Installations with Stationary Concentrators// The XIIth SolarPACES International Symposium on Concentrating Solar Power and Chemical Energy Systems.- Seville, Spain.2006.
- [7] Dvoretzky A.T. Denysova T.V. Quasifocal Line and “Burning Curve” // Proceeding of the 18th International Conference on Geometry and Graphics. Milan, Italy., 2018.- С. 238-251.

Об авторах

Дворецкий Александр Тимофеевич, д.т.н. профессор, заведующий кафедрой Геометрического и компьютерного моделирования энергоэффективных зданий Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. E-mail: erces_crimea@mail.ru

Денисова Татьяна Владимировна, к.т.н., доцент кафедры Геометрического и компьютерного моделирования энергоэффективных зданий Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. E-mail: smorodina82@mail.ru