

Модель рассеивающего слоя с диффузной подложкой и френелевской границей

А.Ю. Басов, В.П. Будак
callia12@rambler.ru|budakvp@gmail.com
ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ», Москва, Россия

Настоящая работа посвящена созданию математической модели плоскопараллельного рассеивающего слоя с диффузной подложкой и верхней френелевской границей. Основой модели является уравнение переноса излучения. Для решения уравнения предлагается метод, основанный на представлении искомой функции в виде суммы анизотропной части, содержащей дельта-особенность, и гладкой части. Анизотропная часть решения определяется с помощью малоугловой модификации метода сферических гармоник. Гладкая часть находится с помощью метода дискретных ординат.

Ключевые слова: уравнение переноса излучения, метод сферических гармоник, метод дискретных ординат

Modeling of a scattering slab with a diffuse bottom and top reflecting by the Snell law

A.Y. Basov, V.P. Budak
callia12@rambler.ru|budakvp@gmail.com
National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

The present paper is devoted to the creation of a mathematical model of plane parallel scattering slab with a diffuse bottom and top reflecting by the Snell law. The model is based on the radiative transfer equation solution. The developed solution method is based on the representation of the function as the sum of an anisotropic part that contains all singularities and a smooth regular part. The anisotropic part could be found by the small-angle modification of the spherical harmonics method. The smooth part is determined by the discrete ordinate method.

Keywords: radiative transfer equation, spherical harmonics method discrete ordinate method.

1. Введение

Рассеивающие среды часто представляют собой сложные нерегулярные структуры. Расчёт световых характеристик в таких средах является непростой задачей, связанной с учётом влияния многих факторов: отражения на границах различной формы, рассеяния на частицах, поляризации. Математическая модель рассеивающего слоя с диффузной подложкой и френелевской верхней границей является первым шагом в создании более сложной модели, учитывающей все перечисленные факторы.

Пространственные свойства отражения асфальтобетонных покрытий играют ключевую роль при расчётах яркостных характеристик дорожных покрытий. Нерегулярная структура, недостаточная точность измерительной техники и требования норм в обеспечении яркости при угле наблюдения в 1° [1] создают сложности для исследования отражательных свойств асфальтобетонных покрытий. Существующие нормы основаны на результатах измерений, проведённых в 60-ых годах прошлого века [2]. Есть сомнения, что характеристики современных покрытий аналогичны, что также подтверждается расхождениями в результатах расчётов яркости и результатах измерений яркости на дорогах. Есть надежда, что создаваемая модель будет корректно описывать процессы переноса излучения, проходящие в асфальтобетонных покрытиях. Возможно, модель будет применима и к лакокрасочным и отделочным материалам. За основу работы взята программа, описанная в [3]. Сделано допущение, что дно отражает диффузно, а верхняя поверхность является случайно неровной и отражает по

закону Френеля. На данном этапе реализовано отражение от плоской верхней границы.

2. Особенности решения уравнения переноса

Для начала рассмотрим краевую задачу переноса излучения в рассеивающем слое, облучаемом плоским мононаправленным источником под углом Θ_0 :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial L(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{\partial \tau} + L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}) L(\tau, \mu', \varphi') d\hat{\mathbf{I}}', \\ L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=0, \mu>0} = \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0), \quad L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tau = \int_0^z \varepsilon(z') dz'$ – оптическая глубина,

$$\tau_0 = \int_0^d \varepsilon(z') dz',$$

$$\hat{\mathbf{I}}_0 = \{ \sqrt{1 - \mu_0^2} \cos \varphi_0, \sqrt{1 - \mu_0^2} \sin \varphi_0, \mu_0 \},$$

$$\mu_0 = \cos \Theta_0.$$

Оптимальным методом устранения проблемы, связанной с анизотропией, является представление решения в виде суммы анизотропной и гладкой части:

$$L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) + \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}). \quad (2)$$

Малоугловая модификация метода сферических гармоник позволяет представить анизотропную часть решения в трёхмерном пространстве в виде [3]:

$$L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = L_a(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \frac{2l+1}{4\pi} Z_l^n(\tau) Q_l^n(\mu) e^{im\varphi}. \quad (3)$$

Для нахождения гладкой части решения необходимо решить краевую задачу с источником $S(\tau, \mu, \varphi)$:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tau} + \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\Lambda}{4\pi} \hat{\Phi} x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) \tilde{L}(\tau, \mu', \varphi') d\hat{\mathbf{I}}' + S(\tau, \mu, \varphi), \\ \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi)|_{\tau=0, \mu>0} = 0, \quad \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi)|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = -L_a(\tau_0, \mu, \varphi). \end{cases} \quad (4)$$

Краевая задача (4) для регулярной части разрешима произвольным численным методом. Представим искомую функцию в виде ряда Фурье:

$$\tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=-M}^M C^m(\tau, \mu) e^{im\varphi}, \quad (5)$$

что приведёт к:

$$\mu \frac{dC^m(\tau, \mu)}{d\tau} = -C^m(\tau, \mu) + \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=m}^{N_x} (2k+1) x_k \cdot Q_k^m(\mu) \int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} f_k^m(\tau) Q_k^m(\mu). \quad (6)$$

Главная задача на этом этапе – замена интеграла суммой. Наиболее эффективным методом для этой задачи является метод дискретных ординат. Интеграл можно заменить на [3]:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' &\approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} w_j C_j^-(\tau) Q_k^m(\mu_j^-) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} w_j C_j^+(\tau) Q_k^m(\mu_j^+), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mu_j^- = (\mu_j - 1)/2$, $\mu_j^+ = (\mu_j + 1)/2$,

μ_j – нули полиномов Лежандра $P_k(\mu)$,

w_j – весовые коэффициенты гауссовой квадратуры.

Систему (6) можно заменить системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения системы применяется матрично-операторный метод, что удобно для реализации в программе Matlab. После преобразований системы получаем [3]:

$$\begin{bmatrix} \vec{C}_-(0) \\ \vec{C}_+(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}_- \\ \vec{F}_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{R}_- & \vec{T}_- \\ \vec{T}_+ & \vec{R}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{C}_+(0) \\ \vec{C}_-(\tau_0) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Выражение (8) определяет перенос излучения через слой: отраженное $\vec{C}_-(0)$ и прошедшее $\vec{C}_+(\tau_0)$ излучение через излучение падающее на границы слоя сверху $\vec{C}_+(0)$ и снизу $\vec{C}_-(\tau_0)$.

3. Диффузно отражающая подложка

Для решения задачи переноса излучения в слое с диффузно отражающей подложкой перепишем граничные условия на дне в виде:

$$L(\tau_0, \hat{\mathbf{I}})|_{\mu<0} = \frac{\rho}{\pi} \int_{\mu>0} L(\tau_0, \hat{\mathbf{I}}') \mu d\hat{\mathbf{I}}' \quad (9)$$

Если выразить интеграл (9) через гауссовы квадратуры, то получим в матричной форме:

$$\begin{aligned} m=0: \vec{C}_-(\tau_0) &= 2\rho \vec{R}_L \vec{C}_+(\tau_0); \\ \forall m>0: \vec{C}_-(\tau_0) &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, для реализации программы с диффузной подложкой в программе, реализованной в [3], необходимо поменять только блок, относящийся к нулевой ординате ($m=0$). Результат работы программы представлен на рис. 1.

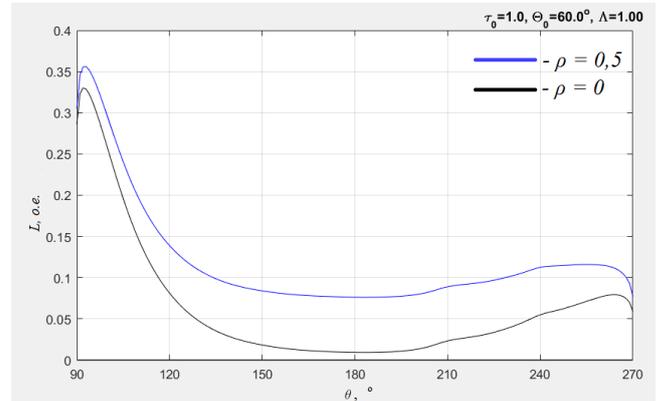


Рис. 1. Реализация учёта диффузного отражения от подложки.

4. Френелевская верхняя граница

Для учёта отражения от верхней границы необходимо учесть преломление:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (11)$$

Необходимо учесть, что при $\mu_2 < \mu_t \equiv \sqrt{1 - 1/n_2^2}$ происходит полное внутренне отражение. Тогда интеграл (7) можно рассмотреть по зонам:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' &= \int_{-1}^{-\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' + \\ &+ \int_{-\mu_t}^{\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' + \int_{\mu_t}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (12)$$

Первый и последний интегралы связаны с областью преломления, а второй относится к области total reflection. Для второго интеграла выполним преобразование

$$\int_{-\mu_t}^{\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' = \int_{-1}^1 Q_k^m(\nu) C^m(\tau, \nu) d\nu, \quad (13)$$

где $\mu' = \mu_t \nu$,

что позволяет применить двойную гауссову квадратуру с N_t узлами и впоследствии перейти в этой зоне к двум потоком ординат \vec{C}_+^t, \vec{C}_-^t , которые на границе связаны идеальным зеркальным отражением.

Для первого и последнего интегралов в (13) сделаем преобразование переменной интегрирования.

При переходе к дискретным ординатам устанавливается полное соответствие между атмосферными ординатами \vec{C}_+^1, \vec{C}_-^1 и соответствующими \vec{C}_+^2, \vec{C}_-^2 . При этом изменяются веса квадратурной формулы:

$$w_i^2 = w_i^1 \frac{\mu_i}{\sqrt{n_2^2 - (1 - \mu_i^2)}}, \quad (14)$$

где μ_i – корни полинома порядка N .

Если ввести вектора $\vec{C}_+^2 = [\vec{C}_+^1; \vec{C}_+^2]$, $\vec{C}_-^2 = [\vec{C}_-^1; \vec{C}_-^2]$, где квадратные скобки обозначают объединение векторов в один суммарной размерности в соответствии с правилами системы Matlab, то для них будет справедливо соотношение (8). Для введенных величин можно записать и условие на границе раздела атмосфера – океан:

$$\begin{bmatrix} \vec{C}_-^1 \\ \vec{C}_+^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{R} & \vec{T}_{12} \\ \vec{T}_{21} & \vec{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{C}_+^1 \\ \vec{C}_-^2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\vec{T}_{12} \equiv [\vec{T} \quad \vec{0}], \quad \vec{T}_{21} \equiv \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{T} \end{bmatrix}, \quad \vec{R}_{22} \equiv \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{I} \\ \vec{R} & \vec{0} \end{bmatrix},$$

где \vec{R} , \vec{T} – френелевские матрицы отражения.

5. Заключение

В работе реализована модель рассеивающего слоя с диффузной подложкой и френелевской границей. В дальнейшем планируется учесть отражение от случайно неровной границы и поляризацию. Если также учесть многообразие частиц как по форме, так и по размеру и по составу, то модель сможет описывать процессы переноса излучения в асфальтобетонных покрытиях. Для оценки точности моделирования результаты моделирования будут сравниваться с результатами измерений.

6. Литература

- [1] ГОСТ Р 55706–2013. Освещение наружное утилитарное. Классификация и нормы. – Введ. 01.07.14. – М.: Стандартинформ, 2014. 12 с.
- [2] Островский М.А. Разработка новых норм уличного освещения: отчёт о НИР (промежуточ.). ВНИСИ, – 1971. 35 с.
- [3] Budak VP, Korkin SV. On the solution of a vectorial radiative transfer equation in an arbitrary three-dimensional turbid medium with anisotropic scattering. J Quant Spectrosc Radiat Trans 2008; 109:220–34.

Об авторах

Басов Александр Юрьевич, аспирант кафедры светотехники ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ». Его e-mail callia12@rambler.ru.

Будак Владимир Павлович, д.т.н., профессор кафедры светотехники ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ». Его e-mail budakvp@gmail.com.