Решение дифференциальных уравнений методами геометрического моделирования

Е.В. Конопацкий[1]
e.v.konopatskiy@mail.ru
[1]ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»,
г. Макеевка, Донецкая Народная Республика

В статье приводятся теоретические основы и принципиальный вычислительный алгоритм, необходимые для решения дифференциальных уравнений с помощью геометрического моделирования объектов многомерного аффинного пространства, проходящих через наперёд заданные точки. Также приводится пример решения простейших дифференциальных уравнений модифицированным методом конечных элементов.

Ключевые слова: *геометрическое моделирование, многомерное пространство, дифференциальные уравнения, геометрический объект, функция отклика, метод конечных элементов.*

Solving Differential Equations by Geometric Modelling Methods

E.V. Konopatskiy[1],
e.v.konopatskiy@mail.ru
[1] Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Donetsk People's Republic

The theoretical principles and the basic computational algorithm necessary for solving differential equations with the help of geometric modelling of objects a multidimensional affine space passing through given points are given in the article. An example of solving the simplest differential equations by a modified finite element method is also given.

Keywords: *geometric modeling, multidimensional space, differential equations, geometric object, response function, finite element method.*

1. Введение

Математическое и, как следствие, компьютерное моделирование, давно заняло одно из главенствующих положений в системе формирования знаний, накопленных человечеством, как источник новых знаний о протекании тех или иных процессов и явлений живой и не живой природы, техники, технологии и т.п. Однако отдельным направлением можно выделить создания моделей для решения непосредственно математических задач. В этом случае моделирование выступает как отдельный инструмент решения сугубо математических задач, которые впоследствии могут быть использованы уже для решения каких-либо прикладных и инженерных задач. В качестве подобного примера рассмотрим в данной статье использование методов геометрического моделирования с применением многомерной геометрии для решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Уравнения в частных производных нашли широкое применение в разделе математической физики [4] для аналитического описания моделей различных физических явлений. Вместе с тем возникает задача решения полученных уравнений в частных производных, большинство из которых не выражаются через элементарные функции. В таких случаях используют численные методы решения дифференциальных уравнений [7], к которым, например, относятся метод конечных элементов [5] и метод конечных разностей [7]. Эти методы имеют огромное прикладное значение, поскольку являются основой для всех существующих современных САПР. Основным же их недостатком является огромный объём вычислений. Здесь следует отметить, что задачи, решаемые методом конечных элементов, могут иметь линейную и нелинейную постановку. При этом в линейной постановке решение задачи методом конечных элементов обладает большим быстродействием, однако полученный результат не всегда соответствует истине, поскольку и в природе и в технике линейные процессы и явления встречаются крайне редко. Чаще всего они как раз и носят нелинейный характер. Причём сама нелинейность может иметь различную природу. Например, в строительной механике разделяют нелинейность 4-х видов:

1) геометрическая;
2) физическая;
3) конструктивная;
4) генетическая.

В результате конечно-элементный анализ конструкции с учётом хотя бы одной из выше перечисленных нелинейностей – это решение отдельной инженерной задачи, связанной с большими затратами временных ресурсов как на составление корректной конечно-элементной схемы, так и на сами вычисления. Поэтому усовершенствование существующих вычислительных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных можно считать актуальной научно-практической задачей.

2. Исходная идея

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Что значит решить это уравнение? Это значит необходимо установить такую функциональную зависимость между переменной x и функцией отклика y, которая удовлетворяла бы условию уравнения. Геометрически это означает, что нужно определить однопараметрическое множество точек, т.е. построить такую дугу кривой, которая на определенном участке могла бы удовлетворить условию исходного уравнения. Здесь возникает несколько вариантов решения. Можно использовать единую дугу кривой, проходящую через наперед заданные точки, а можно составную, состоящую из нескольких, каким-либо образом, состыкованных между собой дуг. Если искомая кривая носит монотонный и гладкий характер, то конечно удобно искать уравнение

The publication of the conference proceedings was supported by the RFBR, grant No. 18-07-20045\18

единой дуги кривой. С другой стороны, если искомая дуга кривой носит сложный незакономерный характер, то единственно возможным способом её описания будет составная кривая. Таким образом, переходим к идее метода конечных элементов, которая заключается в том, чтобы разбить искомую область на конечное число элементов и аппроксимировать искомую кривую дугами более простых кривых. Говоря другими словами, нужно подобрать такую дугу кривой на каждом участке, чтобы выполнялось условие исходного уравнения на всем интервале решения задачи. При этом стыковка дуг осуществляется за счёт составления глобальных матриц численного решения дифференциальных уравнений.

Здесь следует остановиться на уравнениях дуг аппроксимационных кривых. Одним из наиболее простых и вместе с тем эффективных способов – это использование дуг алгебраических кривых проходящих через наперед заданные точки [3], которые были получены в БН-исчислении (точечное исчисление Балюбы-Найдыша [1, 2, 6]) на основе полиномов Бернштейна. Использование дуг кривых, проходящих через наперёд заданные точки, даёт возможность создавать геометрические объекты, носителем которых являются узловые точки. При этом порядок кривой напрямую зависит от степени производной исходного дифференциального уравнения. Дабы не усложнять решение и уменьшить количество вычислений, рекомендуется выбирать кривую аппроксимации таком образом, чтобы порядок кривой был на единицу больше порядка производной функции. Хотя в некоторых случаях есть необходимость в использовании кривых более высокого порядка. Всё зависит от исходного дифференциального уравнения.

Если рассматривать другие дифференциальные уравнения в частных производных, то, с точки зрения геометрического моделирования, необходимо выделить лишь количество переменных, влияющих на функцию отклика, а значит и на выбор аппроксимирующего геометрического объекта. Например, двухпараметрическое множество точек – поверхность отклика, позволяет решать дифференциальные уравнения следующего вида:

$$F\left(z, x, x', x'', ..., x^{(n)}, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Трёхпараметрическое множество точек – гиперповерхность отклика позволяет решать дифференциальные уравнения с большим количеством переменных:

$$F\left(t, x, x', x'', ..., x^{(n)}, y, y', y'', ..., y^{(n)}, z, z', z'', ..., z^{(n)}, ...\right) = 0.$$

Таким образом, модификация метода конечных элементов заключается в том, что решение дифференциального уравнения представляется в виде совокупности геометрических объектов функции отклика, проходящих через наперед заданные точки. Это даёт возможность обобщения для вычислительного решения различных дифференциальных уравнений в виде совокупности геометрических объектов функции отклика, проходящих через наперед заданные точки и принадлежащих многомерному аффинному пространству. Одним из принципиальных отличий от классического метода конечных элементов является то, что вместо увеличения степени полинома на каждом участке для достижения необходимого количества параметров увеличивается размерность пространства, в котором расположен геометрический объект, выбранный для аппроксимации решения исходного дифференциального уравнения. Основное же отличие от классического метода конечных элементов заключается в том, что на конечные элементы разбивается не исследуемый объект, а геометрический объект функции отклика, проходящий через наперёд заданные точки, конечная форма которого как раз и определяется в результате вычислений.

3. Покоординатный расчёт для решения дифференциальных уравнений

В классической литературе дифференциальные уравнения в частных производных представляются в явном виде, реже в неявном виде, как было показано выше. Для построения функций отклика в БН-исчислении, используются геометрические объекты, проходящие через наперед заданные точки в виде точечных уравнений и вычислительных алгоритмов, которые по своей сути являются символьной записью. Для перехода от точечных уравнений к параметрическим необходимо выполнить покоординатный расчёт. Здесь возникает отдельная задача, как продифференцировать функцию отклика по переменным, если она задана параметрически? Для дуги кривой, как однопараметрического множества, эта задача не представляет сложности и хорошо известна из курса дифференциального исчисления:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ или } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \bigg/ \frac{\partial x}{\partial t}.$$

С поверхностью уже немного сложнее. Предположим, задан отсек поверхности отклика в трёхмерном аффинном пространстве системой параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = f_1(u, v), \\ y = f_2(u, v), \\ z = f_3(u, v). \end{cases}$$

Необходимо определить частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Принципиальный подход к решению поставленной задачи представлен в работе [8] и сводится к решению однородной системы двух дифференциальных уравнений первой степени:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial f_3}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial v} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial v} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial f_3}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

где $F(x, y, z) = 0$ – уравнение поверхности отклика в неявном виде.

Решая полученную систему дифференциальных уравнений методом Крамера относительно неизвестных $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial z}$, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = k\left(\frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial v} - \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = k\left(\frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial v} - \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = k\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial v}\right),$$

где k – некоторый коэффициент пропорциональности.

Отсюда определяем искомые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f_3}{\partial v} - \dfrac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial v}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial v} - \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\dfrac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial v} - \dfrac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f_3}{\partial v}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial v} - \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial v}}.$$

Работа опубликована при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-07-20045\18

Обобщая рассмотренный выше способ дифференцирования, для трёхпараметрической гиперповерхности отклика, принадлежащей 4-мерному пространству и заданной в неявном виде: $F(x,y,z,t)=0$, где $x=f_1(u,v,w)$, $y=f_2(u,v,w)$, $z=f_3(u,v,w)$, $t=f_4(u,v,w)$, получим:

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_4}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u}\\ \frac{\partial f_4}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v}\\ \frac{\partial f_4}{\partial w} & \frac{\partial f_2}{\partial w} & \frac{\partial f_3}{\partial w}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u}\\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v}\\ \frac{\partial f_1}{\partial w} & \frac{\partial f_2}{\partial w} & \frac{\partial f_3}{\partial w}\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_4}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u}\\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_4}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v}\\ \frac{\partial f_1}{\partial w} & \frac{\partial f_4}{\partial w} & \frac{\partial f_3}{\partial w}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u}\\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v}\\ \frac{\partial f_1}{\partial w} & \frac{\partial f_2}{\partial w} & \frac{\partial f_3}{\partial w}\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_4}{\partial u}\\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_4}{\partial v}\\ \frac{\partial f_1}{\partial w} & \frac{\partial f_2}{\partial w} & \frac{\partial f_4}{\partial w}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u}\\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v}\\ \frac{\partial f_1}{\partial w} & \frac{\partial f_2}{\partial w} & \frac{\partial f_3}{\partial w}\end{vmatrix}}.$$

Аналогичным образом можно продифференцировать гиперповерхность отклика, принадлежащую $n-$мерному пространству. При этом будет увеличиваться только порядок определителя матрицы, составленной из частных производных. С другой стороны, для определения производной $k-$го порядка достаточно продифференцировать функцию k раз.

4. Принципиальный вычислительный алгоритм модифицированного метода конечных элементов

Собственно говоря, как и в классическом методе конечных элементов, каждая инженерная задача носит отдельный характер и обладает своими особенностями. Тем не менее, можно выделить принципиальный алгоритм решения дифференциальных уравнений модифицированным методом конечных элементов, который состоит из 6 этапов.

1) Выбрать дугу аппроксимирующей кривой, которая будет основой для создания геометрического объекта, проходящего через наперёд заданные точки.
2) Выполнить покоординатный расчёт и продифференцировать его результат в соответствии с исходным дифференциальным уравнением.
3) Поочередно подставлять значения параметров в узловых точках, формируя тем самым локальную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
4) При необходимости повторяем первые 3 этапа несколько раз, накапливая, таким образом, локальные СЛАУ для формирования глобальной СЛАУ.
5) Решаем полученную СЛАУ и определяем необходимые значения функции отклика в узловых точка. После чего подставляем результат вычислений в параметрические уравнения аппроксимации.
6) Анализируем полученный результат и проверяем его достоверность. В случае получения недостаточно точных результатов увеличиваем количество геометрических объектов функции отклика, которые в нашем случае играют роль конечного элемента.

Таковы основные этапы решения дифференциальных уравнений модифицированным методом конечных элементов. Интересно, что для решения некоторых дифференциальных уравнений достаточно использовать всего один геометрический объект, т.е. один конечный элемент.

5. Маленький пример

В качестве примера предложенной модификации метода конечных элементов рассмотрим решение простейшего дифференциального уравнений первого порядка: $y'=2x^2+1$ на интервале $x\in[-2,4]$.

В качестве аппроксимирующей дуги кривой выберем модифицированную дугу кривой Безье 3-го порядка, которая описывается следующим точечным уравнением:

$$M=M_1\left[\bar t^3-2{,}5\bar t^2t+\bar t t^2\right]+M_2\left[9\bar t^2t-4{,}5\bar t t^2\right]+$$
$$+M_3\left[-4{,}5\bar t^2t+9\bar t t^2\right]+M_4\left[\bar t^2t-2{,}5\bar t t^2+t^3\right].$$

Выполнив покоординатный расчёт, получим следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases}x=x_1\left[\bar t^3-2{,}5\bar t^2t+\bar t t^2\right]+x_2\left[9\bar t^2t-4{,}5\bar t t^2\right]+\\ +x_3\left[-4{,}5\bar t^2t+9\bar t t^2\right]+x_4\left[\bar t^2t-2{,}5\bar t t^2+t^3\right].\\ y=y_1\left[\bar t^3-2{,}5\bar t^2t+\bar t t^2\right]+y_2\left[9\bar t^2t-4{,}5\bar t t^2\right]+\\ +y_3\left[-4{,}5\bar t^2t+9\bar t t^2\right]+y_4\left[\bar t^2t-2{,}5\bar t t^2+t^3\right].\end{cases}$$

Продифференцировав полученную систему параметрических уравнений и подставив результат дифференцирования в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{\left[\begin{array}{l}y_1(-5.5\bar t^2+7\bar t t-t^2)+y_2(9\bar t^2-27\bar t t+4.5t^2)+\\ +y_3(-4.5\bar t^2+27\bar t t-9t^2)+y_4(\bar t^2-7\bar t t+5.5t^2)\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l}x_1(-5.5\bar t^2+7\bar t t-t^2)+x_2(9\bar t^2-27\bar t t+4.5t^2)+\\ +x_3(-4.5\bar t^2+27\bar t t-9t^2)+x_4(\bar t^2-7\bar t t+5.5t^2)\end{array}\right]}=$$
$$=2\left(\begin{array}{l}x_1\left[\bar t^3-2{,}5\bar t^2t+\bar t t^2\right]+x_2\left[9\bar t^2t-4{,}5\bar t t^2\right]+\\ +x_3\left[-4{,}5\bar t^2t+9\bar t t^2\right]+x_4\left[\bar t^2t-2{,}5\bar t t^2+t^3\right]\end{array}\right)^2+1.$$

Для определения граничных условий разобьем интервал $x\in[-2,4]$ на 3 равные части. Таким образом, получим следующие значения координаты x узловых точек: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$ и $x_4=4$. В данном случае было использовано равномерное распределение точек, но на самом деле это совсем не обязательно. Просто в основу точечного уравнения дуги кривой Безье 3-го порядка заложено простое отношение трёх точек, которое является инвариантом покоординатного расчёта (отличительная особенность БН-исчисления). Поэтому в случае равномерного распределения точек кубическое уравнение преобразуется в уравнение прямой: $x=6t-2$, из которого легко выделить значение параметра t:

$$t=\frac{x+2}{6}.$$

Далее воспользуемся значениями параметров, заложенными в уравнение аппроксимации.

При $t=0$, получим: $-5.5y_1+9y_2-4.5y_3+y_4=54.$

The publication of the conference proceedings was supported by the RFBR, grant No. 18-07-20045\18

При $t = \dfrac{1}{3}$, получим: $-y_1 - 1.5y_2 + 3y_3 - 0.5y_4 = 6.$

При $t = \dfrac{2}{3}$, получим: $0.5y_1 - 3y_2 + 1.5y_3 + y_4 = 54.$

При $t = 1$, получим: $-y_1 + 4.5y_2 - 9y_3 + 5.5y_4 = 198.$

В результате получаем следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} -5.5y_1 + 9y_2 - 4.5y_3 + y_4 = 54. \\ -y_1 - 1.5y_2 + 3y_3 - 0.5y_4 = 6. \\ 0.5y_1 - 3y_2 + 1.5y_3 + y_4 = 54. \\ -y_1 + 4.5y_2 - 9y_3 + 5.5y_4 = 198. \end{cases}$$

Проанализируем полученную СЛАУ. Главный определитель системы $\Delta = 0$, т.е. система имеет множество решений. Однако не всё так однозначно. Дело в том, что все вычисления были выполнены в программном пакете Maple с высокой степенью точности, в СЛАУ же попали округлённые значения коэффициентов уравнений, поэтому они и дают значение определителя $\Delta = 0$. На самом деле, без учёта округлений, $\Delta \neq 0$ и система имеет единственное решение:

$$y_1 = -28,8;\ y_2 = -21,47;\ y_3 = -14,13;\ y_4 = 25.2.$$

Используя вычисленные значения координаты y узловых точек, получим следующее параметрическое уравнение:

$$y = 144t^3 - 144t^2 + 54t - 28,8.$$

С учётом полученной ранее зависимости параметра t от переменной x, получим:

$$y = 0,(6)x^3 + x - 21,467 \approx \frac{2}{3}x^3 + x - 21,467.$$

Решим теперь исходное дифференциальное уравнение традиционным способом:

$$dy = \left(2x^2 + 1\right)dx \Rightarrow y = \int \left(2x^2 + 1\right)dx \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^3 + x + C.$$

Таким образом, путём вычислений было получено частное решение дифференциального уравнения, для которого константа $C = -21,467$.

Возникает вопрос: зачем решать таким громоздким способом, если можно легко воспользоваться таблицей первообразных? Дело в том, что в данном случае был приведен простой для понимания пример и выполнена проверка предложенного метода на работоспособность, которую всегда легче проверять на простых задачах. Используя предложенный в работе алгоритм, обобщённый на многомерное пространство, можно вычислительно решать сложные дифференциальные уравнения, для которых решение не выражается в элементарных функциях.

6. Заключение

На данном этапе разработаны теоретические основы и принципиальный вычислительный алгоритм модификации классического метода конечных элементов и его использования для решения дифференциальных уравнений на основе методов геометрического моделирования. При этом можно выделить следующие преимущества предложенной модификации:

1) Криволинейные геометрические объекты многомерного аффинного пространства являются одновременным носителем нескольких точек, что значительно уменьшает «кусочность» итоговой функции и количество необходимых вычислений.
2) Модифицированный метод конечных элементов может быть использован на любой сети точек, сохраняя при этом криволинейную составляющую, что обеспечивает учёт геометрической нелинейности при решении задач на прочность и устойчивость. При этом сохраняется возможность геометрического моделирования физической, конструктивной, генетической и другой нелинейности.
3) Благодаря инвариантным свойствам параметра точечных уравнений отсутствует необходимость в использовании направляющих косинусов.
4) Результат моделирования представлен не дискретным набором точек, для которых вычислены значения функции отклика удовлетворяющие исходному дифференциальному уравнению, а непрерывным геометрическим объектом многомерного аффинного пространства. Такой подход исключает необходимость проведения интерполяции для вычисления значений функции отклика в промежуточных точках.
5) На основе метода многомерной интерполяции пространства выполнено обобщение вычислительного способа решения дифференциальных уравнений с частными производными как в сторону увеличения количества переменных, так и в сторону увеличения порядка производных. Причём количество переменных ограничивается только размерностью пространства, а порядок производных – степенью алгебраической кривой, которая является исходной составляющей аппроксимируемого геометрического объекта.

В перспективе планируется выпуск цикла статей с подробным решением дифференциальных уравнений математической физики на основе модифицированного метода конечных элементов.

7. Литература

[1] Балюба, И. Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении [Текст]: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01 / Балюба И. Г. – Макеевка, 1995. – 227 с.

[2] Балюба, И. Г. Точечное исчисление [Текст]: [учебное пособие] / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; под ред. В.М. Верещаги. – Мелитополь: МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 236 с.

[3] Бумага, А. И. Геометрическое моделирование физико-механических свойств композиционных строительных материалов в БН-исчислении [Текст]: дис. … канд. техн. наук: 05.23.05, 05.01.01 / Бумага А. И. – Макеевка, 2016. – 164 с.

[4] Владимиров, В.С. Что такое математическая физика? [Текст] / В.С. Владимиров // Препринт, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. – М.: МИАН, 2006. – 20 с.

[5] Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы [Текст] / Р. Галлагер // Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.

[6] Найдыш, В. М. Алгебра БН-исчисления [Текст] / В.М. Найдыш, И.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Міжвідомчий науково-технічний збірник. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 210-215.

[7] Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений [Текст] / Дж. Ортега, У. Пул // Пер. с англ.; под ред. А.А. Абрамова. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

[8] Смирнов, В.И. Курс высшей математики [Текст] / В.И. Смирнов – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 656 с.

Об авторах

Конопацкий Евгений Викторович, к.т.н., доцент кафедры специализированных информационных технологий и систем, строительного факультета Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Его e-mail e.v.konopatskiy@mail.ru.

Работа опубликована при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-07-20045\18