

## Циклография. Аспекты теории и практических применений

К.Л. Панчук, Е.В. Любчинов, Т.М. Мясоедова  
 panchuk\_kl@mail.ru|lubchinov.e.v@yandex.ru|mtm44mtm44@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск, Российская Федерация

*В настоящей работе рассматриваются вопросы развития теории и расширения областей практического применения одного из классических методов геометрического моделирования - циклографии. Кратко приведены известные основные понятия, геометрические конструкции и их математическое описание, используемые в циклографическом моделировании. Рассмотрено получение новых теоретических результатов, развивающих циклографию и расширяющих ее возможности в решении разнообразных задач науки и практики.*

**Ключевые слова:** циклография, отображение, образ и прообраз, геометрическая оптика, гиперэпюр Наумович .

## Cyclography. Aspects of theory and practical applications

K.L. Panchuk, E.V. Lyubchinov, T.M. Myasoedova  
 panchuk\_kl@mail.ru|lubchinov.e.v@yandex.ru|mtm44mtm44@mail.ru

Omsk State Technical University, Omsk, Russian Federation

*In the present paper, questions of development of the theory and expansion of areas of practical application of one of the classical methods of geometric modelling – cyclography - are considered. Briefly given known basic concepts, geometric constructions and their mathematical description, used in cyclic modeling. Consideration is given to obtaining new theoretical results that develop the cyclography and expand its possibilities in solving various problems of science and practice.*

**Keywords:** cyclography, mapping, image and protoimage, geometric optics, Naumovich hyperdrawing

### 1. Введение

Теоретические основы циклографии заложены в трудах западноевропейских геометров: W. Fiedler [5], L. Eckhart [4], E. Müller и J. L. Krames [7]. Современный уровень теоретического развития и области практических применений циклографического моделирования отражены в работах [1–3, 11–15].

Изначально циклография рассматривалась как изоморфное отображение  $C$  пространства  $R^3$  на плоскость  $(xy)$ :  $C: (x, y, z) \leftrightarrow (x, y, r = z)$ . Этим отображением приводятся во взаимно-однозначное соответствие параметрически равные множества точек пространства  $R^3$  и циклов (ориентированных) окружностей на плоскости  $(xy)$ . При этом само отображение может быть выполнено математически (отображение  $C_A$ ) и конструктивно-геометрически (отображение  $C_G$ ). В классических работах по циклографии [4, 5, 7] были получены и исследованы циклографические образ линейных объектов (прямых, плоскостей и их множеств) евклидова пространства, а также положено начало циклографического моделирования нелинейных объектов (кривых и поверхностей).

Вопросам теории и практических приложений циклографического моделирования объектов евклидова пространства посвящены, кроме вышеуказанных, работы [8–10, 18].

Учитывая известные результаты исследований в циклографическом моделировании, рассмотрим более общие подходы к решению его теоретических и практических задач.

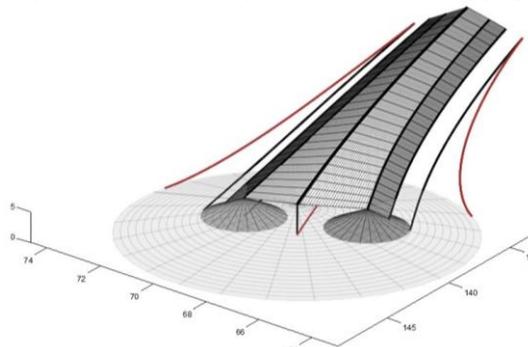
### 2. Развитие теории и практические приложения циклографического моделирования

#### 2.1. Обобщенная циклографическая модель кривой линии

Существующий циклографический образ  $a_\alpha$ :  $x_\alpha = x_\alpha(t), y_\alpha = y_\alpha(t)$  кривой линии пространства  $a$ :

$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in R$  получен на основе отображения  $C_G$ , в котором полуугол при вершине конуса отображения с вершиной в текущей точке кривой постоянен и равен  $\alpha = 45^\circ$ . Вся предшествующая настоящему времени циклография использовала именно такой конструктивно-метрический вариант отображения. Авторами работы предложено использовать переменный полуугол, например, в виде некоторой функции  $\beta = f(t)$ ,  $t \in R$ , где  $t$  – текущий параметр, определяемый геометрией исходной кривой – прообразом. Обобщенный циклографический образ  $a_\beta$  описывается параметрическими уравнениями более общего вида [10]:  $a_\beta: x_\beta = x_\beta(t), y_\beta = y_\beta(t), t \in R$  в сравнении с известными уравнениями образа  $a_\alpha$  [2, 3]. Оба циклографических образа: существующий  $a_\alpha$  и предложенный  $a_\beta$ , представляют собой огибающие соответствующих однопараметрических множеств циклов – ориентированных круговых оснований конусов отображения  $C_G$ .

Обобщенный циклографический образ  $a_\beta$  линии  $a \subset R^3$  положен в основу математического моделирования автомобильной дороги. На рис. 1 представлена визуализация результатов вычислений в примере циклографического моделирования этого объекта [10].



**Рис.1.** Циклографическое моделирование проезжей части и обочины автомобильной дороги

**2.2. Циклографическое моделирование в проектировании обработки карманных поверхностей изделий машиностроения**

Оптимизация траектории движения режущего инструмента для обработки карманных поверхностей на станках с ЧПУ традиционно выполняется средствами геометрического моделирования на плоскости [6]. При этом используется медиальная ось (биссекторная линия) контура карманной поверхности как множество точек самопересечений линий *OC* (“Offset Curves” [2]) равных расстояний  $\delta_i$  по отношению к исходному контуру. Линии *OC* рассматриваются как траектории движения инструмента, обрабатывающего карманную поверхность. Определение линий *OC* выполняется аналитически по параметрическим уравнениям  $x_\delta = x_a(t), y_\delta = y_a(t), t \in R$ , полученным из параметрических уравнений исходного контура  $a: x_a = x_a(t), y_a = y_a(t)$  [2, 3] с последующим анализом и корректировкой самопересечений линий *OC* для определения медиальной оси и обеспечения необходимой траектории движения инструмента.

Авторами работы рассмотрено пространственное решение задачи построения множества линий *OC* на основе циклографического отображения в пространстве  $R^3$  контура карманной поверхности, определения в пространстве образа медиальной оси и образов множества линий *OC* с последующим построением соответствующих им прообразов в плоскости исходных данных. Визуализация решения задачи определения множества *OC* позволяет более качественно выполнить анализ полученного множества линий при построении траектории режущего инструмента. Рисунки 2 - 6 демонстрируют на примере эллиптического контура последовательность выполнения предлагаемого решения задачи построения множества линий *OC*.

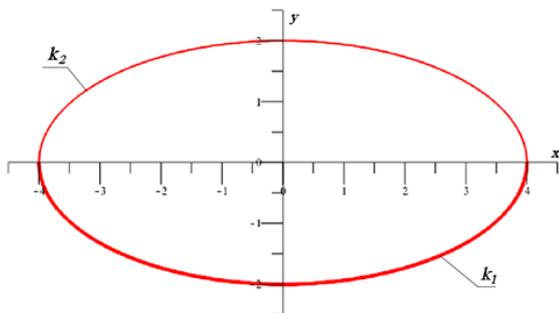


Рис.2. Исходный эллиптический контур

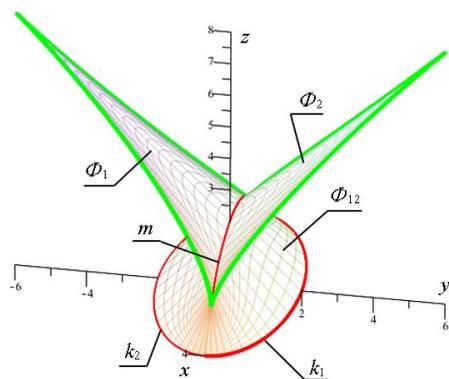


Рис.3. Составной линейчатый образ эллиптического контура

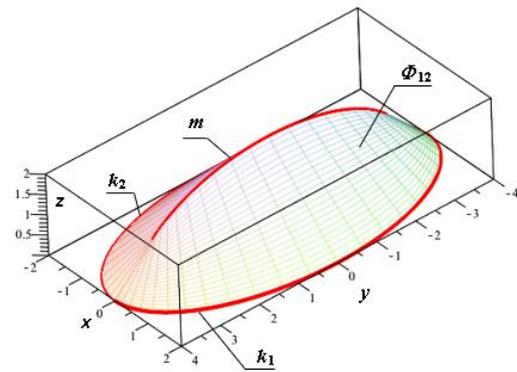


Рис.4. Линейчатый образ эллиптического контура без “рожковых” частей

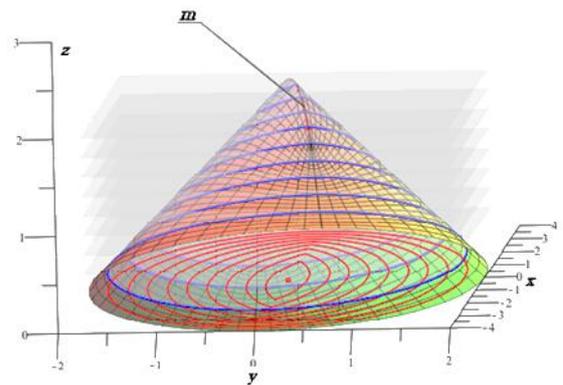


Рис.5. Образ множества линий *OC*

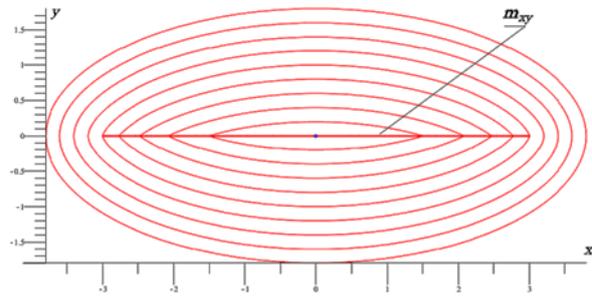


Рис.6. Прообраз - множество линий *OC*

**2.3. Циклографическое моделирование решений задач геометрической оптики**

Задачи геометрической оптики можно условно разделить на два типа:

1. Прямая задача, в которой требуется определить отражатель (зеркало), преобразующий один пучок лучей с носителем пучка в другой, также определенный носителем.
2. Обратная задача, когда требуется по заданному пучку лучей и отражателю определить носитель отраженного пучка.

Обе задачи имеют известные в геометрической оптике решения лишь для частных случаев, когда носителями пучков являются точка или прямая линия. Для общего случая, когда носителем одного из пучков является кривая линия, существующие решения отличаются громоздкостью и приближенными результатами вычислений. Авторами работы предложены алгоритмы решений прямой и обратной задачи, основанные на циклографическом отображении с выходом из плоскости задания условий задач в пространство. Алгоритмы охватывают все возможные варианты геометрических форм носителей в парах пучков и характеризуются аналитическим решением обеих задач. На рис. 7 приведены результаты

циклографического решения прямой задачи для двух нелинейных пучков с носителями  $b_0$  и  $d_0$  [9, 18].

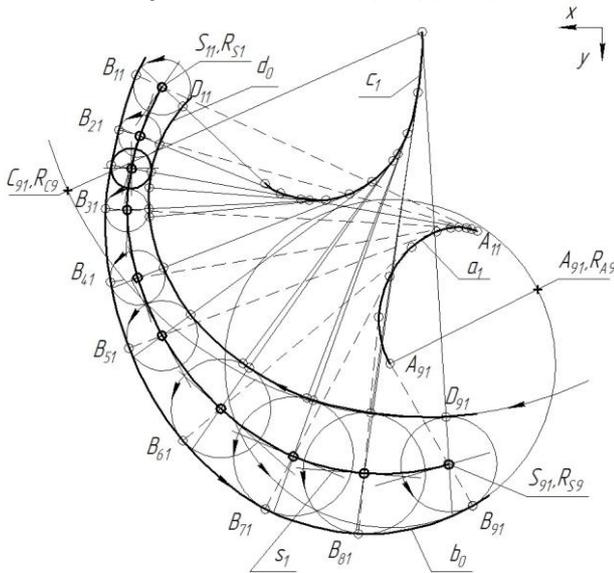


Рис. 7. Циклографическое решение прямой задачи для случая двух нелинейных пучков

**2.4. Пространственная циклография и ее реализация на гиперэпюре Наумович**

Возможность построения пространственной циклографии рассмотрена в работах [7, 15]. Суть ее заключается в построении в пространстве  $R^{n-1}$  циклографических образов объектов пространства  $R^n, n > 3$ . Так, например, используя отображение  $C_A$  можно поставить во взаимно-однозначное соответствие точке  $(x, y, z, v)$  пространства  $R^4$  сферу  $S(x, y, z, r = v)$  пространства  $R^3$  (рис. 8). Очевидно, кривой линии  $a : x(t), y(t), z(t), v(t), t \in R$  пространства  $R^4$  будет соответствовать в пространстве  $R^3$  каналовая поверхность  $\Phi_a : x_\alpha = x_\alpha(t, u), y_\alpha = y_\alpha(t, u), z_\alpha = z_\alpha(t, u), u \in R$ ; 2-поверхности  $\Phi^2 \subset R^4$  будет соответствовать огибающая  $\Phi_a^2 \subset R^3$  двухпараметрического множества сфер [11].

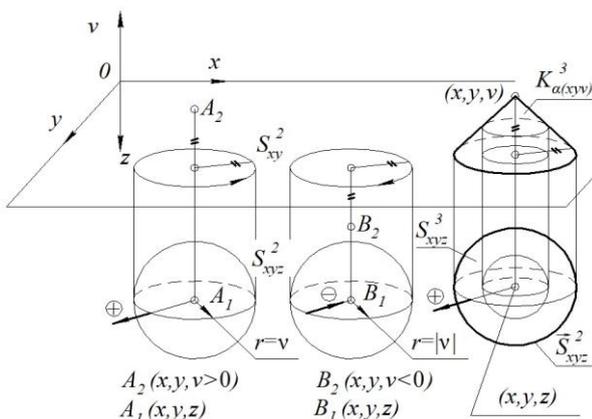


Рис.8. Циклографическое моделирование точки пространства  $R^4$  на гиперэпюре Наумович

Авторами работы предложено выполнять циклографическое отображение  $C_G$  объектов пространства  $R^4$  на основе гиперэпюры Наумович [17]. В этом отображении точка  $A(x, y, z, v) \in R^4$  отображается  $\alpha$ -гиперконусом  $K_\alpha^3$  с вершиной в этой точке на

гиперплоскость проекций  $(xyz)$  в двумерный цикл  $\bar{S}_{xyz}^2$  (направленную сферу). Очевидно, кривая линия  $a \subset R^4$  отобразится огибающей всех  $\alpha$ -гиперконусов  $K_\alpha^3$  ее точек – линейчатой  $\alpha$ -гиперповерхностью  $\Phi_\alpha^3$  на гиперплоскость проекций  $(xyz)$  в каналовую поверхность  $\Phi_\alpha$ , которая представляет собой огибающую всех двумерных циклов  $\bar{S}_{xyz}^2$  (рис.9).

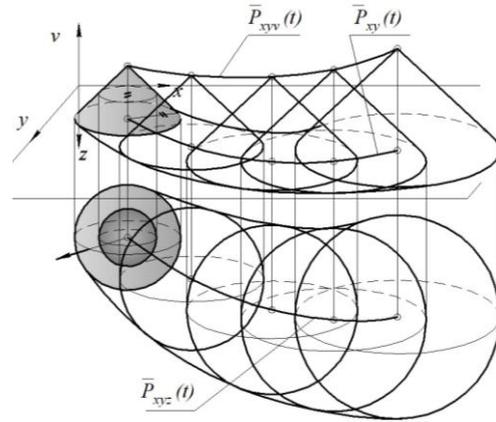


Рис.9. Циклографическое моделирование линии пространства  $R^4$  на гиперэпюре Наумович

**2.5. Циклографическое моделирование решения задачи измерения псевдодальностей в спутниковых системах определения местоположения**

В теории измерения псевдодальностей [16] используется квадратичное уравнение для выполнения псевдодальномерных измерений, в котором неизвестными являются координаты  $(x_{np}, y_{np}, z_{np})$  точки стояния приёмника и поправка на уход часов приёмника  $\delta t_{np}$ . Для определения этих неизвестных составляется система из четырех квадратных уравнений, соответствующих расстояниям до четырех спутников. С учетом замены переменных:  $x_{np} \rightarrow x_1, y_{np} \rightarrow x_2, z_{np} \rightarrow x_3, \delta t_{np} \rightarrow x_4$  эту систему можно представить в виде

$$F_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - a_{i1})^2 + (x_2 - a_{i2})^2 + (x_3 - a_{i3})^2 - (x_4 - a_{i4})^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Систему 4-х квадратных уравнений можно алгебраическими преобразованиями привести к эквивалентной системе

$$F_1 = 0, F_1 - F_2 = 0, F_1 - F_3 = 0, F_1 - F_4 = 0,$$

в которой первое уравнение квадратное, а три последующие – линейные. Первое уравнение описывает гиперконус вращения  $K_\alpha^3$  с телесным полууглом при вершине, равным  $45^\circ$ , и направленным основанием – двумерным циклом  $\bar{S}_{xyz}^2$ , а остальные уравнения описывают гиперплоскости  $P_i^3, i = 1, 2, 3$  пространства  $R^4$ . Геометрический анализ системы уравнений показывает, что её полным решением являются 16 точек  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  пространства  $R^4$ , которым соответствуют 16 сфер пространства  $R^3$ . На рисунках 10 и 11 приведена визуализация результатов двух решений в примере рассматриваемой задачи для определенной ориентации гиперконуса  $K_\alpha^3$  и трех гиперплоскостей  $P_i^3$  [8].

Использование циклографических образов в пространстве  $R^3$  объектов пространства  $R^4$  позволяет получить аналитическое решение известной задачи об измерении псевдодальностей в спутниковых системах определения местоположения [8] в отличие от существующего приближенного решения [16]. Вариант постановки этой практической задачи и исследование её решений изложены в работе Н. Stachel [15].

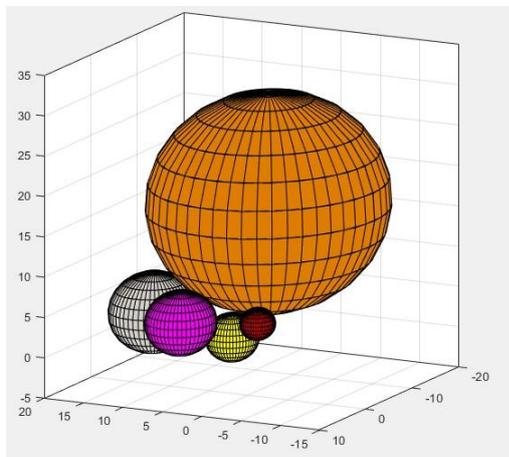


Рис.10. Геометрическая интерпретация первого решения

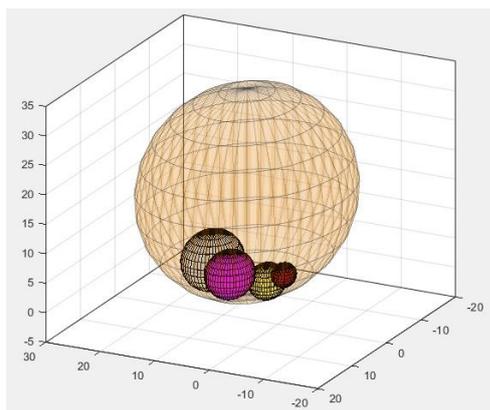


Рис.11. Геометрическая интерпретация второго решения

### 3. Заключение

Рассмотрены вопросы теории циклографического метода геометрического моделирования применительно к решениям разноплановых практических задач. Решения достаточно убедительно подтверждают работоспособность и демонстрируют потенциальные возможности развивающегося классического метода.

### 4. Литература

- [1] Cho H.Ch., Choi H.I., Kwon S.-H., Lee D.S. and Wee N.S. Clifford algebra, Lorentzian geometry and rational parametrization of canal surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 21:327–339, 2004.
- [2] Choi H.I., Han C.Y., Moon H.P., Roh K.H., Wee N.S. Medial axis transform and offset curves by Minkowski Pythagorean hodograph curves, *Computer-Aided Design* 31 (1999), 5 p.p. 9–72.
- [3] Choi H. I., Choi S. W. and Moon H. P. Mathematical theory of medial axis transform. *Pacific J. Math.*, 181(1):56–88, 1997.
- [4] Eckhart L. *Konstruktive abbildungsverfahren*. Wien. Verlag von Julius Springer, 1926, 120 p.
- [5] Fiedler W. *Cyklographie oder Construction der Aufgabenüber Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme*. – Leipzig, Druckund Verlag von B.G. Teubner, 1882. – 284 p.
- [6] Held M. *On the Computational Geometry of Pocket Machining*. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol 500, Springer Verlag, Berlin 1991, p.184.
- [7] Dr. Emil Muller. *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*. II. Band: *Die Zyklographie*. Edited from the manuscript by Dr. Josef Leopold Krames. Leipzig and Vienna, Franz Deuticke, 1929. - 476 pp.
- [8] Panchuk K. L., Lyashkov A. A., Lyubchinov E. V. Geometric model of pseudo-distance measurement in satellite location systems. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 998 (2018) 012021. doi:10.1088/1742-6596/998/1/012021.
- [9] Panchuk K. L., Lyubchinov E. V., Krysova I. V. Surface triads with optical properties. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 944 (2018) 012086. doi :10.1088/1742-6596/944/1/012086.
- [10] Panchuk K.L., A. S. Niteyskiy, E. V. Lyubchinov. *Cyclographic Modeling of Surface Forms of Highways*. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 262 (2017) 012108. doi:10.1088/1757-899X/262/1/012108.
- [11] Peternell M. Rational two-parameter families of spheres and rational offset surfaces. *J. Symbolic Computation* 45 (2010), 1-18.
- [12] Peternell M., Pottmann H. Computing rational parametrizations of Canal Surfaces. *J. Symbolic Computation* 23 (1997), 255–266.
- [13] Pottmann H., Peternell M. Applications of Laguerre Geometry in CAD, *Comp. Aided Geometric Design* 15 (1998), 165–186.
- [14] Pottmann H., Wallner J. *Computational Line Geometry*. Berlin. Heidelberg: Springer Verlag, 2001. 565 p.
- [15] Stachel H. (1996) “Why Shall We also Teach the Theory behind Engineering Graphics”, Technical Report No. 35, TU-Wien, Institute for Geometry, 5p.
- [16] Генике А. А. *Глобальные спутниковые системы определения местоположения и их применение в геодезии / А. А. Генике, Г. Г. Побединский*. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Картогеоцентр, 2004. – 355 с.
- [17] Короткий В. А. Компьютерное моделирование фигур четырехмерного пространства. *Вестник компьютерных и информационных технологий*. 2014. №7(21). С.14-20.
- [18] Панчук К. Л. *Циклографическая начертательная геометрия: монография/ К. Л. Панчук, Н. В. Кайгородцева*. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2017. – 232 с.

### Об авторах

Панчук Константин Леонидович, д.т.н., профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского технического университета. Его e-mail: panchuk\_kl@mail.ru.

Любчинов Евгений Владимирович, аспирант, преподаватель кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского технического университета. Его e-mail: lubchinov.e.v@yandex.ru.

Мясоедова Татьяна Михайловна, старший преподаватель кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского технического университета. Ее e-mail: mtm44mtm44@mail.ru.